

Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика



Илиана Иванова Цветкова

**ИЗВЪНКЛАСНАТА РАБОТА ПО МАТЕМАТИКА
В НАЧАЛЕН И ПРОГИМНАЗИАЛЕН ЕТАП –
ВАЖЕН ФАКТОР ЗА ОТКРИВАНЕ И РАЗВИВАНЕ
НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ТАЛАНТ**

**Автореферат
на дисертационен труд**

**за придобиване на образователната и научна степен „доктор“
в област на висше образование 1. Педагогически науки,
професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по...**

**Докторска програма
„Методика на обучението по математика и информатика“**

**Научен ръководител
проф. Кирил Банков**

София, 2023

Съдържание

Увод	1
ГЛАВА 1. Ролята на извънкласната подготовка и състезанията за откриване и развиване на математическия талант	3
Математически талант – що е то?	3
Как да разпознаем (открием) таланта?	4
Развиване на таланта и ролята на математическите състезания за изявата му.....	5
Задачите като инструмент за развиване на математическия талант.....	5
ГЛАВА 2. Анализ на учебните програми в начален и прогимназиален етап	6
ГЛАВА 3. Педагогически експеримент на изследването	9
ГЛАВА 4. Системи от задачи.....	12
Ребуси	12
Метод за решаване на задачи отзад-напред.....	13
ГЛАВА 5. Оценяване на математическия талант	14
Заключение	18
Литература	20
Публикации на автора, свързани с темата на дисертацията	23
Декларация за оригиналност.....	25

Увод

Като дългогодишен учител в СМГ, работата ми е тясно свързана със задълбочено развитие на математическите способности на изявени ученици още от началните класове в училище. Заявеното от МОН желание за задълбочаване на познанията по математика и технологиите във връзка с участието на България в STEM коалицията е стимулт, който ме насърчи да напиша този дисертационен труд.

Като разглеждаме спецификата на работата с млади математически таланти, достигахме до изводите, че извънкласната работа, започнала в начален и прогимназиален етап, е съществена за развитието и реализацията на учениците. Правилно подобрите теми за извънкласна работа, разглеждани в развитие в няколко класа, дават възможност за по-пълно, дълбоко и трайно усвояване на знания. Подборът на задачите с нарастваща трудност, както и нестандартни задачи, провокиращи творческо мислене е съществен за създаване на успешни и реализирани млади таланти. Възможността за изява на състезания е силен допълнителен мотивиращ фактор за развитие на математическия талант.

Талантът се проявява чрез постиженията на конкретния ученик и развитието му трябва да бъде оценено. Най-често оценяването на математическите способности на талантливите деца става при явяването им на състезания. Тогава те са оценени от независима комисия и оценката се изразява в точки и подредба в класирането. Когато състезанията са отборни, оценка (класиране) получава целият отбор, но това не дава добра представа за участието на всеки отделен ученик при изпълнението на общата задача. В дисертационния труд е разгледан авторски метод за оценяване на индивидуалните участници при работа в екип.

Целта на тази дисертация е да покаже, че развиването на математическия талант трябва да започне още от последните класове на началния етап или най-късно в прогимназиалния етап на образование. Това дава възможност за пълно разгръщане на таланта и неговата реализация в средното училище, а по-късно в университета и в живота като цяло.

Актуалността на избраната тема се обуславя от необходимостта:

- ✓ да се разгърнат уменията, способностите и потенциала на учениците в областта на математиката, информатиката и технологиите;

- ✓ да се открият, развият и подкрепят математическите таланти и да се спомогне за тяхната реализация и личностно развитие;
- ✓ да се формират и развият у учениците потребности за самостоятелно развитие на компетентности, съществени за реализацията в живота

Хипотеза – Ранното откриване и целенасоченото развитие на математическия талант е предпоставка за неговата успешна реализация.

Акцентът е върху откриването, развитието и реализацията на математическия талант.

Обектът на изследването е извънкласната работа (организация, обем, съдържание и методи) по математика с ученици от 8 до 14 годишна възраст.

Предметът на изследването е създаване на интерес към извънкласните занимания по математика, методи на формиране на познавателни умения, откриване, развиване и обучение на математически таланти.

За постигане на поставената цел са изпълнени следните **задачи**:

1. Проучване на методическа, педагогическа и психологическа литература на утвърдени автори, с фокус развитие и реализиране на таланти, математически таланти и състезателна математика.
2. Анализиране и синтезиране на изучените идеи и предлагане на модел за реализиране на обучение, в което максимално се развива математическия талант и ефективно се реализира в училище и след завършване на средно образование.
3. Разработване на методически материали за извънкласна работа по математика.
4. Разработване на методика за оценяване на индивидуалните ученици при работа в екип (например, при отборни състезания).
5. Провеждане на анкетно проучване сред ученици и родители относно влиянието на обучението в извънкласни занимания по математика и реализацията им на различни математически състезания и в живота.

Използваните в изследването методи са:

1. Проучване на методическа, педагогическа и психологическа литература на утвърдени автори по изследвания проблем.
2. Анализ и синтез на теоретичното проучване на поставения проблем и изграждане на авторската концепция.

3. Педагогическо наблюдение.
4. Анкетно проучване.
5. Статистическа обработка на получени анкетни данни.

Дисертационният труд се състои от:

Увод.

Ролята на извънкласната подготовка и състезанията за откриване и развиване на математическия талант.

Анализ на учебните програми по математика в начален и прогимназиален етап.

Педагогически експеримент на изследването.

Системи от задачи.

Оценяване на математическия талант.

Заключение.

Използвана литература.

Приложения.

ГЛАВА 1. Ролята на извънкласната подготовка и състезанията за откриване и развиване на математическия талант

Математически талант – що е то?

Какво е талант и кой може да се нарече талантлив? Има ли разлика между талантлив, надарен и изявен ученик? Надарени са децата, чието умствено развитие е над средното и способностите им се развиват толкова бързо, че имат нужда и полза от специално подбрани образователни програми. Табов (2004, с. 31) подчертава, че талантът може да се интерпретира като *творческа надареност* и предпочита да говори за *изявени ученици* – такива, които проявяват комбинация от естествени пасивни заложи и активни под формата на стремеж към тяхната реализация чрез участие в различни състезания

Талантът е като самородното злато. Първо трябва да положим усилия да го открием, пресявайки много пясък. След това трябва да го обработим и полираме, за да заблести. Математическият талант също трябва да бъде търсен и то сред малките ученици. Те все още не са научени на клишета, не са тренирани да изпълняват процедури и не са наплашени, че математиката е страшна. В тази

възраст може лесно да се открие кой има математически заложби, защото формалните знания, придобити в училище, са все още малко и за откриването на решението на по-труден казус се изисква предимно логическо мислене.

Как да разпознаем (открием) таланта?

Повечето родители смятат детето си за талантливо, но има разлика между ученик с високи постижения в училище и дете, което е интелектуално надарено. Откриването на таланта в ранните училищни години не винаги е лесна задача. Надарените деца имат специални черти, които могат да помогнат за идентифицирането им сред останалите ученици. Едно талантливо дете трябва да притежава комбинация от интелектуални, емоционални и психологически качества. Най-често в семейството за първи път са забелязани и развити качества на детето. В изследванията на ранното детско развитие има всеобщ консенсус, че този период е от ключово значение за развитието на интелекта на едно дете. „Бъдещите способности на детето и тяхната ефективност са силно повлияни от предучилищната му домашна среда.“ (Серебряков и Лангер, 1999, с. 91). Много често семейната среда не е достатъчна да развие и подкрепи математическия талант на едно дете. Бързата, гъвкава и нестандартна мисъл на детето, понякога е плашеща дори и за учителите в начален курс, които не са с математическо образование. Мъдрите учители насочват тези деца към състезания по математика, където да се тества талантът и евентуално се провежда специализирана подготовка.

В България има няколко състезания по математика за ученици в началното училище. Дори за I клас има международни (Европейско кенгуру, Математика без граници, Бобър), национални (Математически турнир „Иван Салабашев“, Черноризец Храбър“, Viva математика с компютър) и регионални състезания по математика (Софийски математически турнир, Коледно и Великденско математическо състезание). Тези събития са най-добрите места, където могат да бъдат открити талантливите и надарени ученици. Резултатите от състезанието като средство за сравняване с постиженията на останалите участници, дават възможност да се направи по-ясна преценка за способностите на детето (Tsvetkova, 2016). Системата на състезания по математика през началната училищна възраст на децата спомага за откриването на таланта и е стимулиращ и мотивиращ елемент за развиването му.

Развиване на таланта и ролята на математическите състезания за изявата му

Сам по себе си висок IQ не е гаранция за успех на талантливото дете. Ключова роля играят амбицията, енергията и решителността, както и семейната и социалната среда. Много умните деца могат да са с еднакви интелектуални способности, но те са изключително различни като личности, интереси и постижения. Ролята на учителя е не само да обучава талантливото дете в академичен аспект, но и да се стреми да му подsigури подходяща среда, за да може да развие таланта си. Най-напред трябва да му се помогне ефективно да учи и научава. След това да се насочи към подходящи цели и да му се даде възможност да провери напредъка си (Marland, 1971). Едно от нещата, което най-силно мотивира учениците да отделят много време за занимания с математика, е безспорно възможността да участват в национални и международни състезания. На тях те могат да измерят постиженията и напредъка си.

Задачите като инструмент за развиване на математическия талант

Една възможна цел за изява на математически талант е отлично представяне на математически състезания, а пътят за постигането ѝ е системната подготовка. В нея на преден план излиза задачата. Особено ценни са теми, задачи от които дават възможност да темата да се разглежда в няколко последователни години, като се затвърждава наученото и след това се надгражда. Една такава тема е „Аритметични ребуси“. Решаването им изисква единствено знания за начина на извършване на аритметичните действия, което прави темата подходяща за различни възрастови групи. Същевременно могат да се съставят ребуси, които изискват много и различни съображения, за да се намери решението им. Също така фактът, че има ребуси, които имат повече от едно решение или нямат решение среща малките ученици с непознати за тях до този момент проблеми, тъй като задачите които решават в училище обикновено имат единствен верен отговор. За да могат да се справят с решаването на ребуси, на децата се дава система от принципи (правила), които да им помагат. Част от тези принципи съответстват на свойствата на аритметичните действия и на числата. Тъй като подходите за решаване на ребуси могат да бъдат различни, в процеса на работа учениците виждат, че до решение на една задача може да се стигне по

различни пътища, някои от които по-кратки или по-елегантни от други. Това показва богатството на математиката, стимулира любопитството и творческото начало у децата. Като добавим удовлетворението и гордостта, които малките ученици изпитват след като решат една нелека задача, за която често и родителите не са в състояние да помогнат, можем да кажем, че темата „Ребуси“ е изключително полезна за развитието на младите математици.

ГЛАВА 2. Анализ на учебните програми в начален и прогимназиален етап

Съвременното общество се променя изключително бързо и това поставя нови изисквания към образованието на децата, особено в частта математика, логика, работа с данни, оценяване на достоверност на информацията, адаптивност и умение за учене през целия живот. Ускореното технологично развитие и достъпната информационна среда правят излишно заучаването на конкретни факти и много по-ценно умението да се работи с широко достъпната информация. Често се срещаме с проблеми, за които нямаме необходимата информация и знания и трябва да търсим тяхното разрешаване единствено на базата на логиката и обработката на максимално достъпната информация.

Нови акценти стават водещи в световното образователното пространство: грамотност – четивна, математическа, природонаучна; ключови компетентности; активно обучение в конструктивистка среда (проблемноизследователски подходи); обучение през целия живот, включително неформално (вънзавънзавънституционална среда); умения за самостоятелно учене и рефлексия; интердисциплинарност на обучението.

Безспорно има базисни знания, които трябва да бъдат научени и добре усвоени, за да ни дадат свободата да ги ползваме ефективно в случаите, когато се изисква много повече от директното им приложение. Такива са знанията по аритметика, които основно се изучават в начален етап.

В начален курс се отделя 46 – 50 % от времето за преподаване на нови знания и също толкова за затвърждаването им, докато в прогимназиален курс времето отделено за нови знания е 60%, докато за упражнения са предвидени 32%.

Забелязва се дисбаланс между времето отделено за упражнение и нови знания, особено при прехода от начален в прогимназиален етап. За учениците от 4 клас е предвидено 50% от времето за упражнения, а следващата година учениците от 5 клас имат едва 32% за това.

В начален етап се изучават и усвояването предимно алгоритми за пресмятане, които са еднотипни за едноцифрени, двуцифрени и многоцифрени числа. Минимални са знанията за геометричните фигури, предимно свързани с разпознаването им, начертаване и измерване. В прогимназиален етап още първата година се включват на области на компетентности като логически знания, моделиране и елементи на вероятности и статистика. Това прави прехода от четвърти в пети клас много труден за голяма част от учениците. Умните и интелигентни децата, които имат интерес към обучението скучаят в часовете по математика в начален етап, защото изучавания материал е лесен и еднообразен за тях. Едновременно с това те остават с убеждението, че математиката е равнозначна на аритметика и науката се развиват единствено като се смята с все по-големи числа. Лекотата с която усвояват преподаваното в часовете прави трудно сравняването на постиженията на децата, защото много от тях се справят с поставените задачи и единствен критерий остава скоростта. У тези интелигентни деца остава убеждението, че да си добър по математика означава единствено да смяташ с големи числа, колкото се може по-бързо. Същите тези деца, попадайки в пети клас и срещайки професионално преподавана материя, като новия материал е разнообразен и се трупа бързо, часовете за упражнения намаляват, а навици за системно и задълбочено учене на математика не са изградени, не успяват да се справят и бързо започват да губят интерес, а естествено и нивото им на подготовка и усвояване на знания спада.

Тези факти вероятно са ключови за широкия интерес на учениците от начален етап към математическите състезания и извънкласните форми на работа по математика, предлагани от различни школи. Там учениците се срещат с друго лице на математиката – забавна, провокираща, нестандартна. Виждат, че има задачи по математика в които не пресмятаме нищо или почти нищо. Децата забелязват, че да разбереш условието на задачата е почти толкова важно, колкото и да измислиш и да опишеш решението, а и че може решенията да са повече от едно. Срещат се с необходимостта да мислят задълбочено и продължително върху един проблем.

Повече от 20 години в СМГ се провеждат извънкласни занимания по математика за ученици от 2, 3 и 4 клас. В течение на тези години се оформи и тематика, която е подходяща за съответния клас. Част от темите бяха оформени в две книги – „Първа математическа читанка“ и „Математическа читанка“, а по-късно разширени и допълнени в книгите НЕМО за 2., 3. и 4. клас. Тези учебни помагала се ползват и от други школи и училища. Някои от темите, които са разработени в тези помагала и по които се подготвят ученици от втори, трети и четвърти клас в извънкласните занимания, ръководени от учители на СМГ са следните:

1. Логически задачи.
2. Задачи за преливане.
3. Действия с естествени числа, приложение на свойства на четността.
4. Приложение на правилата за действия с естествени числа.
5. Моделиране на текстови задачи с кръгове на Ойлер.
6. Принцип на Дирихле.
7. Метод на инверсията или решаване на задачи отзад-напред – с една, две или три верижки.
8. Измерване, мерни единици, преминаване от една мерна единица в друга.
9. Обиколки и лица на основни геометрични фигури и конструкции от тях.
10. Задачи за претегляне на равновесни везни и размяна на предмети с равни стойности.
11. Преброяване на възможности – комбинаторни задачи решавани с изброяване или граф-дърво.
12. Задачи за часовници – събиране и изваждане на часове и минути, задачи за броене на цифри в записа на часове.
13. Задачи за календар – определяне на ден от седмицата за минала или бъдеща дата.
14. Моделиране на текстови задачи с помощта на отсечки.
15. Моделиране на текстови задачи с елементарни системи уравнения, без да се използва формален запис или по аритметичен начин.
16. Измислени аритметични действия.
17. Задачи за покупки – моделиране на текстови задачи с елементарни системи уравнения, без да се използва формален запис.
18. Задачи за движение.

19. Неравенство на триъгълника.
20. Броене на цифри и на числа.
21. Аритметични ребуси.
22. Сумиране по метода на Гаус.
23. Диофантови уравнения.

Част от темите, изучавани в школите от 2 до 4 клас продължават да се изучават и в прогимназиален етап. Също така се появяват теми, които се базират на изученото в часовете от задължителната програма, като го надграждат. Целта е да се разширят знанията и да се развият уменията за решаване на задачи чрез анализ и синтез, индуктивни разсъждения, използване на метода на допускане на противното и логически разсъждения. Уменията, които развиват учениците в този етап на обучението си са изключително полезни за по-нататъшното им развитие и като математици и състезатели по математика. Опитът, който натрупват за решаване на сериозни задачи с относително малко знания по математика им помага в по-нататъшното им развитие като математици, когато се срещат и трябва да разрешават отворени проблеми.

ГЛАВА 3. Педагогически експеримент на изследването

В педагогическите изследвания, както и в другите научни изследвания, целта е да се изучат и опишат нови процеси и явления, да се направят изводи за причините, които са ги породили, да се създадат правила или да се формулират закономерности.

Настоящата изследователска работа може да се отнесе към приложните, по своята проблемна насоченост, емпиричните, според предмета на изследователската дейност и обяснителните, според целта си. Това води до избор на изследователски подход, отговарящ на тези характеристики. Поради невъзможността да се съберат големи количества стандартизирана информация, да се използва дедуктивен подход на познание, и съществуването на много тясна връзка между изследователят и изследваните обекти, подходящо е да се прилага качествения изследователски подход.

Педагогическото наблюдение, което проведох е върху учениците, посещаващи школа за извънкласна работа по математика, от три випуска,

завършили 12. клас съответно през годините 2004, 2012 и 2020. С всички тях съм работила от 5. до 12. клас в СМГ и преди постъпването си в СМГ са посещавали школи за извънкласна подготовка.

Първоначалният подбор за участие в школата по математика за извънкласна работа е изцяло съобразен с желанията на учениците. Не е имало никакъв предварителен тест за определяне на нивото на подготовка или математическите способности. Разбира се самият факт, че децата учат в специализирано училище с профил математика, означава, че те имат повишен интерес към тази учебна дисциплина. В прогимназиалния етап по-голям брой ученици посещават извънкласните занимания, но в по-горните класове броят им намалява, обикновено остава постоянен след 8 – 9 клас. Учениците, активно участвали в школата по време на педагогическия експеримент са участвали в национални състезания по математика и са били сред наградените, а някои от тях имат награди и на международни състезания.

Подготовката за състезания, включително отборни, включва два основни елемента:

- Обща теоретическа и практическа подготовка.
- Тренировъчни състезания.

Общата теоретическа и практическа подготовка се състои в преподаване на теоретични знания, групирани тематично в отделни методически единици по различни теми за извънкласна работа по математика и разглеждане на задачи свързани с тях. „При решаване на дадена математическа задача можем да разграничим два елемента: *рутинен*, който се състои в прилагането на определени „стандартни“ математически техники, като аритметични действия, тъждествени преобразувания и др., и *евристичен*, който обикновено назоваваме с термини като „досещане“ (Табов, Й., 2004). Теория се налага да се изучава, защото, има задачи, чиито решения „представляват комбинация от голям брой „стандартни“ (рутинни) операции“ (Табов, Й., 2004) на базата на теорията. Тя се излага сбито, но включва всички необходими за решаването на задачите дефиниции и твърдения, като болшинството от тях се доказват и доказателствата се съобразяват с възрастта и натрупаните до момента знания на децата. Занятието се провежда в рамките на три учебни часа и обикновено започва с дефиниции и формулировки на базата на конкретен пример, за да могат да се изяснят по-добре

новите понятия. В края на занятиято се дават задачи за домашна работа, свързани с изучаваната тематика.

Вторият аспект на подготовката са тренировките. Те са съобразени с видовете състезания, индивидуално или отборно, в които участват учениците, както и с формата на задачите – с избираем отговор, с кратък отворен отговор или с подробно аргументирано решение. Тренировките се провеждат през цялата учебна година, като са по-интензивни и целенасочени преди всяко състезание.

Характерно за всички успешни състезатели по математика е, че те за започнали заниманията си с извънкласна и състезателна математика в начална та училищна степен или най-късно от началото на прогимназиален етап. Всички те са се явявали на математически състезания – основно Националната олимпиада по математика, но и на много други национални и регионални състезания. В гимназиален етап всички те са се развили като талантиливи и успешни състезатели, но не само по математика, а и по сродни дисциплини, в чиято основа са знанията по математика – физика, информатика, математическа лингвистика, химия, астрономия. Всички те продължават (някои вече са завършили) образованието си в най-добрите университети в България и в света и имат изключителни успехи, включително и в научната сфера.

Тези мои наблюдения разширих с анонимна анкета, която помолих да попълнят бивши ученици на СМГ. От отговорите на първия въпрос в анкетата става ясно, че само 3,9% от всички отговорили са започнали да се занимават със състезателна математика едва постъпвайки в гимназия. Всички останали за започнали заниманията си по-рано, като най-голям е броят на започналите занимания между 9 и 11 годишна възраст – 63%.

От всички попълнили в анкетата, 88% са посочили, че са участвали в математически състезания в начален или прогимназиален етап.

Твърдението на 80% от анкетираните, че участието в извънкласните занимания значително или съществено е повлияло върху развитието им като професионалисти и реализацията им в живота.

От анкетата може да се направи заключението, че ранното включване в извънкласните занимания по математика и участието в математически състезания съществено влияе върху постиженията в обучението, професионалната и житейска реализация.

ГЛАВА 4. Системи от задачи

В тази глава са представени две системи от задачи за работа с талантиливи ученици. Тематиката на всяка от тях дава възможност да се развие в няколко последователни класа. Така учениците имат възможност да затвърждават темата през различни години. Задачите са подбрани в съответствие с възрастта на учениците и техните знания, придобити от задължителната учебна програма. Подобни системи от задачи могат да се намерят още в: Tsvetkova 2010; Bankov, Tsvetkova 2014 и 2015.

Ребуси

Една от темите, които могат да се разглеждат в няколко поредни класа е „Ребуси“. Решаването на аритметични ребуси изисква единствено знания за начина на извършване на аритметичните действия, което прави темата подходяща за различни възрастови групи. Същевременно могат да се съставят ребуси, които изискват много и различни съображения, за да се намери решението им. Също така фактът, че има ребуси, които имат повече от едно решение или нямат решение среща малките ученици с непознати за тях до този момент проблеми, тъй като задачите които решават в училище обикновено имат единствен верен отговор. Това създава усещането у малките и умни деца, че е достатъчно наум да съобразят или пресметнат нещо или да „налучкат“ полуинтуитивно отговора за да твърдят, че са решили задачата. Ето защо едно от най-тежките препятствия за най-малките ученици, при решаване на ребуси е аргументацията, защо това е единствено (ако е такова) решението и защо сме сигурни, че са намерени всички решения на ребуса.

За да могат да се справят с решаването на ребуси, даваме на децата система от принципи (правила), които да им помагат, като броят им се увеличава в съответствие със знанията, които учениците имат. Част от тези принципи съответстват на свойствата на аритметичните действия и на числата. Също така препоръчваме да не се правят хаотични проверки, а да се прецени кои от символите можем еднозначно да определим. За тези, които не можем веднага да определим, записваме възможни стойности, като се опитваме да преценим кога имаме възможно най-малко проверки. Най-често започваме от цифрата на единиците или от най-старшия разред или от символа, който се среща най-често.

Когато алгоритъмът изисква разклоняване, учим децата да проследят всички разклонения и методично да изчерпат всички възможности. По този начин няма опасност да се пропусне решение, а ако ребусът няма решение, можем да го докажем. Важно е учениците да разберат, че да се реши един ребус, означава да се намерят *всичките* му решения или да се покаже, че няма такива.

Тъй като подходите за решаване на ребуси могат да бъдат различни, в процеса на работа учениците виждат, че до решение на една задача може да се стигне по различни пътища, някои от които по-кратки или по-елегантни от други. Това показва богатството на математиката, стимулира любопитството и творческото начало у децата. Като добавим удовлетворението и гордостта, които малките ученици изпитват след като решат една нелека задача, за която често и родителите не са в състояние да помогнат, можем да кажем, че темата „Ребуси“ е изключително полезна за развитието на младите математици.

Метод за решаване на задачи отзад-напред

Друга тема, която може да се разглежда в развитие от втори до пети клас, е приложение на метода решаване на задачи отзад-напред в текстови задачи и задачи за намиране на неизвестно число. Този метод използва схеми (наричаме ги „верижки“), които помагат за проследяване на действията, описани в условието на задачата и дават възможност да се намери решението започвайки от последното извършено действие и връщайки се назад. Така стъпка по стъпка се достига до началната ситуация, което обикновено се търси в задачата. Този начин на решаване на задачи е популярен също така като „речешки задачи“. Този метод изключително много опростява решението на задачата, която обикновено може да се реши и чрез съставяне на уравнение. Уравнението, обаче често е непосилно за решаване не само за малките, но и за по-големите ученици. Тази особеност на метода ни подсеща, че може да го използваме и за решаване на уравнения, но той не винаги приложим в този аспект.

Във втори клас разглеждаме темата в две отделни части, като в първата са включени само действия събиране и изваждане, а във втората и умножение и деление. Това е необходимо, тъй като второкласниците през първия учебен срок все още не знаят таблицата за умножение, а е добре първо да се запознаят с метода, да го упражнят и овладеят за действията събиране и изваждане. Така по-лесно разбират и усвояват приложението на метода когато се наложи да ползват

и четирите аритметични действия. За тях все още е много трудно да правят разлика между „с 2 повече“ и „два пъти повече“ и затова втората част е предвидена да се изучи в края на учебната година.

Задачите, които се разглеждат в трети клас са с по-високо ниво на сложност, което се изразява освен с по-дълги текстове на задачите, с повече действия, така и с допълнителни въпроси, свързани със ситуацията от задачата. Освен, че питаме „Колко е имало в началото?“, питаме и „Кой по колко е взел/получил?“ Докато във втори клас се ограничаваме до задачи, които се решават с една „верижка“, тук вече включваме и задачи с две „верижки“. Също така показваме как могат да се решават задачи за намиране на неизвестно число, като ползваме същия метод.

В четвърти клас освен, че преговаряме метода, като решаваме задачи с една или две „верижки“, но включваме и изучаваните вече половинки, третинки, четвъртинки. Също така се разглеждат задачи с три верижки и дробни части, което е ново ниво на познание. В този тип задачи е важно да се следят действията на трите обекта едновременно и да се вижда връзката между тях и последствията. Едно от трудните за разбиране за децата неща е, че ако един човек дава на друг половината от предметите, които има (т.е. неговите намаляват наполовина), то на другия не се удвояват, защото той има друго количество. Също така, ако някой даде третинка от предметите, които има на другого, то за него остават не една, а две третинки.

Акцентът на задачите, които се решават по метода за решаване на задачи отзад-напред в пети клас е използването на обикновени дроби. Докато в четвърти клас само се докосваме до тази идея, в пети клас я развиваме изцяло, като се основаваме на по-сериозните знания на учениците за действия с дроби, понятието част от число и процент.

ГЛАВА 5. Оценяване на математическия талант

Талантът се проявява чрез постиженията на конкретния ученик. Следователно, за да измерим таланта е нужно да измерим ученически постижения. Това става като се стимулират ученическите постижения и се измерва наблюдавания ефект от тази стимулация. Инструментът, с който става

стимулирането, се нарича тест, а процесът на стимулиране – тестиране. Наблюдаваният ефект е писмената работа на ученика, на която по дадени правила се съпоставят числа във вид на точки или оценка.

Когато се измерват постиженията по математика на талантиви ученици, често се използват задачите, които учениците решават на състезания от математика. Резултатите от класирането на състезания са една от възможните мерки, които използваме.

Когато работим с талантиви деца, имаме нужда да следим техния напредък и развитие. Усещането за успешното изграждане на таланта не е достатъчно. Трябва да се намерят измерими обекти, които да следим и да показват напредъка на ученика. Също така, трябва да можем да оценим постижението на детето спрямо общоприети стандарти и по този начин да оценим дали става дума за талант или за старателен и изпълнителен ученик. Така наречените познавателни равнища дават възможност да преценим правилно кои постижения са наистина високи и над обичайните. Една от най-популярните структури на познавателните области е на Блум, публикувана през 1956 година (Bloom, 1956). Той класифицира познавателните равнища на обучението от най-ниското (възпроизвеждане на информация) до най-високото (прилагане на научено знание или придобито умение в качествено нова ситуация). Класификацията е известна като таксономия на Блум.

Децата, притежаващи математически талант, трябва да извървят пътя на овладяване на всички нивата на познание. А следващата стъпка е да бъде оценен напредъкът им. Най-често оценяването на математическите способности на талантивите деца става при явяването им на състезания. Тогава те са оценени от независима комисия и оценката се изразява в точки и подредба в класирането. Този начин на оценяване е добре известен и се прилага от много години.

Част от състезанията са отборни или имат отборен етап. Когато състезанията са отборни, оценка (класиране) получава целият отбор, но това не дава добра представа за участието на всеки отделен ученик при изпълнението на общата задача. Този факт ни предизвиква за да потърсим начин да оценим участието на отделните членове на екипа. Такова оценяване е полезно като обратна връзка за състезателите при участието им в отборни състезания.

В разработката е разгледан авторски метод за оценяване на индивидуалните участници при работа в екип. Методът е приложим както за

отборни състезания, така и за екипна работа в редовните часове на обучение в училище. Той дава по-пълна картина на работата на екипа, като включва оценки за основните дейности, извършвани от членовете на отбора от момента на създаването му до изпълнението на съвместната задача.

Да разгледаме следния контекст. Учениците в един клас са разделени на няколко отбори. (Или участниците в отборно състезание, които по също са разделени на отбори.) В идеалния случай броят на учениците в отборите трябва да е равен, въпреки че методът работи и когато този брой е различен. Учителят задава задача на всеки отбор. Задачата може да бъде една и съща за всички отбори или да има различни задачи за отборите. Предложеният метод описва как след изпълнение на задачата(-ите) членовете на всеки отбор получават индивидуални оценки. Оценките в училище (или на състезание) обикновено имат числово изражение. Ето защо разработеният метод дава цифрови оценки в скала от цели числа между 0 и 100 включително. Ще опишем метода, като вземем предвид един конкретен отбор. Същата процедура се прилага за всеки от отборите.

След приключване на работата на отбора, учителят оценява изпълнението на задачата и изразява тази оценка в брой точки с цяло число между 0 и 100, т.е. най-ниската оценка е 0, а най-високата е 100. Означаваме това число (оценката на учителя) с t . Според обичайната практика, описана по горе, би трябвало всички ученици от отбора да получат една и съща оценка, която е равна на крайната оценка, поставена от учителя, т.е. всеки ученик трябва да получи крайна оценка от t точки. Ако има k ученика в един отбор, общата им оценка трябва да бъде kt точки, които са поравно разпределени между тях. Това ще бъде така, ако всеки член е допринесъл с коефициент 1 за екипната работа и следователно той заслужава $1 \cdot t = t$ точки. Тъй като признаваме, че приносът на членовете на отбора не винаги е равен, предложеният метод обяснява как тези kt точки могат да бъдат разпределени между членовете на отбора по такъв начин, че получените точки да съответстват на мнението на отбора за приноса на всеки от неговите членове. С други думи, за всеки от тях ще изчислим тежест w , която съответства на неговия принос въз основа на оценката на членовете на отбора. Тогава точките за всеки член ще бъдат wt , а не точно t .

За по-активните членове тези тегла w ще бъдат по-големи от 1, което означава, че крайните им точки ще бъдат по-големи от оценката на учителя за проекта t . За по-пасивните членове теглата ще бъдат по-малки от 1. Сборът от

всички тегла обаче трябва да бъде равна на k , тъй като общият брой точки за всички членове на отбора трябва да бъде kt .

Нека започнем от факта, че членовете на отбора знаят най-добре кой каква част от работата е свършил. Поради това включваме така наречената 360-градусова обратна връзка – всеки оценява всички в отбора, включително и себе си. За да бъде тази оценка по-прецизна, учителят трябва да подготви не само задачата за отбора, но и да определи основните дейности, които трябва да бъдат извършени за изпълнението на тази задача. Нека означим тези дейности с A_1, A_2, \dots, A_n . Идеята е тези дейности да се използват за 360-градусова обратна връзка.

Освен оценката на учителя (като t точки) на цялата изпълнена задача, всеки ученик попълва карта за оценка на всички участници в отбора, включително и за себе си. Тази карта съдържа самооценка и партньорска оценка на другите участници в отбора. Тези оценки също се изразяват в точки като цели числа между 0 и 100. За да направят оценките по-обективни и да улеснят учениците, тези общо 100 точки се разпределят върху различните основни дейности на съвместната работа, т.е. самооценките и партньорските оценки са на всяка от основните дейности на съвместната работа. По този начин се обръща внимание на всеки аспект от работата и на приноса на всеки участник.

Не всички теми по математика са подходящи за работа в екип. Темите, които изискват упражняване на умения за изчисляване, прилагане на конкретна формула или други упражнения, е по-подходящо да се оставят като самостоятелна работа. Темите, подходящи за краткосрочна работа в екип са тези, в които се прилагат логика и повече креативност, съчетават знания от различни клонове на математиката, анализ на зададените условия или отделни елементи от решението, които са относително самостоятелни и изискват повече техническо време. Такива са задачите за моделиране с уравнения или системи от уравнения или многостъпкови геометрични задачи. Тези теми са трудни за повечето деца. Когато учениците са оставени да работят индивидуално по тях, често не напредват достатъчно и губят интерес. Работата в екип дава възможност на всеки да се включи в работата, като всеки участник допринася за общия успех според възможностите си. Чрез въвеждането на описания начин на оценяване, се дава възможност на всеки ученик, участващ в решаването на задачата според силите си, да придобие знания и да получи оценка, съответстваща на неговите знания, умения и усилия.

В контекста на оценяване на развитието на таланта, може да се направят следните изводи, свързани с използване на разгледания метод:

1. При ученици от горните класове (гимназиален етап), оценяване на таланта на най-силните състезателите е по-подходящо да се прави въз основа на индивидуалната работа на всеки ученик. При останалите състезатели, както и при ученици, които нямат амбицията и възможността да се явяват на математически състезания, екипната работа и разгледаният метод са по-подходящи. Този извод е въз основа на проведената анкета.

2. При учениците от по-долните класове (начален и прогимназиален етап), оценяването на таланта може да се прави както с индивидуални задания, така и с екипна работа и разгледания метод. Този извод се основава на факта, че част от състезанията за по-малките ученици са или отборни или имат отборен етап. Лични наблюдения показват, че екипната работа при малките ученици е за предпочитане както от емоционална гледна точка, така и като възможност за изява.

Заклучение

Настоящата разработка е резултат от дългогодишната работа на автора с ученици, притежаващи математически талант. Работата с тези ученици е както урочна, така и извънкласна, като тук са описани наблюдения и резултати свързани с основно с извънкласната подготовка. За фокус на дисертацията е избрана извънкласната работа с ученици в начален и прогимназиален етап и значението ѝ за откриването и развиването на математическия талант.

В разработката се опитвам да обобщя що е талант и по-конкретно – математически талант. Търся отговори на въпросите как и къде се откриват децата с математически способности, как се разпознават надарените и талантливите, кои са факторите, които влияят върху откриването, развитието и изявата на таланта.

Основната теза в дисертацията е, че за да се открие и развие успешно математическия талант у децата е необходимо да се започне активна извънкласна работа (т. нар. школи по математика) в начален или прогимназиален етап на образованието, а за развитието на този талант

основен инструмент са състезателните задачи, подготовката и участието в математически състезания.

За да подкрепя тази теза анализирах публикации свързани с откриване и развитие на таланта изобщо и на математическия конкретно. Направените изводи са, че за много от талантите и специално за математическия талант, ранното откриване и активната работа в специализирана среда са съществени за развиването и за успешната му изява. За откриването на математическа дарба важна роля играят родителите (семейството) и учителите, а индикатор за наличие на талант най-често е успешното представяне на математически състезания. За развиването и изявата на таланта решаваща роля имат освен личната мотивация и мотивиращата учебна среда, още и включване на естествената склонност на децата да се състезават, чрез участието им в разнообразни математически състезания.

Конкретни приноси в разработката са:

1. Направен е анализ на методите и начините на откриване на деца с математически талант и работата с тях.
2. Разработена е програма за извънкласна работа по математика за ученици от 2 до 7 клас.
3. Разработени са учебни материали по тази програма за ученици от 2 до 4 клас, които се ползват и от други школи за извънкласна работа по математика.
4. На практика са приложени методите за работа с талантливи ученици от няколко випуска на СМГ.
5. Проучено е въздействието на този начин на работа върху развитието и изявата на талантите.
6. Представени са системи от задачи по тематики, които позволяват да бъдат развивани и надградени за различни възрастови групи.
7. Представени са авторски методически разработки за преподаване на тези теми.
8. Предложен е авторски метод за оценяване на индивидуалните постижения на всеки ученик, участващ в отбор.

От проведените наблюдения и изследвания може да се направят следните изводи:

- Ранното откриване на математическия талант е съществено за неговото развиване.

- Развиването и изявата на таланта могат да стават успоредно, като взаимно се подпомагат.

- Математическите състезания са мощен инструмент за развиването на таланта.

- Ученици, които са се занимавали с извънкласна работа по математика и са участвали в състезания още от начален или прогимназиален етап на образованието си имат успешна професионална и житейска реализация.

Тези изводи **потвърждават поставената работна хипотеза**, а именно, че ранното откриване и целенасоченото развитие на математическия талант е предпоставка за неговата успешна реализация.

Литература

Банков, К. (2012). *Широкомащабни оценъчно-диагностични педагогически изследвания*. Хабилитационен труд за академичната длъжност „професор“. София.

Гарднър, Х. (2014). *Множество интелигентности*. Издателство „Изток – Запад“. София.

Гладуел, М. (2010). *Изключителните*. Жанет 45, Пловдив.

Господинов, Б., Сариева, Й. и др. *Ръководство за обучение на докторанти*, Проект № ВГ051РО001-3.3.06/0026: „Развитие и усъвършенстване на междуфакултетска Докторантска програма в областта на педагогическите изследвания и електронното обучение в СУ“, София.

Златилов, В., Тонова, Т. и др. (2000). *Математическа читанка*. Труд и прозорец. София.

Златилов, В., Цветкова, И. и др. (2006). *Първа математическа читанка*. Труд. София.

Иванова-Неделчева, А. (2018). *Логико-репродуктивен модел в обучението на математически таланти (5 – 8 клас)*. Дисертационен труд за придобиване на образователна и научна степен „доктор“. Шумен.

Раковска, Д., Тонов, И. и др. (2007). *Математически състезания 4.–7. клас*. Регалия 6, София

Серебряков, В., Ст. Лангер. (1999). *Проверете интелигентността на своето дете*. Лик. София.

- Табов, Й. (2004). *Подбор, подготовка за решаване и оценяване на задачи за математически състезания*. Дисертация за присъждане на научната степен „доктор на педагогическите науки”. София.
- Цветкова, И. Панделиева, В. и др. (2015). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 2 клас*. БГ Учебник. София.
- Цветкова, И. Панделиева, В. и др. (2016 а). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 3 клас*. БГ Учебник. София.
- Цветкова, И. Панделиева, В. и др. (2016 б). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 4 клас*. БГ Учебник. София.
- Цветкова, И. (2023). *Ролята на извънкласната подготовка и състезанията за откриване и развиване на математическия талант*. Математическото образование 75-годишна мисия и история. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“. София
- Чиксентмихай, М. (2016). *Поток*. Хермес. Пловдив
- Bankov, K. I. Tsvetkova, (2014). *Figures whit Equal Areas in Convex Quadrilateral, Mathematics Lessons Learned from Across the World, Prekindergarten – Grade 8*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Bankov, K. I. Tsvetkova. (2015). *Inscribed Quadrilaterals, Mathematics Lessons Learned from Across the World, Grades 7 – 12*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Care, E., C. Scoular, and P. Griffin. (2016) *Assessment of collaborative problem solving in education environments*. Applied Measurement in Education. Volume 29 (4), 2016: 21st Century Skill Assessment.
- Gehring, E., K. Deibel, J. Hamer, and K. Whittington. (2006). *Cooperative learning: beyond pair programming and team projects*. Proceedings of the 37th SIGCSE technical symposium on Computer science education.
- Hao, J, L. Liu, A. von Davier, and P. Kyllonen. (2017). *Initial steps towards a standardized assessment for collaborative problem solving (cps): practical challenges and strategies*. In Innovative Assessment of Collaboration. Methodology of Educational Measurement and Assessment, A. von Davier, M. Zhu, and P. Kyllonen, Eds. Springer.
- Howe, A., Tolmie, A. Thurston, K. Topping, D. Christie, K. Livingston, E. Jessiman, and C. Donaldson. (2007). *Group work in elementary science: Towards organisational principles for supporting pupil learning*. Learning and Instruction, Volume 17 (5).
- Inglis, W. B. (1971). *Review of Gifted Children and the Brentwood Experiment, by S. A. Bridges*. British Journal of Educational Studies, 19(2).

- Issa, T. (2012). *Promoting learning skills through teamwork assessment and self/peer evaluation in higher education*. IADIS International Conference on Cognition and Exploratory Learning in Digital Age (CELDA).
- Kubincová, Z. and K. Kolčák. (2021). *Team assessment and self assessment in high school – preliminary results*. 19th International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET).
- Marland, S.P. (1971). *Education of the Gifted and Talented – Volume 1: Report to the Congress of the United States by the U. S. Commissioner of Education*.
- Navarro, J., L. Bosch, M. Palacín, M. Solé, R. Berger, D. Leiva, F. Ceppi, and J. Castellano. (2017). *Teamwork: Assessment of teamwork competence in higher education*. 3rd International Conference on Higher Education Advances, HEAd'17, Universitat Politècnica de Valencia, Valencia.
- Thurston, A., K. Topping, A. Tolmie, D. Christie, E. Karagiannidou, and P. Murray. (2010). *Cooperative Learning in Science: Follow-up from primary to high school*. International Journal of Science Education. Volume 32 (4).
- Tsvetkova, I. (2008). *Preparing Students for Team Competitions in Mathematics – Possibility to Work with All Students*. Paper presented in DG-9 “Promoting creativity for all students in mathematics education” at ICME-11, Monterrey, Mexico, July 6 – 13, 2008.
- Tsvetkova, I. (2010). *Applications of Semi-Invariants in Solving Math Competition Problems*. Mathematics Competitions. Volume 23 (2).
- Tsvetkova, I. (2016). *Mathematics Competitions as a Tool for Development of Gifted Students*. Mathematics Competitions. Paper presented in TCG-30 at ICME-13 Hamburg, Germany, July 24-31, 2016.
- Tsvetkova, I., K. Bankov. (2022). *Method for assessing individual students in teamwork at school*. 20th International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET).
- Urness, T. (2009). *Assessment using peer evaluations, random pair assignment, and collaborative programing in CSI*. Journal of Computing Sciences in Colleges. Volume 25 (1).

Web страници

- 1) Математическо състезание „По Лъон Кук – Хонг Конг“ (<https://www.poleungkuk.org.hk/en/news-of-education/competition>)
- 2) Математическо състезание International World Youth Mathematics Competition (<https://chiuchang.org/en/about-en/imas-en/>)
- 3) Математическо състезание World Mathematics Team Championship (<http://wmtc.international/?ckattempt=1>)

- 4) International Mathematics Competition
(<https://www.imc-math.org.uk/>)
- 5) www.problems.ru
- 6) www.klasirane.com
- 7) <https://web.mon.bg/bg/100835>
- 8) <https://www.mon.bg/bg/news/3279>

Публикации на автора, свързани с темата на дисертацията

- Цветкова, И. (1996). *За инициалите, нарежданията и още нещо*. Математика плюс, бр.3-4.
- Цветкова, И. (1997). *Вълшебните квадрати*. Математика плюс, бр.3-4.
- Цветкова, И. (1998). *Деление с остатък*. Математика плюс, бр.4.
- Цветкова, И. (2000). *Урок по рисуване*. Математика плюс, бр.3.
- Цветкова, И. (2003). *Как да приготвим отвара за болна змия?*. Математика плюс, бр.3.
- Минчева, Л., Цветкова, И. (2003). *Размисли след една разходка*. Математика плюс, бр.3.
- Цветкова, И., Минчева, Л. (2003). *Ако се дели*. Математика плюс, бр.4.
- Златилов, В., Тонова, Т. и др. (2000). *Математическа читанка*. Труд и прозорец. София.
- Цветкова, И. (2005). *Кой гледа рибката?*. Математика плюс, бр.4.
- Златилов, В., Цветкова, И. и др. (2006). *Първа математическа читанка*. Труд. София.
- Цветкова, И. (2007). *Хайде да се забавляваме*. Математика плюс, бр.4.
- Цветкова, И., Панделиева, В. и др. (2015). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 2 клас*. БГ Учебник. София.
- Цветкова, И., Панделиева, В. и др. (2016 а). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 3 клас*. БГ Учебник. София.
- Цветкова, И., Панделиева, В. и др. (2016 б). *НЕМО Математически пътешествия и приключения за 4 клас*. БГ Учебник. София.
- Цветкова, И. (2023). *Ролята на извънкласната подготовка и състезанията за откриване и развиване на математическия талант*. Математическото

образование 75-годишна мисия и история. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“. София.

Bankov, K. I. Tsvetkova, (2014). *Figures whit Equal Areas in Convex Quadrilateral, Mathematics Lessons Learned from Across the World, Prekindergarten – Grade 8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Bankov, K. I. Tsvetkova. (2015). *Inscribed Quadrilaterals, Mathematics Lessons Learned from Across the World, Grades 7 – 12*. National Council of Teachers of Mathematics.

Tsvetkova, I. (2010). *Applications of Semi-Invariants in Solving Math Competition Problems*. Mathematics Competitions. Volume 23 (2).

Tsvetkova, I. (2016). *Preparation of 5–7 grade students for mathematics competitions: area problems*. Mathematics Competitions. Volume 29 (2).

Tsvetkova, I. (2017). *Discovering, Development, and Manifestation of Mathematical Talent*. In “Competitions for Young Mathematicians. Perspectives from Five Continents”. ICME-13 Monographs. Editor: Alexander Soifer. Springer. (Referred in WoS and Scopus.)

Tsvetkova, I., K. Bankov. (2022). *Method for assessing individual students in teamwork at school*. 20th International Conference on Information Technology Based Higher Education and Training (ITHET). (Referred in WoS.)

Tsvetkova, I. (2024). *A Few Notes on the Bulgarian National Competition “Discovery of Young Talents”*. In book: Engaging Young Students in Mathematics through Competitions – World Perspective and Practice, Volume III, World Scientific. (приета за печат)

Tsvetkova, I. (2024). *The Role of Extracurricular Training and Competitions in Discovering and Developing of Mathematical Talent*. (приет доклад за Международния конгрес по математическо образование, ICME-2024, юли 2024, Сидней Австралия)

Декларация за оригиналност

от Илиана Иванова Цветкова

докторант на самостоятелна подготовка

към докторска програма „Методика на обучението по математика и информатика“

при ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“

Във връзка с провеждането на процедура за придобиване на образователната и научна степен „доктор“ в ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“ и защита на представения от мен дисертационен труд, декларирам:

Резултатите и приносите на проведеното дисертационно изследване, представени в дисертационния ми труд на тема „Извънкласната работа по математика в начален и прогимназиален етап – важен фактор за откриване и развиване на математическия талант“ са оригинални и не са заимствани от изследвания и публикации, в които нямам участия.

Декларатор:

Илиана Цветкова

София, 2023 г.