

# С Т А Н О В И Щ Е

за дисертационния труд на Матей Боянов Константинов на тема

## **Субдиференциален анализ на функции, подобни на изпъкналите**

за получаване на образователната и научна степен  
"ДОКТОР"

В област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика  
Професионално направление 4.5 Математика  
Докторска програма „Изследване на операциите“  
Катедра ВОИС, ФМИ на СУ „Св. Кл. Охридски“

Член на научното жури: проф. д-р Цветомир Цачев, ИМИ-БАН

Представеният дисертационен труд съдържа 79 страници, оформени в увод, три глави, заключителни бележки, допълнение (съдържащо доказани помощни твърдения) и цитирана литература, включваща 55 заглавия. Написан е на английски език.

Изложението и цитираните литературни източници ми дават основание да считам, че авторът много добре познава състоянието на проблемите, предмет на дисертационния труд. Позоваването на резултати, получени от други автори, е изчерпателно и коректно.

Съдържанието на отделните глави е както следва:

В първа глава се изучават проксимално регулярни множества в Хилбертово пространство, като са дадени две техни характеристики (Теорема 1.1.1). Въпросните характеристики са известни, но в дисертационния труд са получени по нов начин. Използваният в тази глава метод е в основата на получените във втора глава резултати.

Във втора глава на дисертационния труд се изучава връзката между един клас от функции, обобщение на изпъкналите, и техните надграфики. Класът функции, наричани „равномерно епи регулярни отдолу (с параметър  $\rho > 0$ )“ е въведен в Дефиниция 2.1.2. В следващата Дефиниция 2.1.3 се въвежда понятието „равномерно епи проксимално регулярно (с параметър  $r > 0$ )“ за множество, което е надграфика на собствена полунепрекъсната отдолу функция. Доказва се, че така въведените две понятия са свързани както изпъкналите функции и техните надграфики: надграфиката на равномерно епи регулярна отдолу с параметър  $\rho > 0$  функция е равномерно епи проксимално регулярно с параметър  $r = \rho$  множество (Теорема 2.2.1) и ако надграфиката на собствена полунепрекъсната отдолу функция е равномерно епи проксимално регулярно с параметър  $r > 0$  множество, то въпросната функция е равномерно епи регулярна отдолу с параметър  $\rho = r/\sqrt{2}$  (Теорема 2.2.2). Доказани са две характеристики на равномерно епи проксимално регулярните множества (Теорема 2.3.2). В теорема 2.4.1 е получена характеристика на равномерно епи регулярна отдолу функция чрез геометрично свойство на нейната надграфика.

Трета глава на дисертацията е посветена на ново доказателство на известен резултат на Moreau и Rockafellar за интегруемост на субдиференциала на собствени полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции, дефинирани в банахово пространство. Въпросната теорема гласи, че ако субдиференциалът на  $g$  съдържа субдиференциала на  $f$ , то  $f$  и  $g$  се различават с константа. За нейното доказателство се използва „многостъпкова формула за крайните нараствания“ за собствена полунепрекъсната отдолу изпъкнала функция, която дължим на R. T. Rockafellar. Оригиналността на предложеното в дисертационния труд доказателство се състои в намирането на „възлите“ на „многостъпковата формула за крайните нараствания“. Те са получени чрез предложен в дисертацията метод за минимизиране на собствена полунепрекъсната отдолу изпъкнала функция, която си достига минимума в цялото пространство.

Авторефератът е на български език, с обем от 28 страници, включително 55 заглавия цитирана литература и отразява изчерпателно резултатите, описани в дисертацията.

Ще отбележа и някои пропуски в изложението.

1. Не е добре в математически текст да се споменава понятие или величина, което/която се въвежда впоследствие. Например във формулировката на Теорема 1.1.1 на стр. 11 се употребява терминът „равномерно проксимално регулярно множество“, а дефиницията му се появява в Дефиниция 1.1.2 на стр. 14. Също така, величината  $c(\Delta)$  се появява за първи път на стр. 20, а се дефинира на стр. 22.

2. При доказателството на случай 2 ( $\lambda = 0$ ) на Теорема 2.2.1 заключението е получено за  $(x', \alpha') \in B((x, f(x)), 2\rho) \cap \text{epi} f$ , а би трябвало да е получено за

$(x', \alpha') \in B((x, \alpha), 2\rho) \cap \text{epi}f$ .

3. Във формулировката на Лема 3.2.1 се твърди, че функцията  $\varphi_{x_0}(\cdot)$  е строго монотонно растяща в интервала  $(0, \infty)$  и този факт се използва в доказателството на Твърдение А.1.11 от допълнението. Функцията  $\varphi_{x_0}(\cdot)$  не е строго монотонно растяща в целия интервал  $(0, \infty)$ , но това няма значение, Твърдение А.1.11 остава вярно.

Резултатите от представения дисертационен труд са публикувани в 3 статии, от които:

- две, в съавторство с научния ръководител, в Journal of convex analysis (съответно през 2022 г. и приета за публикуване през 2023 г.), IF 0.622;
- една, в съавторство с научния ръководител, в Journal of applied analysis (приета за публикуване през 2023 г.), SJR 0.212;

Изброеното дотук ми дава основание да препоръчам на Почитаемото Научно жури да присъди на Матей Боянов Константинов образователната и научна степен Доктор“ в професионално направление 4.5 Математика, докторска програма „Изследване на операциите“.

31-ви май 2023 г.  
гр. София

проф. д-р Цветомир Цачев