СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ “СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Александра Андреева Соскова

ЕФЕКТИВНА ТЕОРИЯ НА МОДЕЛИТЕ: СКОК НА СТРУКТУРА, КОДИРАНЕ И ДЕКОДИРАНЕ

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация
за научната степен ДОКТОР НА НАУКИТЕ

4.5. МАТЕМАТИКА
(МАТЕМАТИЧЕСКА ЛОГИКА)

С О Ф И Я
2 0 2 0

Дисертационният труд е обсъден и насрочен за защита на 10.12.2020 г. на разширено заседание на катедра Математическа логика и приложенията ѝ на Факултета по математика и информатика (ФМИ) на Софийския университет "Св. Климент Охридски" с разширение в състав: проф. дмн Димитър Скордев, проф. дмн Димитър Вакарелов, акад. проф. дмн Веселин Дренски, проф. дмн Иван Ланджев. Разширението на катедра Математическа логика и приложенията ѝ на ФМИ е направено със заповед РД 38-562/01.12.2020 г. на Ректора на Софийския университет "Св. Климент Охридски" .

Дисертационният труд е на английски език и съдържа 270 страници, от които 16 страници библиография, включваща 162 заглавия.

Авторът работи като професор във Факултета по математика и информатика на Софийския университет "Св. Климент Охридски". Изследванията са извършени във Факултета по математика и информатика на СУ "Св. Климент Охридски", част от тях в университета Нотер Дам и университета Медисън, Уисконсин, а малка част от тях - и в университета на Лийдс.

Съдържание

Глава 1

Увод

Тази дисертация е в областта на ефективната теория на моделите и разглежда връзката между определимостта и изчислимостта в математическите структури. Ефективната теория на моделите, наричана още ефективна структурна теория, изучава взаимодействието между структурите и тяхната сложност. Тя е част от теория на изчислимостта, и в частност — от математическата логика, която се занимава с изчислимите аспекти на математическите обекти и конструкции. Ние се интересуваме от следните въпроси: Колко сложно е да представим дадена структура? Кои структури можем да представим ефективно? Каква е трудността да изчислим някои релации, представящи различни свойства на структурите? Интересуваме се по-специално от резултати, които свързват изчислимите свойства с алгебричните или комбинаторни свойства на структурите. Изобщо казано, интересуваме се от сложността на структурите. Под структури имаме предвид обекти като групи, пръстени, полета, графи или линейни наредби, които имат непразен носител, върху който са дефинрани различни релации, функции и константи.

Целта на ефективната математика е да намери степента, с която някои класически резултати от математиката са ефективно верни. В алгебрата тези изследвания, базирани на интуитивното понятие за ефективност, датират от Ван дер Варден, който в 1930 година в книгата си *„Модерна алгебра“* дефинира явно зададено поле, като поле, на което елементите са еднозначно представени с различаващи се символи, с които можем алгоритмично да осъществим операциите, т.е. в съвременните термини е зададено изчислимо поле. В своята основополагаща статия [vdW30] върху неразложимост на полиноми, Ван дер Варден на практика доказва, че не е задължително едно изчислимо поле $(F;+,\cdot)$ да има алгоритъм за разлагане на полиномите $F[x]$ на неразложими множители. Работите на Гьодел, Клини, Марков, Пост, Тюринг и др. — дават строгите математически основи на теория на изчислимостта. Следващото десетилетие един известен проблем — “the word problem” е разрешен. Новиков

[Nov55] и Буун [Boo59] независимо показват, че съществува крайно представима група, за която този проблем не е разрешим. В 1956 г. Фрьолих и Шефердсън [FS56] използват формалното понятие за изчислима функция, за да получат редица резултати за пръстени и полета. Рабин [Rab60] и Малцев [Mal61, Mal62] изучават по-интензивно изчислими групи и други изчислими (наричани още рекурсивни и конструктивни) алгебрични структури. Друг впечатляващ резултат, който използва връзката между теория на числата и изчислимостта, е известният Десети проблем на Хилберт, разрешен негативно в крайна сметка от Матиясевич [Mat70] през 1970 г. Използвайки резултатите на Дейвис, Пътнам и Дж. Робинсън (виж [Mat93]), той показва, че няма ефективна процедура, която разрешава дали дадено диофантово уравнение има решение в цели числа. Метакидес и Нероуд [MN77, MN79], както и много изследователи от Запад през 70-те години на миналия век инициират систематично изучаване на изчислимостта в математическите структури и конструкции, използвайки различни съвременни методи, като метод на приоритета, форсинг метода и други кодиращи техники. В същото време, независимо, ефективната теория на моделите се развива и в Сибирската и Московската школа по конструктивна математика. В последните десетилетия нараства интересът към ефективната структурна теория и връзките с алгебрата, анализа, топологията, компютърната наука и др. Основни източници по темата са книгите [AK00] и [Mon].

В нашата работа основната цел е да се намерят и развиват методи за оценяването на сложността на една структура. Така ние свързваме с всяка структура едно множество от Тюрингови степени, които описват и дават мярка на структурата и това множество е спектърът на структурата. Тъй като теория на изчислимостта основно се развива в множества от конструктивни обекти като естествените числа, разглеждаме структури с изброим носител, чиито елементи можем да номерираме с естествени числа. Ако е дадена структурата $\mathcal{A}$, представяне (копие) на $\mathcal{A}$ е изоморфна (хомоморфна) структура на $\mathcal{A}$ с носител или множеството на естествените числа $\mathbb{N}$, или начален сегмент на $\mathbb{N}$. *Спектърът* $DS(\mathcal{A})$ на $\mathcal{A}$ е множеството от Тюринговите степени на атомарните диаграми на всички представяния на структурата $\mathcal{A}$ — понятие, въведено от Рихтер [Ric81] и изследвано от Найт [Kni86] и много други.

Нека J е множеството от Тюринговите скокове на елементите на спектъра на структурата $\mathcal{A}$. Естествен въпрос е има ли структура $\mathcal{A}'$ със спектър J. Така достигаме до понятието скок на структура. То е аналог на Тюринговия скок. Може да сравняваме сложността на структурите, използвайки сводимост по Мучник. Една структура $\mathcal{A}$ е сводима по Мучник до структурата $\mathcal{B}$, ($\mathcal{A} \leq_w \mathcal{B}$), ако $DS(\mathcal{B}) \subseteq DS(\mathcal{A})$, т.е. тъй като спектърът е затворен нагоре, всяко представяне $\mathcal{B}$ изчислява представяне на $\mathcal{A}$. Така за скока $\mathcal{A}'$ на структурата $\mathcal{A}$ винаги имаме $\mathcal{A} <_w \mathcal{A}'$. Скокът $\mathcal{A}'$ на $\mathcal{A}$ има по-голяма изчислителна мощност от $\mathcal{A}$. Определимите с безкрайни изчислими Σ_2^c формули релации в $\mathcal{A}$ са точно Σ_1^c определимите в $\mathcal{A}'$. Тъй като скокът на структура е аналог на Тюринговия скок в структурата на Тюринговите степени $\mathcal{D}_T$, един естествен въпрос е дали са в сила някои теореми за обръщане на скока, например като тази на Фридберг [Fri57].

В **Глава 2.** на нашата работа въвеждаме основните понятия, методи и факти, от които се нуждаем за изложението. Започваме с частично-рекурсивни функции, рекурсивно номеруеми (р.н.) множества и структурата на Тюринговите степени. Показваме някои основни свойства на Тюринговта сводимост и Тюринговия скок. Един от важните методи, използвани в ефективната структурна теория, е методът на форсинга, въведен от Коен. Ние прилагаме този метод и представяме стандартната конструкция на 1-генерично множество. Доказваме някои основни свойства на 1-генеричните множества и теоремата на Фридберг [Fri57] за обръщане на скока. Последната теорема обобщаваме в Глава 3. за структури, използвайки форсинг метода.

След това разглеждаме понятието и свойствата на номерационната сводимост. Номерационната сводимост улавя естествената връзка между множества от естествени числа, в която позитивната информация на едно множество се използва за да се получи позитивна информация за друго множество. Структурата на номерационнте степени е разширение на Тюринговите степени. Показваме някои свойства на понятието строго минимално покритие и релативизиран вариант на 1-генеричност за номерационните степени, които разглеждаме в Глава 7.

Най-използваната мярка за изчислителна сложност на структура е, както споменахме, спектърът на структурата. Ние представяме основни свойства на понятието спектър, както и разширено понятие – номерационен спектър, въведено от Сосков [Sos04]. Представени са и някои примери на спектри, които използваме в Глава 3.

Друг начин да се характеризира сложността на една структура е да се анализират определимите в нея релации. Това дава по-фина мярка, тъй като може да се случи две структури да имат еднакъв спектър, но те да се различават по това, кои релации може да се определят в тях и по моделно-теоретичните си свойства. Представяме нормална форма на релативно вътрешни (relatively intrinsically) Σ_α^0 релации за даден изчислим ординал α в дадена изброима структура (такива, които както и да номерираме структурата, образите им винаги са Σ_α^0 в диаграмата на номерираната структура), с помощта на изчислими безкрайни Σ_α^c формули.

В **Глава 3.** отговаряме на следните въпроси:

(1) Как да дефинираме скока на структура като аналог на Тюринговия скок в структурата $\mathcal{D}_T$ на Тюринговите степени? Има ли типични структурни свойства, такива като теореми за обръщане на скока?

> Дали множеството от всички скокове на елементите на спектъра е също спектър на структура?

Идеята за *скок на структура* е разгледана за първи път от Сосков и неговата докторантка Балева [Bal06] в контекста на s-сводимост между структури — сводимост, базирана на релативна изчислимост чрез търсене на Московакис [Mos69]. Ние [SS07, SS09a] дефинираме скока $\mathcal{A}'$ на структурата $\mathcal{A}$, разглеждайки Московакисовото разширение на $\mathcal{A}$, заедно с един нов предикат, аналог на множеството на Клини, който кодира всички множества, определими с изчислими безкрайни Σ_1^c формули с параметри. Това променя носителя на структурата, но остава езикът краен, ако първоначално е бил такъв. По-късно Монталбан, независимо, дава друга дефиниция на скок на структура. Неговият подход [Mon09, Mon12, HM12] е да запази същия носител, но да добави едно пълно множество от релации, определими с изчислими Π_1^c формули. В своята книга [Mon12, Mon] той променя своето пълно множество от релации с тези, които са определими с изчислими безкрайни Σ_1^c формули и получава еквивалентно на нашето понятие. Морозов [Mor04] и по-късно Пузаренко [Puz09] също определят скок за допустими структури. Стукачев [Stu09, Stu10] разширява тяхната дефиниция за всяка структура в термините на Σ-определимост в наследствено-крайни разширения на структурата. Вътев [Vat13, Vat14, Vat15] разширява нашето понятие скок на структура до α-ти скок на структура, за произволен изчислим ординал α.

Ние доказваме теорема за обръщане на скока, аналог на класическата теорема на Фридберг за обръщане на скока [Fri57]. Представяме релативизиран вариант за всички структури. По-точно казано, ако $\mathcal{A} \geq_w \mathcal{B}'$, то съществува структура $\mathcal{C} \geq_w \mathcal{B}$, такава че $\mathcal{A} \equiv_w \mathcal{C}'$. В доказателството използваме метод на Маркерови разширения. Всъщност нашето доказателство [Sos07, SS07, SS09a] е в термините на спектри, т.е. ако $DS(\mathcal{A}) \subseteq DS(\mathcal{B}')$, то има структура $\mathcal{C}$ със свойствата $DS_1(\mathcal{C}) = DS(\mathcal{A})$ и $DS(\mathcal{C}) \subseteq DS(\mathcal{B})$. Подобен вариант на теорема за обръщане на скока по-късно доказва Стукачев [Stu09, Stu10] за понятието Σ-еквивалентност в наследствено крайни разширения на структурите.

Друг начин да формулираме обръщане на скока е следният: за всяка структура $\mathcal{A}$, ако $Y \subseteq \mathbb{N}$ изчислява копие на скока $\mathcal{A}'$, тогава има $X \subseteq \mathbb{N}$, такова че $X' \equiv_T Y$ и X изчислява копие на $\mathcal{A}$. Монталбан [Mon09, Mon12, Mon] нарича това твърдение Втора теорема за обръщане на скока. С други думи, скок спектърът на $\mathcal{A}$ е спектърът на $\mathcal{A}'$, т.е. $DS_1(\mathcal{A}) = DS(\mathcal{A}')$. Ние доказваме този резултат със Сосков [SS07, SS09a] и независимо, по-късно Монталбан [Mon09]. Това обръщане на скока, но за произволен изчислим ординал наследник се появява в скрита форма в [GHK+05]. Те доказват този резултат само като средство за да построят структура, която е Δ_α-категорична, не е релативно категорична, без да споменават скок на структура. Използвайки тяхната идея, Вътев [Vat13, Vat14, Vat15] разширява обръщането на скока за произволен изчислим ординал наследник α и доказва редица свойства на определимите в α-скока множества. Сосков [Sos13] дава пример на структура, при която не е в сила теорема за обръщане на α-скока за граничен ординал α. Представяме също някои приложения на теоремата за обръщане на скока, които показват, че това е един общ метод за пренасяне резултати от $n = 1$ до произволно $n \in \mathbb{N}$.

Глава 4. Има по-прецизно понятие за обръщане на скока. Една структура $\mathcal{A}$ допуска *строго обръщане на скока*, ако всеки път когато X' изчислява копие на $\mathcal{A}'$, то и X изчислява копие на $\mathcal{A}$. Резултат на Дауни и Джокуш [DJ94] показва, че всяка булева алгебра допуска строго обръщане на скока. Лерман и Шмерл [LS79] доказват, че за всяка $\aleph_0$-категорична теория T, ако $T \cap \Sigma_2$ е р.н., то всеки модел на T допуска строго обръщане на скока. Някои структури с една релация на еквивалентност и някои абелеви p-групи допускат строго обръщане на скока. Наскоро Маркер и Р. Милър [MM17] доказаха, че всеки изброим модел на диференциално затворените полета с характеристика 0 (DCF_0) допускат строго обръщане на скока.

Не всички структури допускат строго обръщане на скока. Джокуш и Соар [JS91] показват, че има ниски линейни наредби (със скок под $\mathbf{0}'$) без изчислими копия и следователно те не допускат строго обръщане на скока. Ние търсим моделно-теоретични условия, достатъчни за да може една структура да допуска строго обръщане на скока. В Глава 4. даваме отговор на следния въпрос:

(2) Има ли теоретико-моделни условия, при които една структура допуска строго обръщане на скока?

Заедно с Калверт, Фролов, и др., [CFH⁺18], показваме един общ резултат, който гарантира строго обръщане на скока на една структура $\mathcal{A}$, изразен в термините на наситеност на структурата, номерационни свойства на множеството от типовете с формули с ниска аритметична сложност, като изчислима номерация R на B_1-типовете (съставени от формули, булеви комбинации на екзистенциални формули), ефективно попълване на типовете и R-етикетиране на $\mathcal{A}$. Когато структурата $\mathcal{A}$ допуска строго обръщане на скока и $\mathcal{A}$ е ниска релативно оракул X, ние също разглеждаме сложността на изоморфизма между $\mathcal{A}$ и нейното X-изчислимо копие.

Нашият общ резултат се прилага за структури от някои познати класове, включително и някои класове на линейни наредби и дървета. Въпреки че не получаваме пълния резултат на Дауни и Джокуш за произволни булеви алгебри, прилагаме нашите условия за булеви алгебри без 1-атоми, с допълнителна информация за сложността на изоморфизма.

Такъв изоморфизъм построяваме със сложност Δ^0_3 релативно X. Това е интересно, тъй като Найт и Стоб през 2000 г. доказват, че всяка ниска булева алгебра има изчислимо копие и съответният изоморфизъм е Δ^0_4, и това е най-доброто, което може да се направи, т.е. има пример за ниска булева алгебра, за която няма изоморфизъм с по-малка сложност. Прилагаме нашите общи условия над модели на елементарни теории T от първи ред, такива че $T \cap \Sigma_2$ е рекурсивно номеруемо и и за всяка редица от променливи $\overline{x}$, има само краен брой B_1-типове с променливи $\overline{x}$, съвместими с T. Нашият общ резултат включва резултата на Маркер и Р. Милър, като там голямата трудност е да се номерират ефективно пълните типове на структурата. Като следствие получаваме, че единственият с точност до изоморфизъм наситен модел на DCF_0 има изчислимо копие.

Глава 5. В много клонове на математиката има изследвания, класифициращи колекция от обекти с точност до изоморфизъм или до важна еквивалентност, в термините на добри инварианти. Например в дескриптивната теория на множествата се използва понятието „Борелово влагане“, въведено от Фридман и Стенли [FS89], за да се сравнят класификационните въпроси на различни класове от структури (полета, графи, групи и др.). Борелово влагане на един клас структури $\mathcal{K}$ в друг клас $\mathcal{K}'$ е Борелова функция от $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$, която запазва изоморфизма. Има някои познати примери на класове от структури $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ с Тюрингово изчислимо влагане Θ от $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$. Тюринговият оператор Θ преобразува структури от $\mathcal{K}$ в структури от $\mathcal{K}'$, така, че $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2 \iff \Theta(\mathcal{A}_1) \cong \Theta(\mathcal{A}_2)$. Ако $\mathcal{B} = \Theta(\mathcal{A})$, то $\mathcal{A}$ е кодирана в $\mathcal{B}$. Ефективното декодиране се дава със сводимост по Медведев ($\leq_s$), която е равномерен вариант на Мучниковата сводимост. $\mathcal{A} \leq_s \mathcal{B}$, ако има Тюрингов оператор Φ, който копията на $\mathcal{B}$ преобразува в копия на $\mathcal{A}$. Има и по-прецизно декодиране, запазващо изоморфните структури, въведено от Монталбан [Mon14, Mon] — *ефективна интерпретация*, използваща изчислими безкрайни Σ^c_1 формули. Всяка изброима структура може да се интерпретира ефективно в граф. Относно Бореловото влагане и неговия ефективен вариант — Тюрингово изчислимото влагане, класът на линейните наредби е максимално сложен, точно както класът на графите. Естествен въпрос тук е дали за произволен граф G има линейна наредба L, такава че всяко копие на G изчислява копие на L, и дали G може ефективно да се интерпретира в L. Един клас $\mathcal{K}$ е „на върха на Тюринговото изчислимо влагане“, ако всеки друг клас от структури Тюрингово изчислимо се влага в $\mathcal{K}$. Класът на нилпотентните групи от клас 2 е на върха и на Бореловото и на Тюрингово изчислимото влагане. Малцев [Mal60] дава изчислима дефиниция на полета, дори на пръстени в този клас, използвайки параметри. Въпросът е дали класът на полетата ефективно се интерпретира в класа на нилпотентните групи от клас 2 без параметри. И следователно дали класът на нилпотентните групи от клас 2 е също на върха.

В Глава 5. даваме отговор на следния въпрос.

(3) За известните ефективни кодирания на един клас от структури в друг има ли ефективно или по-сложно декодиране за специални класове (като линейните наредби и нилпотентните групи от клас 2), които са на върха на Тюрингово изчислимите влагания?

Исторически Фридман и Стенли първи дефинират Бореловото влагане [FS89]. Ефективната версия — Тюрингово изчислимото влагане, е въведено от Найт и нейни студенти [CCKM04, KMVB07]. Р. Милър предлага понятие за декодиране в термините на изчислим функтор — двойка Тюрингови оператори, като първият дава Медведевата сводимост, а вторият — запазването на изоморфизма между копията. Харисън-Трейнър, Мелников, Р. Милър и Монталбан [HTMMM17] показват, тези две понятия за декодиране/ефективна интерпретация съвпадат. Харисън-Трейнър, Р. Милър и Монталбан [HTMM18] показват подобен резултат за Борелов функтор и интерпретация с безкрайни $L_{\omega_1,\omega}$ формули.

С Найт и Вътев [KAV19] даваме примери за графи, които не са сводими по Медведев в никоя линейна наредба, дори и в скока на линейна наредба. Но показваме, че всеки граф може да се кодира във втория скок на линейна наредба, т.е. имаме сводимост по Медведев. За известното Тюрингово изчислимо влагане на графи в линейни наредби на Фридман и Стенли [FS89], показваме, че няма равномерно ефектвно декодиране (ефективна интерпретация) дори няма и интерпретация с $L_{\omega_1\omega}$ формули. Хипотезата ни е, че няма равномерно ефективно кодиране на графи в линейни наредби с ефективно декодиране, дори няма декодиране с $L_{\omega_1\omega}$ формули. В подкрепа на това Монталбан и Харисън-Трейнър [HT] независимо, със съвсем друга конструкция, съвсем наскоро доказват, че за влагането на Фридман и Стенли няма равномерно декодиране.

Вторият ни резултат е позитивен. Заедно в Алвир, Калверт и др. [ACG+20], разглеждаме ефективна равномерна интерпретация на полета в нилпотентните групи от клас 2. Подобряваме резултата на Малцев. За полето F означаваме с $H(F)$ Хайзенберговата група над F. Малцев [Mal60] доказва, че има копие на F, дефинирано в $H(F)$, използвайки екзистенциални формули и произволна некомутираща двойка (u, v) като параметри. Показваме, че F ефективно се интерпретира в $H(F)$ с помощта на Σ_1 формули без параметри. Ние представяме две доказателства. При първото построяваме изчислим функтор, използвайки резултата на Харисън-Трейнър и др. [HTMMM17]. Това доказателство позволява елементите на F да се представят с крайни редици от елементи в $H(F)$, но без фиксирана дължина. Второто доказателство е директно, намираме явни крайни екзистенциални формули, които дефинират интерпретацията, като елементите на F са представени с тройки в $H(F)$. Като проследяваме, какво сме използвали за да стигнем до интерпретация без параметри на F в $H(F)$, показваме общи условия, достатъчни да елиминираме параметрите в интерпретацията.

За едно алгебрично затворено поле C с характеристика 0, нека $SL_2(C)$ е специалната линейна група матрици 2×2 над C с детерминанта 1. Разбира се, $SL_2(C)$ се дефинира в C без параметри. С Алвир, Найт и Р. Милър [AKMS] дефинираме интерпретация на C в $SL_2(C)$, използвайки крайни екзистенциални формули с два параметъра. Има един стар резултат на Пойзат [Poi01], който дава равномерна определимост на копие на C в $SL_2(C)$ с елементарни формули от първи ред без параметри. Използвайки го, получаваме не непременно *ефективна* интерпретация, но такава, която се дефинира с елементарни формули от първи ред. Не ни е известна сложността на тези формули.

Глава 6. Интересуваме се също от ефективни варианти на някои моделно теоретични популярни конструкции, като ултрапроизведения и ултрастепени. Кохесивните степени на изчислими структури, въведени от Димитров [Dim09], може да се приемат като ефективни ултрастепени над ефективно-неразделими множества, наричани кохесивни, където кохесивните множества играят ролята на ултрафилтри. Възможно е една изчислима структура да има копия, които не са изчислими. Например, линейната наредба на естествените числа има представяне, в което релацията непосредствен наследник не е изчислима. Тук въпросът е: за две изоморфни структури, дали техните кохесивни степени са елементарно еквивалентни? И по-специално, дали за всеки две копия на изчислима линейна наредба, техните кохесивни степени са линейни наредби от един и същи тип?

В Глава 6. отговаряме на следния въпрос.

(4) Дали на всеки две копия на една изчислима наредба кохесивните степени са наредби от един и същи тип?

Пръв Скулем конструира изброим нестандартен модел на аритметиката, използвайки подобна конструкция. Различни изброими нестандартни модели на фрагменти на аритметиката са били изучени по-късно от Феферман, Скот, Хиршфелд, Вийлър, Лерман, Маклаухин и др. (виж [FST59]). Ефективна версия на кохесивните степени на изчислими структури, базирани на частично-рекурсивни функции, се разглеждат от Димитров [Dim09], във връзка с изучаването на автоморфизмите на решетката $\mathcal{L}^*(V_\infty)$ на ефективно векторно пространство.

С Димитров, Харизанов, Морозов, Шефер и Вътев [DHM+19, DHM+20] разглеждаме някои свойства на кохесивните степени на линейни наредби. Ние показваме, че ако $\mathcal{A}$ е изчислима структура, която е ултрахомогенна по равномерен, изчислим начин, то $\mathcal{A}$ е изоморфна на кохесивната си степен. Изследваме типа на изоморфизъм на кохесивните степени на някои известни изчислими линейни наредби $\mathcal{L}$. От резултатите в [Dim09] следва, че кохесивната степен на линейна наредба е линейна наредба. Ако $\mathcal{L}$ е изчислимо копие на ω, което е изчислимо изоморфно на стандартното представяне на ω, тогава кохесивната степен на $\mathcal{L}$ е наредба от тип $\omega + \zeta\eta$ (тук ζ е типът на целите числа, η е типът на рационалните числа). Има изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω, което не е изчислимо изоморфно на стандартното представяне на ω, но всяка кохесивна степен на $\mathcal{L}$ е от тип $\omega + \zeta\eta$. Но има разбира се изчислими копия на ω, които не са изчислимо изморфни на ω, с кохесивни степени и с тип наредба $\omega + \eta$, т.е. не елементарно еквивалентни на $\omega + \zeta\eta$. Нашият основен резултат тук е: ако $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ е Σ^0_2 множество или Π^0_2 множество, разглеждано като множество от типове крайни наредби, то има изчислимо копие на ω с кохесивна степен от тип наредба $\omega + \sigma(X \cup \{\omega + \zeta\eta + \omega^*\})$, където $\sigma(X \cup \{\omega + \zeta\eta + \omega^*\})$ означава разбъркана сума (the shuffle sum) на типовете наредби в X и типа наредба $\omega + \zeta\eta + \omega^*$. Освен това, ако X е крайно непразно множество, то има изчислимо копие на ω с кохесивна степен от тип наредба $\omega + \sigma(X)$.

Глава 7. Номерационната сводимост, въведена от Фридберг и Роджърс [FR59], е позитивна сводимост. Структурата на Тюринговите степени $\mathcal{D}_T$, се влага собствено в структурата на номерационните $\mathcal{D}_e$ и формира база за автоморфизъм за $\mathcal{D}_e$. Образите на Тюринговите степени са тоталните степени. Има редица случаи, в които $\mathcal{D}_e$ е по-удобна за анализиране на сложността на обектите, изучавани в ефективната математика. Един от първите примери на този феномен е даден от Рихтер [Ric81], която доказва, че не всяка линейна наредба има Тюрингова степен — най-малък елемент на спектъра ѝ. Всъщност, единствените изброими линейни наредби с Тюрингова степен са тези с изчислими представяния. В търсене на отговор на подобен въпрос, — „Дали всяка непрекъсната функция в единичен интервал има име от най-малка Тюрингова степен?“ — Дж. Милър [Mil04] въвежда непрекъснатите степени, за да измери сложността на непрекъснатите функции, и по-общо на точки на изчислими метрични пространства. Той доказва, че Тюринговите степени собствено се влагат в непрекъснатите, и от своя страна непрекъснатите степени собствено се влагат в номерационните. Наскоро беше показано, че тоталните степени са определими в структурата $\mathcal{D}_e$ [CGL+16]. Ние се интересуваме дали има други подструктури на $\mathcal{D}_e$ с интересни свойства.

В Глава 7. отговаряме на следния въпрос.

(5) Има ли подструктури с интересни свойства в степенната структура $\mathcal{D}_e$ на номерационните степени, различни от тоталните и непрекъснатите степени?

С Андрюс, Ганчев и др. [AGK+19] изследваме подструктура на номерационните степени: кототалните степени. Едно множество $A \subseteq \mathbb{N}$ е *кототално*, ако то е номерационно сводимо към допълнението си — $\overline{A}$.

Скипът на A е равномерна горна граница на допълненията на всички множества, номерационно сводими към A. Те са силно свързани: A има кототална степен, ако и само ако е номерационно сводима към скипа си. Изучаваме кототалността и съответни свойства, използвайки скип оператора като средство в изследванията. Даваме много примери от класове от номерационни степени, които или гарантират, или възпрепятстват кототалността. Нашите изследвания на кототалността са мотивирани от два примера на кототални множества, които научихме от Жандел [Jea15]. Той показва, че множеството от нееднинчните думи в крайно породена проста група е кототално. Жандел също дава пример от символната динамика. Множеството от думи, които са в един минимален подшифт (subshift), е кототално.

Допълнението на графиката на тотална функция е кототално множество и степените, които съдържат такова множество, наричаме граф-кототални. Една номерационна степен е слабо-кототална, ако съдържа множество A такова, че $\overline{A}$ има тотална номерационна степен. Имаме:

$$\text{граф-кототални} \implies \text{кототални} \implies \text{слабо кототални.}$$

Ние показваме, че тези три свойства са различни. Най-трудното разграничаване е да се построи кототална степен, която не е граф-кототална, където използваме метод на приоритета с безкрайни нарушения, с $\mathbf{0}'''$ приоритетна конструкция над $\mathbf{0}'$.

Показваме, че всяко Σ^0_2-множество е кототално, даже граф-кототално. Показваме също, че допълнението на максимално независимо множество на един изчислим граф е кототално и всяка кототална степен съдържа допълнение на максимално независимо подмножество на $\omega^{<\omega}$. Итън Маккарти [McC18] доказва, че същото е вярно за допълнения на антивериги в $\omega^{<\omega}$. Показваме, че джойн (join) на нетривиална K-двойка е кототално множество и че естественото влагане на непрекъснатите степени, въведено от Дж. Милър [Mil04], в номерационните степени ги изобразява в кототални степени. Да отбележим, че Харис [Har10] доказва, че множествата с добри апроксимации имат кототални степени. Съвсем наскоро Дж. Милър и М. Соскова доказаха, че кототалните степени са точно степените на множества с добри апроксимации, и че кототалните номерационни степени са гъсти.

В известен смисъл, скип операторът е аналог на скок оператора в Тюринговите степени. Например, стандартна диагонализация показва, че $A^\Diamond \nleq_{\mathrm{e}} A$. Освен това $A \leq_{\mathrm{e}} B$ точно тогава, когато $A^\Diamond \leq_1 B^\Diamond$, подобно на Тюринговия скок. Ние доказваме теорема за обръщане на скока, аналог на Фридберговата теорема за обръщане на скока. Голямата разлика между скип оператора и Тюринговия скок е, че невинаги е изпълнено $A \leq_{\mathrm{e}} A^\Diamond$ (тъй като не всички номерационни степени са кототални). Всъщност, има множество, което е своя собствен скип. Разглеждаме свойствата на скип оператора за класа на номерационните степени на 1-генеричните множества и скип на нетривиални K-двойки.

Има няколко отворени въпроса, които се появиха при тези изследвания. Основният въпрос е: кои понятия за кототалност са определими с формули от първи ред в структурата на номерационните степени. Дали скип операторът е определим? Калимулин [Kal03] показва, че номерационният скок е определим с формула от първи ред. Да отбележим, че ако скипът е определим, то опеределими са и кототалните номерационни степени. Друг отворен проблем е: има ли непрекъснати номерационни степени, които не са граф-кототални?

Отговорите на въпросите (1) — (5) са оригиналните приноси на този труд. Те са изложени в [Sos07, SS07, SS09a, SS09b, CFH+18, KAV19, ACG+20, DHM+19, DHM+20, AGK+19], като 8 са публикувани, а [ACG+20, DHM+20] са предадени за публикация. Статиите с общ импакт фактор (IF = 3,303) са: [AGK+19] в *Transactions of the American Mathematical Society*, [KAV19] в *Journal of Symbolic Logic*, [SS09a, CFH+18] в *Journal of Logic and Computation*. С общ SJR (0,720) в *Lecture Notes in Computer Science* са [Sos07, DHM+19] и в Proceedings of the Panhellenic Logic Symposium са [SS07, SS09b]. Във всички съвместни статии приносът на авторите е еднакъв. Авторът има 78 цитирания (без автоцитирания), от тях по темата на дисертацията са 48, (29 с IF или SJR, 9 в монографии (WOS), 2 в дисертации, 2 без IF или SJR и 6 не са публикувани още).

Искам да изкажа моите благодарности на всички мои колеги от катедрата Математическа логика и приложенията ѝ на ФМИ. Специално на моя учител Димитър Скордев, от когото научих кое е ценното в математиката. Благодарна съм на Иван Сосков, Ангел Дичев, Стела Николова, Тинко Тинчев, Любомир Иванов и Димитър Вакарелов за ценните логически дискусии и преживявания през целия ми живот. Искам да благодаря на моите по-млади колеги Мария Соскова и Христо Ганчев за прекрасната математика, която правят, и на моя студент Стефан Вътев, който винаги е отворен за дискусии. Благодарна съм на всички мои съавтори, както и на моите съредактори и приятели Бари Купър и Андреа Сорби. Благодарна съм на Тед Слеман, Антонио Монталбан, Анди Луис, Искандър Калимулин и Катя Фокина, от които научих много. Накрая благодарности на моите приятели Симеон Замковой, Гергана Енева, Надя Златева и Евгения Великова за цялостната им подкрепа.

Глава 2

Въведение

Номерацията на дефинициите, твърденията, теоремите и др. са от дисертацията.

2.1 Тюрингова сводимост

Понятието Тюрингова сводимост е въведено от Тюринг [Tur37, Tur39]. Тюринг иска формално да обясни идеята на интуитивното понятие алгоритмично-изчислима функция, като функция, която можем да изчислим с математическа абстрактна машина — машина на Тюринг. На съвременен език може да си мислим, че една функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е *частично-рекурсивна*, ако има компютърна програма, която при вход n или завършва и дава на изход $f(n)$, или не завършва, ако f не е дефинирана за n. Една частично рекурсивна функция f е *изчислима (рекурсивна)*, ако тя е дефинирана при всеки вход, т.е. f е тотална. Едно множество $A \subseteq \mathbb{N}$ е рекурсивно номеруемо (р.н.), ако A е дефиниционна област на някоя частично-рекурсивна функция.

В 1939 г. Тюринг разширява модела си на изчислимост с машина на Тюринг, която позволява въпроси към оракул, т.е. на машината на Тюринг е позволено да използва функция g като примитивна функция по време на изчислението. Програмата може да задава въпроси за стойността на $g(n)$ за различни n и може да използва отговорите за изчислението по време на изпълнението си. Функцията g се нарича оракул за това изчисление. За функцията $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинираме φ_e^g да бъде функцията, която се изчислява с e-тата машина на Тюринг, използвайки като оракул функцията g. Предполагаме, че по време на изчислението, ако оракулът g е извикан с аргумент извън домейна си, изчислението е неуспешно. За $B \subseteq \mathbb{N}$ дефинираме φ_e^B — функцията, изчислима с e-тата машина на Тюринг с оракул B, тук имаме предвид $\varphi_e^{\chi_B}$, където χ_B е характеристичната функция на B.

Дефиниция 2.1.1. Казваме, че частичната функция f е *Тюрингово* *сводима към* частичната функция g (означаваме $f \leq_T g$), ако $f = \varphi_e^g$ за някое e. Едно множество от естествени числа A е *изчислимо от, или Тюрингово сводимо към* множеството B (означаваме $A \leq_T B$), ако и само ако характеристичната функция на A е φ_e^B за някое e.

Релацията $\leq_T$ е преднаредба в подмножествата на естествените числа и определя релация на еквивалентност: $A \equiv_T B$, ако и само, ако $A \leq_T B$ и $B \leq_T A$. Класът на еквивалентност на множеството A е Тюринговата степен на A, означаваме, с $d_T(A)$. Тюринговите степени са наредени с релацията $d_T(A) \leq d_T(B)$ тогава и само тогава, когато $A \leq_T B$. Точната горна граница на две степени $d_T(A) \vee d_T(B)$ е $d_T(A \oplus B)$, където $A \oplus B = \{2n \mid n \in A\} \cup \{2n+1 \mid n \in B\}$ е непресичащо се обединение (the disjoint union) на A и B, наричано *джойн* на A и B. Множеството $\mathbf{0}$ от всички изчислими множества е най-малката степен. Накрая, релативизирайки стоп-проблема (множеството на Клини) $K = \{e \mid \varphi_e(e)\downarrow\}$, до произволно множество A, имаме $K^A = \{e \mid \varphi_e^A(e)\downarrow\}$, означаваме с A'. Множеството K^A наричаме *скок* A' на A и то поражда в структурата на Тюринговите степени *скок операцията* която изпраща една степен $\mathbf{a}$ в степента $\mathbf{a}'$, така че $\mathbf{a} < \mathbf{a}'$.

Пост и Клини [KP54] показват основните алгебрични факти за структурата на Тюринговите степени $\mathcal{D}_T$: тя е неизброима горна полурешетка с най-малък елемент и скок операция. Те показват, че всяка частична наредба може да се вложи в Тюринговите степени. Техните последователи, включително Шьонфилд, Спектор, Сакс, Джокуш, Познер и много други, развиват по-сложни методи и показват други структурни свойства, като например съществуването на минимални елементи в структурата. Теорията на Тюринговите степени се оформя като математически нетривиална, пълна с идеи и резултати. Следващото поколение от изследователи имат вече необходимите средства и методи за изучаването на проблеми, свързани с определимост от първи ред в структурата. Един от най-забележителните резултати в тази посока е на Слеман и Шор [SS99]: те показват, че скок операцията е определима с формула от първи ред в $\mathcal{D}_T$. Техният резултат използва една методология, въведена от Слеман и Удин [SW86] за анализиране на групата от автоморфизмите на $\mathcal{D}_T$.

Всяко от следващите твърдения и свойства може да се намери в [Rog67, Soa87, Odi99, Coo04].

Една по-силна сводимост е многозначната (many-one reducibility) (m-reducibility), която дава един естествен начин за сравнение на изчислителната сила на две множества от естествени числа A и B. Множеството A е *много-сводимо* (m-сводимо) към B ($A \leq_m B$), ако има изчислима (рекурсивна) функция h със свойството $(\forall n)(n \in A \iff h(n) \in B)$, т.е. има само едно обръщение към оракула. Казваме, че A е 1-сводимо към B, $A \leq_1 B \iff A \leq_m B$, но с еднозначна изчислима функция h.

Ясно е, че ако B е изчислимо (р.н.) и $A \leq_m B$, то A също е изчислимо (р.н.). Нещо повече: A е р.н., ако и само ако $A \leq_m K$. Такива множества като K се наричат пълни за класа на р.н. множества.

Множеството A е *рекурсивно номеруемо (р.н.) в* B, ако за някое e, $A = dom(\varphi_e^B) = W_e^B$.

Лесно от дефинициите следват следните свойства:

1. $A \leq_T B \Rightarrow A$ е р.н. в B.
2. A е р.н. в B и $B \leq_T C \Rightarrow A$ е р.н. в C.

Теорема 2.1.2 (Пост)**.** $A \leq_T B \iff A$ е р.н. в B и $\overline{A}$ е р.н. в B.

Твърдение 2.1.3. Тюринговият скок $A' = K^A$ на множеството A има следните свойства:

1. K^A е р.н. в A.
2. Ако B е р.н. в A, то $B \leq_m K^A$.
3. $A <_T A'$.

Твърдение 2.1.4. $A \leq_T B \iff A' \leq_m B' \iff A' \leq_1 B'$.

Следствие 2.1.5 (Монотонност на скока)**.** $A \leq_T B \Rightarrow A' \leq_T B'$.

Дефиниция 2.1.6. $(d_T(A))' = d_T(A')$.

Тъй като $A <_T K^A$, то $d_T(A) < d_T(A')$.

Рекурсивно номеруемите множества и техните степени се появяват в много клонове на математиката. Решението на десетия проблем на Хилберт от Дейвис, Пътнам, Робинсън и Матиясевич [Mat93] главно се основава на съществуването на рекурсивно-номеруемо множество, което не е изчислимо. Фридберг и Мучник развиват един мощен метод - метод на приоритета, използван за построението на р.н. степен със специфични свойства. Ние използваме този метод в Глава 7.

Скорошен резултат на Слеман и М. Соскова [SS18] показва връзката между локалната структура $\mathcal{D}_T(\leq \mathbf{0}') = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{0}'\}$ и аритметиката от първи ред, подобна на тази, доказана от Слеман и Удин [SW05], за глобалната структура $\mathcal{D}_T$ и аритметика от втори ред.

Скок йерархията, известна също като висока/ниска(high/low) йерархия, е въведена независимо от Купър [Coo04] и Соар [Soa74]. Скок-класовете са: $H_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{0}' \ \& \ \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n+1)}\}$ от $high_n$ степени и $L_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{0}' \ \& \ \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n)}\}$ от low_n степени.

2.2 Генеричност и форсинг

В тази секция разглеждаме форсинг метода, който използваме в Глава 3. Форсинг методът е въведен от Коен, с помощта на който той доказва, че континуум хипотезата не следва от аксиомите на Цермело-Френкел за теория на множествата.

Всяко крайно изображение $\tau : [0; n-1] \longrightarrow \mathbb{N}$ наричаме *крайна част*. Означаваме с $|\tau| = n$ дължината на интервала, в който τ е дефинирана.

Дефиниция 2.2.2. Множеството G е *1-генерично*, ако за всяко р.н. множество S от крайни части:

$$(\exists \sigma \subseteq G)\underbrace{(\sigma \in S \vee (\forall \rho \supseteq \sigma)(\rho \notin S))}_{\sigma \text{ разрешава } S}.$$

Наричаме тези множества за краткост *генерични*. При n-генеричните множества разликата е, че множеството от крайни части S е Σ_n^0 не само р.н.(Σ_1^0).

Едно множество от крайни части S се нарича *гъсто в* G, ако $(\forall \sigma \subseteq G)(\exists \rho \in S)(\sigma \subseteq \rho)$. Еквивалентно, G е генерично, ако всеки път, когато S е гъсто в G, то G среща S, т.е. $(\exists \sigma \subseteq G)(\sigma \in S)$.

Ако G е генерично, то G не е р.н., и за всяко р.н. $V \subseteq \mathbb{N}$, ако $V \leq_T G$, то V е изчислимо. Единствените множества, които са р.н. във всяко генерично множество са тези, които са р.н..

Множеството G *моделира* формулата $F_e(x)$:

$$G \models F_e(x) \iff \{e\}^G(x)\downarrow \iff x \in W_e^G.$$

Крайната част σ *форсира* формулата $F_e(x)$:

$$\sigma \Vdash F_e(x) \iff \{e\}^\sigma(x)\downarrow.$$

Ние използваме тези релации в Глава 3. Ето някои свойства на релациите, следващи лесно от дефинициите.

1. $\sigma \subseteq G \,\&\, \sigma \Vdash F_e(x) \Rightarrow G \models F_e(x)$.

2. $\sigma \subseteq \rho \,\&\, \sigma \Vdash (\neg)F_e(x) \Rightarrow \rho \Vdash (\neg)F_e(x)$.

3. $G \models F_e(x) \Leftrightarrow (\exists \sigma \subseteq G)(\sigma \Vdash F_e(x))$.

Лема 2.2.5. Множеството $\{(\sigma, e, x) \mid \sigma \Vdash F_e(x)\}$ е р.н.

$G \models \neg F_e(x) \iff G \not\models F_e(x) \iff \neg\{e\}^G(x)\downarrow.$
$\sigma \Vdash \neg F_e(x) \iff (\forall \rho \supseteq \sigma)(\rho \nVdash F_e(x)).$

Теорема 2.2.6. Нека G е генерично множество. Тогава

$$G \models \neg F_e(x) \iff (\exists \sigma \subseteq G)(\sigma \Vdash \neg F_e(x)).$$

Следствие 2.2.7 (Лема за истинност)**.** Ако G е генерично, то

$$G \models (\neg)F_e(x) \iff (\exists \sigma \subseteq G)(\sigma \Vdash (\neg)F_e(x)).$$

Да забележим, че $\{(\sigma, e, x) \mid \sigma \Vdash \neg F_e(x)\} \leq_T \varnothing'$.

Следствие 2.2.8. За всяко генерично G имаме $G' \equiv_T G \oplus \varnothing'$.

В Глава 3. ние доказваме теоремата на Фридберг за обръщане на скока за структури. Ето и оригиналната теорема:

Теорема 2.2.9 (Теорема за обръщане на скока на Фридберг)**.** [Fri57]
Нека $\varnothing' \leq_T B$. Съществува генерично множество G, такова, че $G' \equiv_T B$, и следователно $B \equiv_T G' \equiv_T G \oplus \varnothing'$.

Следствие 2.2.10. Има генерично множество $G \not\equiv_T \varnothing$, такова че $G' \equiv_T \varnothing'$.

2.3 Номерационна сводимост

Номерационната сводимост е въведена от Фридберг и Роджерс [FR59] в края на 1950-те като понятие за сводимост между множества, в което се използва само позитивната информация за принадлежност към множество. Това понятие в много случаи е съвсем естествено като Тюринговата сводимост, например, в теория на групите и в ефективната теория на моделите.

Едно множество A е *номерационно сводимо към* множество B, ако има ефективен равномерен начин, зададен с *номерационен оператор*, да получим номерация на A по дадена номерация на B. Самите номерационни оператори са интересни, като те задават семантиката на безтиповото λ-смятане в графови модели, предложени от Плоткин [Plo72], в 1972 г. Интересът към номерационната сводимост също е продиктуван от факта, че структурата на номерационните степени съдържа като подструктура — структурата на Тюринговите степени, но без да е елементарно еквивалентна на нея. Съвременните резултати за определимост [CGL+16, GS15, GS12, SS12] в теорията на номерационните степени показват, че структурата е удобна за изучаване на Тюринговите степени.

Дефиниция 2.3.1. Нека A и B са множества от естествени числа. Множеството A е *номерационно сводимо към* множеството B, означаваме с $A \leq_e B$, ако има р.н. множество W_e, за което:

$$A = W_e(B) = \{x \mid (\exists D)[\langle x, D\rangle \in W_e \ \&\ D \subseteq B]\},$$

където D е крайно множество, кодирано по стандартния начин.

Горната дефиниция асоциира ефективен оператор с всяко р.н. множество W_e. Нека $\{\Gamma_e\}_{e\in\omega}$ е ефективен списък на всички номерационни оператори.

Както Тюринговата сводимост, така и номерационната, е преднаредба над множествата от естествени числа и поражда релация на еквивалентност $\equiv_e$ и степенната структура $\mathcal{D}_e$. Множеството $A \oplus B$ е точна горна граница на A и B по отношение на $\leq_e$. Две множества A и B са *номерационно еквивалентни* ($A \equiv_e B$), ако $A \leq_e B$ и $B \leq_e A$. Класът на еквивалентност на множеството A относно тази релация е *номерационната степен* $d_e(A)$. Множеството $\mathcal{D}_e$ от всички номерационни степени, заедно с естествено породената частична наредба и операцията взимане на точна горна граница, е *горната полу-решетка на номерационните степени*. То има най-малък елемент $\mathbf{0}_e$, съставен от всички рекурсивно-номеруеми множества. Въведение в теорията на номерационните степени читателят може да се види книгата на Купър [Coo90].

Има силна връзка между релациите, които дефинирахме: $A \leq_T B$ точно тогава, когато $A \oplus \overline{A}$ е р.н. в B, точно тогава, когато $A \oplus \overline{A} \leq_e B \oplus \overline{B}$. Множеството $A \oplus \overline{A}$ кодира по позитивен начин позитивната и негативната информация за множеството A. Това дава една връзка между Тюринговата сводимост, номерeционната сводимост и релацията "р.н. в", формално изразена така:

Твърдение 2.3.3. Нека A и B са множества от естествени числа.

1. $A \leq_T B$ тогава и само тогава, когато $A \oplus \overline{A} \leq_e B \oplus \overline{B}$.

2. A е р.н. в B тогава и само тогава, когато $A \leq_e B \oplus \overline{B}$.

Това дава естественото влагане ι на Тюринговите степени в номерационните ([Med55, Myh61]):

$$\iota(d_T(A)) = d_e(A \oplus \overline{A}).$$

Множеството A се нарича *тотално*, ако и само ако $A \equiv_e A \oplus \overline{A}$. Пример за тотални множества са графиките на тоталните функции. Една номерационна степен е *тотална*, ако съдържа тотално множество. Номерационните степени в областта от стойности на ι съвпадат с тоталните номерационни степени.

Следната теорема на Селман показва, че тоталните номерационни степени играят важна роля в тази структура: една номерационна степен може да се характеризира с множеството от тотални степени над нея.

Теорема 2.3.4. [Sel71] За всеки $A, B \subseteq \mathbb{N}$, следните са еквивалентни:

1. $A \leq_e B$;

2. $\{X \mid B \text{ е р.н. в } X\} \subseteq \{X \mid A \text{ е р.н. в } X\}$;

3. $\{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_e \mid \mathbf{x}$ е тотална $\& \ d_e(B) \leq \mathbf{x}\} \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_e \mid \mathbf{x}$ е тотална $\& \ d_e(A) \leq \mathbf{x}\}$.

Скок операторът за номерационните степени е въведен от Купър и Макевой. [Coo84, McE85].

Дефиниция 2.3.5. Нека $K_A = \{\langle e, x\rangle \mid x \in \Gamma_e(A)\}$. Множеството

$$A'_e = K_A \oplus \overline{K_A}$$

се нарича номерационен скок на A и $d_e(A)' = d_e(A'_e)$.

Да забележим, че $K_A = \oplus_{e\in\omega}\Gamma_e(A) = \{\langle e, x\rangle \mid x \in \Gamma_e(A)\}$. Ясно е, че $K_A \equiv_e A$. Да означим $A^+ = A \oplus \overline{A}$. Номерационният скок е монотонен и е съгласуван с Тюринговия скок в следния смисъл: $(A')^+ \equiv_e (A^+)'_e$, и $A' \equiv_T (A^+)'_e$ [Coo84, McE85].

В Глава 3. ще използваме теоремата на Сосков за обръщане на номерационния скок:

Теорема 2.3.6. [Sos00] За всяка номерационна степен $\mathbf{a}$ съществува тотална номерационна степен $\mathbf{b}$, такава че $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ и $\mathbf{a}' = \mathbf{b}'$.

Първите работи в номерационните степени се появяват в статиите на Кейс [Cas71] и Медведев [Med55]. В частност, Кейс показва, че $\mathcal{D}_e$ не е решетка като следствие на теорема за екзактни двойки. Медведев показва съществуването на квазиминимални степени. Една степен е *квазиминимална* ако не ограничава отгоре нито една ненулева тотална степен. Купър полага основите на изучаването на свойствата на номерационните степени в неговата обзорна статия [Coo84] от 1990 г. Той открива много важни алгебрични свойства на глобалната и локалната структура. Едно от тези свойства е липсата на минимални елементи, което показва, че теорията на номерационните степени се различава от теорията на Тюринговите степени. Макевой [McE85], студент на Купър, дефинира номерационния скок оператор, който изобразява една номерационна степен $\mathbf{a}$ в тотална степен $\mathbf{a}'$, така че $\mathbf{a} <_e \mathbf{a}'$. Калимулин получава един определим в $\mathcal{D}_e$ клас от двойки от номерационни степени, известен като Калимулинови двойки, или $\mathcal{K}$-двойки. Така Калимулин [Kal03] показва, че номерационният скок е определим в $\mathcal{D}_e$. Ганчев и М. Соскова [GS15] дават едно алтернативно доказателство за определимост на номерационния скок. Тяхното доказателство е пример за по-общ феномен: те въвеждат понятието максимална $\mathcal{K}$-двойка и изказват хипотеза, че една ненулева номерационна степен е тотална, ако и само ако тя е точна горна граница на елементи на максимална $\mathcal{K}$-двойка. Те показват, че ако тяхната хипотеза е вярна, то би следвало определимост от първи ред на образа (при естественото влагане на $\mathcal{D}_T$ в $\mathcal{D}_e$) на релацията в Тюринговите степени "р.н. в". В [GS12] те показват, че теорията от първи ред на верните формули в аритметиката може да се интерпретира в $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0'}_e)$, използвайки кодиращи механизми, базирани на $\mathcal{K}$-двойки, решавайки с това един открит проблем от обзорната статия на Купър от 1990 г. В [GS15] те показват освен това, че класът на ниските номерационни степени е определим от първи ред. По-важното е, че тяхната хипотеза е вярна за определимостта на тоталните Σ^0_2 степени с максимални $\mathcal{K}$-двойки за локалната структура $\mathcal{D}_e(\leq \mathbf{0'}_e)$. Така те дават отговор за локалната версия на отворения проблем на Роджерс от 1967 г. Пълният отговор на Роджърсовия въпрос е получен от съвместната работа на Кай, Ганчев, Лемп, Дж. Милър и М. Соскова, потвърждавайки хипотезата на Ганчев и М. Соскова.

Теорема 2.3.7. (Кай, Ганчев, Лемп, Дж.Милър, М.Соскова)[CGL+16] Тоталните номерационни степени са определими с формула от първи ред в $\mathcal{D}_e$. Една ненулева номерационна степен е тотална, т.т.к. е точна горна граница на членове на максимална Калимулинова двойка.

Съвсем наскоро Ганчев и М. Соскова [GS18] показаха, че всички класове от високи номерационни степени $H_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{0}'_e \ \&\ \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_e^{(n+1)}\}$ и от ниски номерационни степени $L_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{0}'_e \ \&\ \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_e^{(n)}\}$ са определими в $\mathcal{D}_e$, за всяко $n \geq 1$.

Връзката между номерационните степени и абстрактните модели на изчислимост дава нова насока в областта на ефективната структурна теория. Може да се види повече в обзорната ни статия с М. Соскова [SS17].

В последната глава показваме един нов резултат за един подклас на номерационните степени—кототалните степени. Едно множество $A \subseteq \mathbb{N}$ е *кототално*, ако $A \leq_e \overline{A}$ и една номерационна степен е *кототална*, ако съдържа кототално множество. Въвеждаме аналог на скок оператор - *скип оператор*. Ние разглеждаме действието на скип оператора над класа на номерационните степени на 1-генеричните множества [Cop88]. Дефинираме ралативизиран вариант на 1-генеричност, подходяща в контекста на номерационните степени. Използваме понятието "релативно относно $\langle X \rangle$" за да означим "релативно номерационната степен на X" (а не $X \oplus \overline{X}$ като при Тюринговите степени).

Дефиниция 2.3.8. Нека G и X са множества от естествени числа. G е 1-*генерично относно* $\langle X \rangle$, ако за всяко множество от крайни части S, такова че $S \leq_e X$:

$$(\exists \sigma \subseteq G)(\sigma \in S \vee (\forall \tau \supseteq \sigma)[\tau \notin S]).$$

Ако $X = \varnothing$, тогава наричаме G просто 1-*генерично*, и ако $X = \overline{K}$, то G е 2-*генерично*.

Да забележим, че G е 1-генерично относно X, в обичайния смисъл, ако G е 1-генерично относно $\langle X \oplus \overline{X} \rangle$, в смисъла на дефиницията отгоре.

Дефиниция 2.3.9. Една номерационна степен $\mathbf{a}$ е *квазиминимална*, ако е ненулева и единствената тотална степен, ограничена от $\mathbf{a}$, е $\mathbf{0}_e$.

Макевой [McE85] доказва, че номерационният скок, ограничен до квазиминимани степени, има същата област на действие като неограничения скок оператор. Релативизирайки понятието квазиминималност, получаваме следните две понятия:

Дефиниция 2.3.10. Една номерационна степен $\mathbf{a}$ е *квазиминимално покритие* за номерационната степен $\mathbf{b}$, ако $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ и няма тотална номерационна степен $\mathbf{x}$, такава че $\mathbf{b} < \mathbf{x} \leq \mathbf{a}$. Степента $\mathbf{a}$ е *строго квазиминимално покритие* на $\mathbf{b}$, ако $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ и всяка тотална номерационна степен $\mathbf{x}$, ограничена от $\mathbf{a}$, е под $\mathbf{b}$.

Следващото твърдение показва две важни свойства на генеричните номерационни степени.

Твърдение 2.3.11. Нека G е 1-генерично относно $\langle X \rangle$. Тогава:

1. $d_e(G \oplus X)$ е строго квазиминимално покритие за $d_e(X)$.
2. $\overline{G}$ е 1-генерично относно $\langle X \rangle$.

2.4 Спектри на структури

Тюринговият спектър на една изброима структура $\mathcal{A}$ дава една естествена мярка на сложността на типа изоморфизъм на тази структура. Понятието спектър на една структура $\mathcal{A}$ е въведено от Рихтер [Ric81], като множеството от Тюринговите степени $\mathbf{a}$, такива че за някое копие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ (т.е. $\mathcal{B} \simeq \mathcal{A}$ с домейн $\mathbb{N}$), атомарната диаграма на $\mathcal{B}$ има степен $\mathbf{a}$.

Нека $\mathcal{A} = (A, R_1, \ldots, R_k)$ е изброима релационна структура. Ако в езика на структурата има функционални символи, представяме съответните функции с техните графики. Номерация на $\mathcal{A}$ е тотално сюрективно изображение от $\mathbb{N}$ върху $|\mathcal{A}|$. По дадена номерация f на $\mathcal{A}$ и подмножество B на $|\mathcal{A}|^a$ дефинираме:

$$f^{-1}(B) = \{\langle x_1, \ldots, x_a \rangle \mid (f(x_1), \ldots, f(x_a)) \in B\}.$$

Нека $f^{-1}(\mathcal{A}) = f^{-1}(R_1) \oplus \cdots \oplus f^{-1}(R_k) \oplus f^{-1}(=)$. С $D(\mathcal{A})$ означаваме атомарната диаграма на $\mathcal{A}$.

Дефиниция 2.4.1. *Спектър на* $\mathcal{A}$ е множеството

$$DS(\mathcal{A}) = \{d_T(f^{-1}(\mathcal{A})) \mid f \text{ е номерция на } \mathcal{A}\}.$$

Ако $\mathbf{a}$ е най-малък елемент на $DS(\mathcal{A})$, то $\mathbf{a}$ се нарича *степен на* $\mathcal{A}$.

Ние използваме две прости свойства на спектъра на структура. Те са доказани от Сосков [Sos04] за номерационния спектър на структура. Нека $\mathcal{A}$ е безкрайна и носителят на $\mathcal{A}$ е множеството от естествени числа.

Твърдение 2.4.2. За всяка номерация f на $\mathcal{A}$ съществува инективна номерация g на $\mathcal{A}$, такава че $g^{-1}(\mathcal{A}) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathcal{A})$.

Разликата със стандартната дефиниция на Тюрингов спектър е, че в Тюринговия спектър се включват само Тюринговите степени на изоморфните копия на структурата (с биективни номерации), докато ние включваме всички първообрази при сюрективни номерации. Твърдение 2.4.2 показва, че от гледна точка на съществуването на степен на структурата (най-малката степен на спектъра) тази разлика няма значение. Но предимството е, че в нашия случай, спектърът е затворен нагоре (Твърдение 2.4.3). Найт доказва в [Kni86], че обичайният Тюрингов спектър е затворен нагоре само в нетривиални структури. Една структура е тривиална, ако има краен брой елементи, такива че всяка пермутация на носителя, фиксираща тези елементи, е автоморфизъм на структурата.

Твърдение 2.4.3. За всяка структура $\mathcal{A}$ спектърът $\mathrm{DS}(\mathcal{A})$ е затворен нагоре.

За всеки изчислим ординал α, следвайки Найт [Kni86], дефинираме *α-ти скок спектър* $DS_\alpha(\mathcal{A})$ на структурата $\mathcal{A}$ да бъде множеството от α-тите скокове на елементите на спектъра на $\mathcal{A}$. Ако $\mathbf{a}$ е най-малкият елемент на $DS_\alpha(\mathcal{A})$, то $\mathbf{a}$ се нарича *α-та скок степен* на $\mathcal{A}$. В Глава 3. показваме, че първият скок спектър също е затворен нагоре. Рихтер [Ric81] доказва, както споменахме в увода, че една линейна наредба $\mathcal{A}$, на която спектърът $DS(\mathcal{A})$ има степен, то тя е изчислима, т.е. степента трябва да е $\mathbf{0}$-множеството от всички изчислими множества. Найт [Kni86] разширява резултата на Рихтер като показва, че единствено възможната първа скок степен на линейна наредба е $\mathbf{0}'$, така не всяка линейна наредба има степен и не всяка линейна наредба има първа скок степен. Дауни и Найт [DK92] доказват, че за всеки изчислим ординал α има линейна наредба $\mathcal{A}$, такава, че $\mathcal{A}$ има α скок степен равна на $\mathbf{0}^{(\alpha)}$, но за всеки $\beta < \alpha$ няма β скок степен на $\mathcal{A}$. Слеман [Sla98], и независимо Венер [Weh98], дават пример за структура $\mathcal{A}$, на която Тюринговият спектър се състои от всички ненулеви Тюрингови стеоени, $DS(\mathcal{A}) = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{0} < \mathbf{a}\}$. В Глава 3., като приложение на теоремите за обръщане на скока за структури, даваме съвсем прости доказателства на последните два резултата, като втория релативизираме.

Номерационният спектър $DS_e(\mathcal{A})$ на една изброима структура $\mathcal{A}$ е въведен от Сосков [Sos04] като множеството от номерационните степени, генерирани от номерациите на $\mathcal{A}$. Той също е затворен нагоре относно тотални степени, т.е. ако $\mathbf{a} \in DS_e(\mathcal{A})$, $\mathbf{b}$ е тотална номерационна степен и $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, то $\mathbf{b} \in DS_e(\mathcal{A})$. Най-малката степен на $DS_e(\mathcal{A})$, ако съществува, се нарича *е-степен* на $\mathcal{A}$.

Също както Тюринговата сводимост може да се изрази с номерационна сводимост, Тюринговият спектър на структурата $\mathcal{A}$ отговаря на номерацион-ния спектър на структура $\mathcal{A}^+$, която кодира по позитивен начин позитивната и негативната информация на структурата $\mathcal{A}$. Ако $\mathcal{A} = (A, R_1, \ldots, R_k)$ тогава нека $\mathcal{A}^+ = (A, R_1, \ldots, R_k, \neg R_1, \ldots, \neg R_k)$. Образът на Тюринговия спектър на $\mathcal{A}$ при естественото влагане е точно $DS_e(\mathcal{A}^+)$.

Ко-спектърът $CS(\mathcal{A})$ на структурата $\mathcal{A}$ е множеството от всички номерационни степени, долни граници на номерационния спектър на структурата $\mathcal{A}$. Ако $CS(\mathcal{A})$ има най-голям елемент, той се нарича *ко-степен* на $\mathcal{A}$. За всеки изчислим ординал α означаваме с $CS_\alpha(\mathcal{A})$ ко-спектъра на $DS_\alpha(\mathcal{A})$- множеството от α-скоковете на елементите на $DS_e(\mathcal{A})$.

Едно приложение на теоремата на Селман [Sel71] (Теорема 2.3.4) показва, че ко-спектърът на $\mathcal{A}$ зависи само от тоталните елементи на е-спектъра на $\mathcal{A}$. Сосков [Sos04] доказва, че за всеки изчислим ординал α и $\mathbf{b} \in DS_\alpha(\mathcal{A})$ съществуват тотални е-степени $\mathbf{f_0}$ и $\mathbf{f_1}$ (минимална двойка), такива, че: $\mathbf{f_0}^{(\alpha)} \leq \mathbf{b}$ и $\mathbf{f_1}^{(\alpha)} \leq \mathbf{b}$, и $\mathbf{f_0}^{(\beta)}, \mathbf{f_1}^{(\beta)} \notin CS_\beta(\mathcal{A})$ за $\beta < \alpha$, и $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{D}_e \ \& \ \mathbf{x} \leq \mathbf{f_0}^{(\beta)} \ \& \ \mathbf{x} \leq \mathbf{f_1}^{(\beta)}\} = CS_\beta(\mathcal{A})$ за всяко $\beta + 1 < \alpha$. Той показва, че съществува квазиминимална степен за номерационния спектър, т.е. е-степен $\mathbf{q} \notin CS(\mathcal{A})$, и всяка тотална $\mathbf{x} \leq \mathbf{q} \to \mathbf{x} \in DS_e(\mathcal{A})$, и всяка тотална $\mathbf{x} \geq \mathbf{q} \to \mathbf{x} \in CS(\mathcal{A})$. Тя е аналог на квазиминималната степен в $\mathcal{D}_e$.

Калимулин [Kal09b], използвайки резултата на Венер, го пренася за номерационни степени: Съществува структура $\mathcal{A}$, такава че $DS_e(\mathcal{A}) = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{D}_e \ \& \ \mathbf{a} > \mathbf{0}_e\}$.

Ко-степента и е-степента са много близки до това, което Найт [Kni98] и Монталбан [Mon] наричат “номерационна степен на структура”. Едно множество $X \subseteq \mathbb{N}$ е “номерационна степен” на структурата $\mathcal{A}$, ако всяка номерация на X изчислява копие на $\mathcal{A}$, и всяко копие на $\mathcal{A}$ изчислява номерация на X. Така по Теоремата 2.3.4 на Селман номерационната степен на X е ко-степен на структурата $\mathcal{A}^+$. Но тази ко-степен има допълнителното свойство: $DS(\mathcal{A}^+)$ е точно множеството от степени над $d_e(X)$.

Сосков [Sos04], използвайки резултати на Дауни и Джокуш [DJ94], и на Коулс, Дауни и Слеман [CDS00], доказва, че за една абелева група без торсия $\mathfrak{G}$ от ранг 1, номерационната степен на характеристиката на групата $S(\mathfrak{G})$ е ко-степен на $\mathfrak{G}$. Освен това, той показва, че първата скок степен (най-малката в $DS_1(\mathfrak{G})$) е номерационният скок на тази ко-степен. Друго следствие от това е, че всеки главен идеал от номерационни степени е ко-спектър на структура, а именно на някоя абелева група без торсия от ранг 1. Той доказва по-нататък, че всеки изброим идеал от номерационни степени е ко-спектър на структура.

Тук открит проблем е следният: кои множества от Тюрингови степени са спектри на структури? Естествен въпрос е: дали всички множества от е-степени, затворени нагоре, относно тотални степени са спектри на структури? Разбира се, отговорът е "не". Един начин да се види това е с помощта на понятието *база* и връзката със съществуването на степен.

Едно подмножество $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ на множество от номерационни степени $\mathcal{C}$ е *база за* $\mathcal{C}$, ако $(\forall \mathbf{a} \in \mathcal{C})(\exists \mathbf{b} \in \mathcal{B})(\mathbf{b} \leq \mathbf{a})$. С помощта на генерични номерации и аргумент, подобен на този в теоремата на Селман, можем да покажем следното.

Теорема 2.4.6. [Sos04] Една структура $\mathcal{A}$ има е-степен, ако и само ако $DS_e(\mathcal{A})$ има изброима база.

В частност, обединението на два конуса на две несравними степени (дори изброими конуси) не може да е номерационен спектър на структура (както не може да е Тюрингов спектър на структура). Независимо от това, спектрите се държат структурно към техните ко-спектри като конуси от тотални степени.

2.5 Определимост в структури

Друг начин да характеризираме сложността на една структура $\mathcal{A}$ е да анализираме определимите множества в $\mathcal{A}$. Това дава една по-фина мярка, тъй като може да се случи две структури да имат едни и същи спектри, но те да имат много различна изразителна сила и различни моделно-теоретични свойства.

2.5.1 Релативно вътрешни (intrinsically) Σ^0_α релации

Нека $\mathcal{A} = (A, R_1, R_2, \dots, R_k)$ е изброима структура и α е изчислим ординал. За простота нека предположим, че $A = \mathbb{N}$.

Дефиниция 2.5.6. Една релация R на $\mathcal{A}$ е релативно вътрешна (intrinsically) Σ^0_α в структурата $\mathcal{A}$, ако за всяка структура $(\mathcal{B}, P) \simeq (\mathcal{A}, R)$ релацията P е Σ^0_α в атомарната диаграма $D(\mathcal{B})$, което в нашите термини означава, че за всяка номерация f на $\mathcal{A}$, $f^{-1}(R) \in \Sigma^0_\alpha(f^{-1}(\mathcal{A}))$.

Например, да разгледаме линейната наредба $\mathcal{A} = (A, <)$ и S-релацията непосредствен наследник. S е релативно вътрешна (intrinsically) Π^0_1 в $\mathcal{A}$, тъй като $\neg S(x,y) \iff x \nless y \vee \exists z(x < z \;\&\; z < y)$ е релативно вътрешна Σ^0_1 в $\mathcal{A}$. "Блок релацията" $B(x,y) \iff$ ако има краен брой елементи $z_1, \dots, z_n$, такива че $S(x, z_1)$,$S(z_1, z_2), \dots, S(z_n, y)$ е релативно вътрешно Σ^0_2 в $\mathcal{A}$, и няма Σ^0_2 формула от първи ред, която дефинира B. Но B може да се дефинира с изчислима безкрайна дизюнкция на такива формули, както ще видим в следващата секция.

2.5.2 Изчислими безкрайни формули

Нека L е фиксиран изчислим език. Някои математически свойства, например като Архимедовото свойство (вярно в подполета на наредени полета от реални числа), се изразяват по естествен начин с безкрайни формули. Ние разглеждаме формули от езика $L_{\omega_1,\omega}$ (виж Кислер [Kei71]). Тук ω_1 означава, че дизюнкциите и конюнкциите са над изброими множества, а ω означава, че имаме само краен брой последователни квантори. Например, в езика на наредените полета има затворена формула, която като я добавим към аксиомите на наредените полета, моделите са точно Архимедовите полета $(\forall x)\bigvee_n (x < \tau_n)$, където $\tau_n = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n}$.

Изчислимите безкрайни Σ_α и Π_α формули, означаваме с Σ^c_α и Π^c_α, ([AK00]) със свободни променливи $x_1,\dots,x_l$, се дефинират с трансфинитна индукция по α-изчислим ординал, както следва.

Σ^c_0 и Π^c_0 формули са безкванторни формули над $x_1,\dots,x_l$.

За $\alpha > 0$, Σ^c_α формула е дизюнкция на р.н. множество от формули от вида $\exists y_1 \dots \exists y_m \Psi(x_1,\ \dots, x_l, y_1,\dots,y_m)$, където Ψ е Π^c_β формула, за някое $\beta < \alpha$, със свободни променливи измежду $x_1,\dots,x_l$, $y_1,\dots,y_m$.

Π^c_α формула е конюнкция на р.н. множество от формули от вида $\forall y_1 \dots \forall y_m \Psi(x_1,\ \dots, x_l, y_1,\dots,y_m)$, където Ψ е Σ^c_β формула, за някое $\beta < \alpha$, със свободни променливи измежду $x_1,\dots,x_l$, $y_1,\dots,y_m$.

Дефиниция 2.5.7. Релацията $R \subseteq |\mathcal{A}|^l$ е *определима* в структурата $\mathcal{A}$ със Σ^c_α формула $\Phi(x_1,\dots,x_l,w_1,\dots,w_r)$, ако има параметри $t_1,\dots,t_r \in |\mathcal{A}|$, такива, че за всеки $a_1,\dots,a_l \in |\mathcal{A}|$ е в сила следната еквивалентност:

$$(a_1,\dots,a_l) \in R \iff \mathcal{A} \models \Phi(x_1/a_1,\dots,x_l/a_l,w_1/t_1,\dots,w_r/t_r).$$

Аш, Найт, Манаси и Слеман [AKMS89], и независимо Чизхолм [Chi90], доказват, че една релация е релативно вътрешна Σ^0_α в $\mathcal{A}$, ако и само ако е определима с изчислима безкрайна Σ^c_α формула с краен брой параметри в $\mathcal{A}$.

Теорема 2.5.8. Нека R е релация в структурата $\mathcal{A}$. Следните са еквивалентни:

1. R е релативно вътрешно Σ^0_α в структурата $\mathcal{A}$.
2. R е определима със Σ^c_α формула с краен брой параметри в $\mathcal{A}$.

Антонио Монталбан разширява в своята книга [Mon] този резултат за $\alpha = 1$ не само за релации с фиксиран брой аргументи, но и за такива които $R \subseteq |A|^{<\omega}$. Например, над Q-векторно пространство V, релацията $LD \subseteq V^{<\omega}$ за линейна зависимост е винаги р.н. в V. За да номерираме LD по $D(V)$-изчислим начин, разглеждаме всички нетривиални Q-линейни комбинации $q_0v_0+\cdots+q_kv_k$ на всички възможни крайни редици от вектори $\langle v_0,\ldots,v_k\rangle\in V^{<\omega}$, и ако намерим една, която е равна на $\vec{0}$, то номерираме $\langle v_0,\ldots,v_k\rangle$ в LD. Ясно е, че можем да напишем Σ^c_1 формула, която дефинира тази релация, но свободните променливи няма да са фиксиран брой.

В дефиницията на ефективна интерпретация 5.1.10, която разглеждаме в Глава 5., интерпретацията се дефинира с формули, които нямат фиксиран брой аргументи. Използваме обобщена Σ^c_1-дефиниция на релация.

Дефиниция 2.5.9 (Обобщена Σ^c_1-дефиниция)**.** Нека $R\subseteq|\mathcal{A}|^{<\omega}$ и нека $\varphi_n(\overline{x}_n)_{n\in\omega}$ е изчислима редица от Σ^c_1 формули, където $\varphi_n(\overline{x}_n)$ има n аргументи. Ако за всяко n, $\varphi_n(\overline{x}_n)$ определя $R\cap\mathcal{A}^n$, тогава казваме, че $\bigvee_n\varphi_n(\overline{x}_n)$ е *обобщена* Σ^c_1 *дефиниция на* R.

Монталбан [Mon] доказва, че резултатът от Теорема 2.5.8 е в сила също и за такива релации $R\subseteq|\mathcal{A}|^{<\omega}$, т.е. R е релативно вътрешно Σ^0_1 в структурата $\mathcal{A}$, ако и само ако R е определима с помощта на обобщени Σ^c_1 формули в $\mathcal{A}$ с параметри. Ние използваме този резултат в Глава 5.

Глава 3

Скок на структура

Понятието скок на структура е аналог на операцията скок в степенните структури. То съдържа информация за множествата, определими с изчислими безкрайни Σ_1^c формули. Това понятие беше независимо дефинирано няколко пъти в последните години, както бе обяснено в Глава 1.

В [Sos07, SS07, SS09a] със Сосков доказваме две теореми за обръщане на скока на структура. Първата е аналог на теоремата за обръщане на скока на Фридберг 2.2.9 за Тюринговите степени. Използваме метода на Маркеровите разширения. По-късно Стукачев [Stu09, Stu10] показва подобен резултат за Σ определимост. Втората теорема казва, че всеки скок спектър $DS_1(\mathcal{A})$ е спектър на структура - скокът на $\mathcal{A}$. Използваме метода на форсинг. По-късно Монталбан [Mon09] независимо доказва подобен резултат в други террмини.

Искам да спомена, че Гончаров, Найт, Маккой, Р. Милър, Соломон и Харизанов [GHK+05] дават идея, че обръщане на скока на Фридберг, може да се обобщи за изчислими ординали наследници. Те го правят за графи, но ние знаем [HKSS02], че всеки спектър на структура може да се реализира като спектър на граф. Те получават този резултат като средство за да постигнат друг резултат за релативната категоричност. Вътев [Vat14] използва тази идея и доказва теорема за обръщане на скока за изчислими ординали наследници. Сосков [Sos13] доказва, че такава теорема не е изпълнена за изчислими гранични ординали.

3.1 Скок на структура

Нека $\mathcal{A} = (A; R_1, \ldots, R_s)$ е изброима релационна структура и нека равенството е сред предикатите $R_1, \ldots, R_s$. Предполагаме, че носителят A на $\mathcal{A}$ е безкраен.

Следвайки Московакис [Mos69], най-малкото допустимо разширение на $\mathcal{A}$ дефинираме както следва.

Нека 0 е обект, който не е в A, и Π е операция за наредени двойки, избрана така, че нито 0-та, нито елементите на A са наредени двойки. Нека A^* е най-малкото множество, съдържащо елементите на $A_0 = A \cup \{0\}$ и затворено относно операцията Π.

За всяко естествено число $n \in \mathbb{N}$ асоциираме елемент n^* на A^* с индукция:

$$\begin{aligned} 0^* &= 0; \\ (n+1)^* &= \Pi(0, n^*). \end{aligned}$$

Множеството от елементи n^*, дефинирано по-горе, означаваме с $\mathbb{N}^*$.

Нека L и R са декодиращи функции в A^*, удовлетворяващи следните условия:

$$\begin{aligned} &L(0) = R(0) = 0; \\ &(\forall t \in A)(L(t) = R(t) = 1^*); \\ &(\forall s, t \in A^*)(L(\Pi(s,t)) = s \ \&\ R(\Pi(s,t)) = t). \end{aligned}$$

Функцията за наредени двойки ни дава възможност да кодираме крайните редици от елементи: нека
$\Pi_1(t_1) = t_1$, $\Pi_{n+1}(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) = \Pi(t_1, \Pi_n(t_2, \ldots, t_{n+1}))$, за всеки $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \in A^*$.

За всеки предикат R_i на структурата $\mathcal{A}$ дефинираме съответен предикат R_i^* над A^*:

$$R_i^*(t) \iff (\exists a_1 \in A) \ldots (\exists a_{r_i} \in A)(t = \Pi_{r_i}(a_1, \ldots, a_{r_i}) \ \&\ R_i(a_1, \ldots, a_{r_i})).$$

Дефиниция 3.1.1. *Московакисово разширение на* $\mathcal{A}$ е структурата

$$\mathcal{A}^* = (A^*; A_0, R_1^*, \ldots, R_s^*, G_\Pi, G_L, G_R, =),$$

където G_Π, G_L и G_R са графиките на Π, L и R, съответно.

Лема 3.1.2. Нека f е номерация на $\mathcal{A}$. Съществува номерация f^* на $\mathcal{A}^*$, такава че $(f^*)^{-1}(\mathcal{A}^*) \equiv_T f^{-1}(\mathcal{A})$.

Твърдение 3.1.3. $\mathrm{DS}(\mathcal{A}) = \mathrm{DS}(\mathcal{A}^*)$.

Нека f е номерация на $\mathcal{A}$. По дадени естествени числа e и x нека

$$f \vDash F_e(x) \iff x \in W_e^{f^{-1}(\mathcal{A})}$$

и нека

$$f \vDash \neg F_e(x) \iff f \nvDash F_e(x).$$

По дадена крайна част δ и $R \subseteq A^n$, нека $\delta^{-1}(R)$ е крайна функция над естествените числа, приемаща стойности в $\{0,1\}$, такава че

$$\begin{aligned} &\delta^{-1}(R)(u) \simeq 1 \iff (\exists x_1, \ldots x_n \in dom(\delta))(u = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \ \& \\ &(\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)) \in R) \text{ and} \\ &\delta^{-1}(R)(u) \simeq 0 \iff (\exists x_1, \ldots x_n \in dom(\delta))(u = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \ \& \\ &(\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)) \notin R). \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

С $\delta^{-1}(\mathcal{A})$ означаваме крайната функция $\delta^{-1}(R_1) \oplus \cdots \oplus \delta^{-1}(R_s)$.

Дефиниция 3.1.4. За всеки $e, x \in \mathbb{N}$ и за всяка крайна част δ, дефинираме *форсинг* релациите $\delta \Vdash F_e(x)$ и $\delta \Vdash \neg F_e(x)$ както следва:

$$\delta \Vdash F_e(x) \iff x \in W_e^{\delta^{-1}(\mathcal{A})}$$

$$\delta \Vdash \neg F_e(x) \iff (\forall \tau \supseteq \delta)(\tau \nVdash F_e(x)).$$

Следните свойства на форсинг релацията следват от дефинициите:

(F1) $\delta \Vdash (\neg)F_e(x)$ & $\delta \subseteq \tau \Rightarrow \tau \Vdash (\neg)F_e(x)$.

(F2) За всяка номерация f на $\mathcal{A}$,

$$f \vDash F_e(x) \iff (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash F_e(x)).$$

Дефиниция 3.1.5. Номерацията f на $\mathcal{A}$ е *генерична*, ако за всеки $e, x \in \mathbb{N}$:

$$(\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash F_e(x) \vee \tau \Vdash \neg F_e(x)).$$

Да забележим, че това е еквивалентно на Дефиниция 2.2.2 за 1-генерично множество, ако положим $G = f^{-1}(\mathcal{A})$ и S да бъде множеството от крайни части $\{\tau \mid \tau \Vdash F_e(x)\}$. Ясно е, че S е р.н.

Ние знаем от Теорема 2.2.6, че за всяка генерична номерация f на $\mathcal{A}$, за всеки $e, x \in \mathbb{N}$,

$$f \vDash \neg F_e(x) \iff (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash \neg F_e(x)).$$

С всяка крайна част $\tau \neq \varnothing$, такава че $\mathrm{dom}(\tau) = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $\tau(x_1) = s_1, \dots, \tau(x_n) = s_n$, асоциираме елемент $\tau^* = \Pi_n(\Pi(x_1^*, s_1), \dots, \Pi(x_n^*, s_n))$ на A^*. Нека $\tau^* = 0$, ако $\tau = \varnothing$.

Дефинираме $K_{\mathcal{A}} = \{\Pi_3(\delta^*, e^*, x^*) \mid (\exists \tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash F_e(x))$ & $e^*, x^* \in \mathbb{N}^*\}$.

Дефиниция 3.1.6. *Скок на структура* $\mathcal{A}$ е структурата:

$$\mathcal{A}' = (A^*; A_0, R_1^*, \dots, R_s^*, G_\Pi, G_L, G_R, =, K_{\mathcal{A}}).$$

Следното твърдение следва директно от Лема 3.1.2.

Твърдение 3.1.7. Нека f е номерация на $\mathcal{A}$. Тогава

$$(f^*)^{-1}(\mathcal{A}') \equiv_T f^{-1}(\mathcal{A}) \oplus (f^*)^{-1}(K_{\mathcal{A}}).$$

3.2 Всеки скок спектър е спектър

Теорема 3.2.1. За всяка структура $\mathcal{A}$, съществува структура $\mathcal{B}$, такава че
$\mathrm{DS}_1(\mathcal{A}) = \mathrm{DS}(\mathcal{B})$.

Нека $\mathcal{B} = \mathcal{A}'$ е скокът на $\mathcal{A}$. Доказваме, че $DS_1(\mathcal{A}) = DS(\mathcal{B})$, като разделяме доказателството на две части.

Твърдение 3.2.2. $DS_1(\mathcal{A}) \subseteq DS(\mathcal{B})$.

Нека g е номерация на $\mathcal{A}$, така че $g^{-1}(\mathcal{A})' \in DS_1(\mathcal{A})$. От Твърдение 2.4.2, има инективна номерация f на $\mathcal{A}$, такава че $f^{-1}(\mathcal{A}) \leq_T g^{-1}(\mathcal{A})$. Тъй като $f^{-1}(\mathcal{A})' \leq_T g^{-1}(\mathcal{A})'$ и $DS(\mathcal{B})$ е затворено нагоре, достатъчно е да докажем, че $d_T(f^{-1}(\mathcal{A}))' \in DS(\mathcal{B})$. За целта показваме, че $(f^*)^{-1}(\mathcal{B}) \leq_T f^{-1}(\mathcal{A})'$ и още веднъж използваме факта, че $DS(\mathcal{B})$ е затворен нагоре. Използваме следната идея. Тъй като естествените числа са представени в $\mathcal{A}^*$, ние изчислимо представяме естествените числа и крайните части в $\mathbb{N}^*$, както и $f^{-1}(\mathcal{A})$. Доказваме, че $(f^*)^{-1}(K_{\mathcal{A}})$ е р.н. в $f^{-1}(\mathcal{A})$. Оттук следва, че $(f^*)^{-1}(K_{\mathcal{A}}) \leq_T f^{-1}(\mathcal{A})'$. Затова от Твърдение 3.1.7, $(f^*)^{-1}(\mathcal{B}) \leq_T f^{-1}(\mathcal{A})'$.

Сега да разгледаме обратното включване. Доказваме и използваме следното свойство на скок спектъра:

Лема 3.2.3. Всеки скок спектър е затворен нагоре.

Твърдение 3.2.4. $DS(\mathcal{B}) \subseteq DS_1(\mathcal{A})$.

Нека $\mathbf{a} \in DS(\mathcal{B})$ и m е номерация на $\mathcal{B}$, такава че $m^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathbf{a}$. По Твърдение 2.4.2, съществува инективна номерация f на $\mathcal{B}$, такава че $f^{-1}(\mathcal{B}) \leq_T m^{-1}(\mathcal{B})$. Конструираме номерация g на структурата $\mathcal{A}$, такава че $g^{-1}(\mathcal{A})' \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathcal{B})$. Тогава, по Лема 3.2.3, $\mathbf{a} \in DS_1(\mathcal{A})$. Използвайки горната идея, ние пренасяме по изчислим начин естествените числа, крайните части и $f^{-1}(\mathcal{B})$ в $\mathbb{N}^*$. Построяваме номерацията g на $\mathcal{A}$ като генерична номерация с помощта на форсинг метода и така, че представянето $g^{\#}$ на g в $\mathbb{N}^*$ е изчислима в $f^{-1}(\mathcal{B})$.

3.3 Теорема за обръщане на скока

Естествено, след като вече имаме понятието за скок на структура, се появява въпросът за обръщане на скока: по дадена структура $\mathcal{A}$ с $DS(\mathcal{A})$, състоящ се от степени над $\mathbf{0}'$, дали има структура $\mathcal{C}$, такава че $DS_1(\mathcal{C}) = DS(\mathcal{A})$. Ние доказваме дори релативен вариант на теоремата на Фридберг за обръщане на скока. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури, такива че $DS(\mathcal{A}) \subseteq DS_1(\mathcal{B})$ (така всички елементи на $DS(\mathcal{A})$ са над $\mathbf{0}'$). Тогава съществува структура $\mathcal{C}$, такава че $DS(\mathcal{C}) \subseteq DS(\mathcal{B})$ и $DS_1(\mathcal{C}) = DS(\mathcal{A})$.

Доказателството на тази теорема използва метода на Маркеровите разширения, който се разглежда в следващата секция.

3.3.1 Маркерови разширения

Маркер [Mar89] представя метод за построение, за всяко $n \geq 1$, една $\aleph_0$-категорична строго минимална теория, която не е аксиоматизируема със Σ_n крайни формули. Гончаров и Хюсеинов [GK02] адаптират конструкцията в общия случай, с цел да намерят за всяко $n \geq 1$ примери на $\aleph_1$-категорични изчислими модели, както и $\aleph_0$-категорични изчислими модели, чиито теории са Тюрингово еквивалентни на $\varnothing^{(n)}$. Ще дадем дефиницията на Меркеровите $\exists$ и $\forall$ разширения, следвайки [GK02].

Нека $\mathcal{A} = (A; R_1, \ldots, R_s, =)$ е структура, такава че R_i има r_i аргумента.

Маркеровото $\exists$-разширение на R_i, означаваме с $R_i^{\exists}$, е дефинирано както следва. Да разгледаме множества X_i с нови елементи, такива че $X_i = \{x^i_{\langle a_1,\ldots,a_{r_i}\rangle} \mid R_i(a_1, \ldots, a_{r_i})\}$. Множеството X_i наричаме $\exists$-свидетел на R_i. Предполагаме, че множествата A, $X_1, \ldots$, X_s са две по две непресичащи се.

Предикатът $R_i^{\exists}$ е с $r_i + 1$ аргумента и е дефиниран така:

$$R_i^{\exists}(a_1, \ldots, a_{r_i}, x) \iff a_1, \ldots, a_{r_i} \in A \ \&\ x \in X_i \ \&\ x = x^i_{\langle a_1,\ldots,a_{r_i}\rangle}.$$

Свойството на $R_i^{\exists}$ е, че за всеки $a_1, \ldots, a_{r_i} \in A$

$$(\exists x \in X_i) R_i^{\exists}(a_1, \ldots, a_{r_i}, x) \iff R_i(a_1, \ldots, a_{r_i}). \tag{3.3.1}$$

Дефиниция 3.3.1. Структурата $\mathcal{A}^{\exists}$ има следната дефиниция:

$$(A \cup \bigcup_{i=1}^{s} X_i; R_1^{\exists}, \ldots, R_s^{\exists}, X_1, \ldots, X_s, =),$$

където $R_i^{\exists}$ е $\exists$-разширение на R_i със $\exists$-свидетел X_i.

Маркеровото $\forall$-разширение на $R_i^{\exists}$, означаваме с $R_i^{\exists\forall}$, и го дефинираме така. Да разгледаме безкрайно множество Y_i от нови елементи, такова че

$$Y_i = \{y^i_{\langle a_1,\ldots,a_{r_i},x\rangle} : \neg R_i^{\exists}(a_1, \ldots, a_{r_i}, x) \ \&\ a_1, \ldots, a_{r_i} \in A, \ \&\ x \in X_i\}.$$

Множеството Y_i наричаме $\forall$-свидетел за $R_i^{\exists}$. Предполагаме, че всички множества A, $X_1, \ldots$, X_s and $Y_1, \ldots$, Y_s са две по две непресичащи се.

Предикатът $R_i^{\exists\forall}$ е с $r_i + 2$ аргумента, такъв че:

1. Ако $R_i^{\exists\forall}(a_1, \ldots, a_{r_i}, x, y)$, то $a_1, \ldots, a_{r_i} \in A$, $x \in X_i$ и $y \in Y_i$;
2. Ако $a_1, \ldots, a_{r_i} \in A$, $\&\ x \in\ X_i \ \&\ y \in Y_i$, то

$$\neg R_i^{\exists\forall}(a_1, \ldots, a_{r_i}, x, y) \iff y = y^i_{\langle a_1,\ldots,a_{r_i},x\rangle}\ .$$

От дефиницията на $R_i^{\exists\forall}$ следва, че ако $a_1, \ldots, a_{r_i} \in A$ и $x \in X_i$, то

$$(\forall y \in Y_i) R_i^{\exists\forall}(a_1, \ldots, a_{r_i}, x, y) \iff R_i^{\exists}(a_1, \ldots, a_{r_i}, x). \tag{3.3.2}$$

Дефиниция 3.3.2. Структурата $\mathcal{A}^{\exists\forall}$ е дефинирана така.

$$(A \cup \bigcup_{i=1}^{s} X_i \cup \bigcup_{i=1}^{s} Y_i; R_1^{\exists\forall}, \dots, R_s^{\exists\forall}, X_1, \dots, X_s, Y_1, \dots, Y_s, =),$$

където X_i е $\exists$-свидетелят за R_i и Y_i е $\forall$-свидетелят за $R_i^{\exists}$.

Структурата $\mathcal{A}^{\exists\forall}$ има следните свойства:

Твърдение 3.3.3. 1. Нека $a_1, \dots, a_{r_i} \in A$. Тогава:

(а) $R_i(a_1, \dots, a_{r_i}) \iff (\exists x \in X_i)(\forall y \in Y_i) R_i^{\exists\forall}(a_1, \dots, a_{r_i}, x, y)$;

(б) Ако $R_i(a_1, \dots, a_{r_i})$, то има единствено $x \in X_i$, такова че $(\forall y \in Y_i) R_i^{\exists\forall}(a_1, \dots, a_{r_i}, x, y)$;

2. За всяка редица $a_1, \dots, a_{r_i} \in A$ и $x \in X_i$ съществува най-много едно $y \in Y_i$, такова че $\neg R_i^{\exists\forall}(a_1, \dots, a_{r_i}, x, y)$;

3. За всяко $y \in Y_i$ има единствени редица $a_1, \dots, a_{r_i} \in A$ и $x \in X_i$, такива че $\neg R_i^{\exists\forall}(a_1, \dots, a_{r_i}, x, y)$;

4. За всяко $x \in X_i$ има единствена редица $a_1, \dots, a_{r_i} \in A$, такава че за всички $y \in Y_i$ предикатът $R_i^{\exists\forall}(a_1, \dots, a_{r_i}, x, y)$ е верен.

Дефинираме обединение (join) на две структури, което използваме в доказателството на теоремата за обръщане на скока.

Нека $\mathcal{A} = (A; R_1, \dots, R_s, =)$ и $\mathcal{B} = (B; P_1, \dots, P_t, =)$ са изброими структури в езиците $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, съответно. Да предположим, че $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{=\}$ и $A \cap B = \varnothing$. Нека $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \{A, B\}$, където A и B са едноместни предикати.

Дефиниция 3.3.4. *Обединение (join) на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$* е структурата $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = (A \cup B; R_1, \dots, R_s, P_1, \dots, P_t, A, B, =)$ в езика $\mathcal{L}$, където

(а) A е верен само над елементите на A и подобно B е верен само над елементите на B;

(б) всеки R_i е дефиниран над A като в структурата $\mathcal{A}$ и не е верен, ако някой от аргументите на R_i не е в A и подобно с предикатите P_j са дефинирани като в $\mathcal{B}$ над елементите на B и не е верен, ако някой от аргументите на P_j не е B.

Лема 3.3.5. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са изброими структури и $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. Тогава $DS(\mathcal{C}) \subseteq DS(\mathcal{A})$ и $DS(\mathcal{C}) \subseteq DS(\mathcal{B})$.

3.3.2 Еднозначно представяне на $\Sigma_2^0(D)$ множества

Нека $D \subseteq \mathbb{N}$. Едно множество $M \subseteq \mathbb{N}$ е $\Sigma_2^0(D)$, ако съществува изчислим в D предикат Q, такъв че

$$n \in M \iff \exists a \forall b Q(n, a, b) \ .$$

Дефиниция 3.3.6. [GK02] Ако $M \in \Sigma_2^0(D)$, тогава M е *еднозначно представима*, ако съществува изчислим в D предикат Q със следните свойства:

1. $n \in M \iff \exists a \forall b Q(n,a,b)$;
2. $n \in M \iff$ съществува единствено a, такова че $\forall b Q(n,a,b)$;
3. за всяка двойка $\langle n,a \rangle$ има най-много едно b, такова че $\neg Q(n,a,b)$;
4. за всяко b има единствена двойка $\langle n,a \rangle$, такава че $\neg Q(n,a,b)$;
5. за всяко a има единствено n, за което $\forall b Q(n,a,b)$.

Предикатът Q от горната дефиниция се нарича *еднозначно представяне на M*. Гончаров и Хюсеинов доказват следната лема.

Лема 3.3.7. [GK02] Ако M е ко-безкрайно $\Sigma_2^0(D)$ подмножество на $\mathbb{N}$ и има безкрайно изчислимо в D подмножество S на M, такова че $M \setminus S$ е безкрайно, тогава M има еднозначно представяне.

Нека $\mathcal{A} = (A; R_1, \ldots, R_s, =)$ е изброима структура. Да напомним, че предполагаме, че A е безкрайно. Можем лесно да построим структура $\mathcal{A}^\#$ със същия спектър като $\mathcal{A}$ и такава, че за всяка инективна номерация $f^\#$ на $\mathcal{A}^\#$ и всеки предикат R на $\mathcal{A}^\#$ множеството $f^{\#^{-1}}(R)$ е ко-крайно и има изчислимо безкрайно подмножество S на $f^{\#^{-1}}(R)$, такова че $f^{\#^{-1}}(R) \setminus S$ е безкрайно.

Лема 3.3.8. Има структура $\mathcal{A}^\#$, такава че $DS(\mathcal{A}) = DS(\mathcal{A}^\#)$ и такава, че за всяка инективна номерация $f^\#$ на $\mathcal{A}^\#$ и всеки нетривиален предикат R на $\mathcal{A}^\#$ множеството $f^{\#^{-1}}(R)$ е ко-безкрайно и има изчислимо безкрайно подмножество S на $f^{\#^{-1}}(R)$, такова че $f^{\#^{-1}}(R) \setminus S$ е безкрайно.

3.3.3 Теорема за обръщане на скока

Теорема 3.3.9. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури, за които $DS(\mathcal{A}) \subseteq DS_1(\mathcal{B})$. Тогава съществува структура $\mathcal{C}$, така че $DS(\mathcal{C}) \subseteq DS(\mathcal{B})$ и $DS_1(\mathcal{C}) = DS(\mathcal{A})$.

Нека $\mathcal{A} = (A; R_1, \ldots, R_s, =)$. За всеки предикат R_i разглеждаме нов предикат R_i^c-отрицанието на R_i.

По Лема 3.3.8 може да предположим, че за всяка инективна номерация f на $\mathcal{A}$ и всеки нетривилен предикат R_i множествата $f^{-1}(R_i)$ и $f^{-1}(R_i^c)$ са ко-безкрайни и има изчислими безкрайни множества $S \subseteq f^{-1}(R_i)$ и $P \subseteq f^{-1}(R_i^c)$, така че $f^{-1}(R_i) \setminus S$ и $f^{-1}(R_i^c) \setminus P$ са безкрайни.

Разширяваме $\mathcal{A}$, включвайки отрицанията на предикатите:

$$\overline{\mathcal{A}} = (A; R_1, R_1^c, \ldots, R_s, R_s^c, =).$$

Ясно е, че $DS(\mathcal{A}) = DS(\overline{\mathcal{A}})$, тъй като за всяка номерация f на $\mathcal{A}$ имаме, че $f^{-1}(\mathcal{A}) \equiv_T f^{-1}(\overline{\mathcal{A}})$.

Разглеждаме структурата $\overline{\mathcal{A}}^{\exists\forall}$. Нека X_j е $\exists$-свидетел за $\overline{R}_j$ и Y_j е $\forall$-свидетел за $\overline{R}_j^{\exists}$, $j = 1, \dots, 2s$.

Без ограничение на общността можем да предполагаме, че структурите $\mathcal{B} = (B; P_1, \dots, P_t, =)$ и $\overline{\mathcal{A}}^{\exists\forall}$ са непресичащи се.

Нека $\mathcal{C} = \mathcal{B} \oplus \overline{\mathcal{A}}^{\exists\forall}$. По Лема 3.3.5, $DS(\mathcal{C}) \subseteq DS(\mathcal{B})$. Доказваме, че $DS_1(\mathcal{C}) = DS(\overline{\mathcal{A}})$, използвайки Твърдение 3.3.3 и Лема 3.3.7.

За $DS_1(\mathcal{C}) \subseteq DS(\overline{\mathcal{A}})$, ако $\mathbf{c} \in DS_1(\mathcal{C})$ и g е номерация на $\mathcal{C}$, такава че $\mathbf{c} = \mathrm{d_T}(g^{-1}(\mathcal{C}))'$. Построяваме еднозначна номерация h на $\mathcal{C}$, такава че $h^{-1}(\mathcal{C}) \leq_T g^{-1}(\mathcal{C})$ и с нейна помощ номерация f на $\overline{\mathcal{A}}$, такава че $f^{-1}(\overline{\mathcal{A}}) \leq_T h^{-1}(\mathcal{C})'$ и следователно $f^{-1}(\overline{\mathcal{A}}) \leq_T g^{-1}(\mathcal{C})'$. Тогава, използвайки, че спектърът $DS(\overline{\mathcal{A}})$ е затворен нагоре, то $\mathbf{c} \in DS(\overline{\mathcal{A}})$.

За обратната посока: $\mathrm{DS}(\overline{\mathcal{A}}) \subseteq \mathrm{DS}_1(\mathcal{C})$. Нека $\mathbf{a} \in \mathrm{DS}(\overline{\mathcal{A}})$ и n е номерация на $\overline{\mathcal{A}}$, такава че $\mathbf{a} = \mathrm{d_T}(n^{-1}(\overline{\mathcal{A}}))$. Построяваме инективна номерация f на $\overline{\mathcal{A}}$, така че $f^{-1}(\overline{\mathcal{A}}) \leq_T n^{-1}(\overline{\mathcal{A}})$. Важната част тук е построяването на номерация h на $\mathcal{C}$, такава че $h^{-1}(\mathcal{C})' \leq_T f^{-1}(\overline{\mathcal{A}})$, и следователно $\mathbf{a} \in DS_1(\mathcal{C})$, тъй като скок спектърът $DS_1(\mathcal{C})$ е затворен нагоре. По условие $DS(\overline{\mathcal{A}}) = DS(\mathcal{A}) \subseteq DS_1(\mathcal{B})$ и $\mathrm{d_T}(f^{-1}(\overline{\mathcal{A}})) \in \mathrm{DS}(\overline{\mathcal{A}})$. Следователно за някоя номерация g на $\mathcal{B}$ имаме $f^{-1}(\overline{\mathcal{A}}) \equiv_T (g^{-1}(\mathcal{B}))'$. Полагаме $D = g^{-1}(\mathcal{B})$. Да разгледаме предиката $\overline{R}_j$. Тъй като $f^{-1}(\overline{\mathcal{A}}) \leq_T D'$, имаме, че $f^{-1}(\overline{R}_j) \leq_T D'$. Така $f^{-1}(\overline{R}_j) \in \Sigma^0_2(D)$. За построяването на номерация h на $\mathcal{C}$, такава че $h^{-1}(\mathcal{C})' \leq_T f^{-1}(\overline{\mathcal{A}})$ използваме Лема 3.3.7.

3.4 Някои приложения

Нека $\mathcal{A}^{(n)}$ е n-тият скок на структурата $\mathcal{A}$ дефиниран индуктивно:

$$\mathcal{A}^{(0)} = \mathcal{A}; \qquad \mathcal{A}^{(n+1)} = (\mathcal{A}^{n})'.$$

Ясно е, че $DS_0(\mathcal{A}) = DS(\mathcal{A})$ и $DS_{n+1}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{a}' : \mathbf{a} \in DS_n(\mathcal{A})\}$. Използвайки това и Теорема 3.2.1, може да се види лесно с индукция по n, че за всяко n има структура $\mathcal{A}^{(n)}$, такава че $DS_n(\mathcal{A}) = DS(\mathcal{A}^{(n)})$.

Теорема 3.4.2. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури, такива че $DS(\mathcal{A}) \subseteq DS_n(\mathcal{B})$. Тогава съществува структура $\mathcal{C}$, такава че $DS(\mathcal{C}) \subseteq DS(\mathcal{B})$ и $DS_n(\mathcal{C}) = DS(\mathcal{A})$.

Дефиницията по-горе за n-и скок на спектър се обобщава за произволни изчислими ординали α. Дауни и Найт [DK92] доказват, използвайки много трудна и сложна конструкция, че за всеки изчислим ординал α има структура $\mathcal{A}$ (линейна наредба), такава че $\mathcal{A}$ има α-та скок степен равна на $\mathbf{0}^{(\alpha)}$, но няма β-та скок степен за всяко $\beta < \alpha$. Тук α-та скок степен означава най-малък елемент на α-тия скок спектър на структурата $\mathcal{A}$. Ние [SS09a, SS09b] получаваме като приложение на

Теорема 3.4.2 лесно този резултат за крайни ординали. Да разгледаме структура $\mathcal{B}$, такава че $DS(\mathcal{B})$ съдържа тотални степени над $\mathbf{0}_e^{(n)}$ и няма най-малък елемент и такава, че $\mathbf{0}_e^{(n+1)}$ е най-малък елемент на $DS_1(\mathcal{B})$. Нека $\mathcal{A} = (\mathbb{N}; =, \neq)$. Тогава $DS(\mathcal{A})$ е множеството от всички Тюрингови степени. Ясно е, че $DS(\mathcal{B}) \subseteq DS_n(\mathcal{A})$. От Теорема 3.4.2 следва, че съществува структура $\mathcal{C}$, такава че $DS_n(\mathcal{C}) = DS(\mathcal{B})$. Следователно $\mathcal{C}$ няма n-та скок степен и също k-та скок степен за $k \leq n$. От друга страна, $\mathrm{DS}_{n+1}(\mathcal{C}) = DS_1(\mathcal{B})$ и затова $(n+1)$-вата скок степен на $\mathcal{C}$ е $\mathbf{0}_e^{(n+1)}$. Защо такава структура $\mathcal{B}$ съществува? Да разгледаме номерационната степен $\mathbf{q}$, която е квазиминимална релативно $\mathbf{0}_e^{(n)}$ и $\mathbf{q}' = \mathbf{0}_e^{(n+1)}$. Такава степен може да се построи, релативизирайки теоремата за обръщане на скока на Макевой [McE85]. Нека $\mathcal{B} = G$ е абелева група без торсия от ранг 1 и номерационната степен на характеристиката на групата $\mathbf{s}_G = \mathbf{q}$. Знаем от Глава 2., че $DS(G) = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{s}_G \leq_e \mathbf{a}$ и $\mathbf{a}$ е тотална$\}$. Тъй като $\mathbf{q}$ е квазиминимална релативно $\mathbf{0}_e^{(n)}$, то тя не е тотална и следователно $DS(G)$ няма най-малък елемент. Но най-малката скок степен на G е $\mathbf{s}_G'$, т.е. $\mathbf{0}_e^{(n+1)}$ е най-малкият елемент на $\mathrm{DS}_1(G)$.

Едно лесно приложение на Теорема 3.2.1 е основното свойство на скок на структура. Да разгледаме релация $R \subseteq A^n$. Релацията R е релативно вътрешна Σ_2^0 в $\mathcal{A}$, ако и само ако R е релативно вътрешна Σ_1^0 в $\mathcal{A}'$.

Друго приложение [SS09b] е релативизиран вариант на резултата на Слеман [Sla98] и Венер [Weh98], които независимо един от друг построяват структура със спектър, състоящ се от всички Тюрингови неизчислими степени.

Теорема 3.4.3. [Weh98] Има фамилия от крайни множества, които нямат р.н. номерация, т.е. р.н. универсално множество, и за всяко неизчислимо множество X има номерация, изчислима в X.

Първо релативизираме този резултат.

Теорема 3.4.4. За произволно $B \subseteq \mathbb{N}$ има фамилия $\mathcal{F}$ от множества, които нямат р.н. в B номерация, и за всяко $X >_T B$ има номерация на $\mathcal{F}$, изчислима в X.

Следвайки идея на Калимулин [Kal09b], разглеждаме следната фамилия

$$\mathcal{F} = \{\{0\} \oplus B\} \cup \{\{1\} \oplus \overline{B}\} \cup \{\{n+2\} \oplus F \mid F \text{ крайно множество, } F \neq W_n^B\}.$$

За нея показваме:

Твърдение 3.4.5. Ако $X \subseteq \mathbb{N}$ и универсалното множество U на фамилията $\mathcal{F}$ е р.н. в X, тогава $X >_T B$.

Твърдение 3.4.6. Ако $B <_T X$, то има универсално множество U за фамилията $\mathcal{F}$, такова че $U \leq_T X$.

Теорема 3.4.7. [Sla98][Weh98] Съществува структура $\mathcal{C}$, за която $\mathrm{DS}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} >_T \mathbf{0}\}$.

Релативизираният вариант е следният:

Теорема 3.4.8. За всяко $n \in \mathbb{N}$ и всяка Тюрингова степен $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}^{(n)}$ съществува структура $\mathcal{C}$, за която $\mathrm{DS}_n(\mathcal{C}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} >_T \mathbf{b}\}$.

Ние построяваме първо структура $\mathcal{A}$, такава че $\mathrm{DS}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} >_T \mathbf{b}\}$, използвайки фамилията $\mathcal{F}$ по подобен начин, както е в [Weh98].

Нека $\mathcal{B} = (\mathbb{N}; =, \neq)$. Ясно е, че $\mathbf{b} \in \mathrm{DS}_n(\mathcal{B})$ за всяко $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}^{(n)}$. Така $DS(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{DS}_n(\mathcal{B})$. От Теорема 3.4.2 съществува структура $\mathcal{C}$, такава че $DS_n(\mathcal{C}) = DS(\mathcal{A})$.

В заключение, искаме да отбележим, че Теорема 3.3.9 за обръщане на скока дава метод за пренасяне на интересни свойства на спектрите за n-тите скок спектри.

Глава 4

Строго обръщане на скока

В тази глава представяме един общ резултат с общи условия, досатъчни за една структура да допуска строго обръщане на скока. Показваме няколко класа, за които условията ни могат да се приложат като някои линейни наредби, булеви алгебри, дървета, модели на теории с малко типове и диференциално затворените полета. Тези изследвания са съвместни с Уесли Калверт, Андрей Фролов, Валентина Харизанов, Джулия Найт, Чарлз Маккой и Стефан Вътев. Започнаха, когато повечето от тях посетиха София през 2013 година и са публикувани в статията [CFH⁺18].

4.1 Каноничен скок и строго обръщане на скока

Както видяхме в предишната глава, има различни понятия за обръщане на скока на структура. В тази глава се интересуваме от следното по-силно понятие за обръщане на скока на структура.

Дефиниция 4.1.1. Казваме, че структурата $\mathcal{A}$ допуска *строго обръщане на скока*, ако за всеки оракул $X \subseteq \mathbb{N}$, всеки път когато X' изчислява скока $D(\mathcal{C})'$ на атомарната диаграма на някое копие $\mathcal{C} \cong \mathcal{A}$ на $\mathcal{A}$, то и X изчислява атомарната диаграма $D(\mathcal{B})$ на някое копие $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$.

Забележка 4.1.2. Структурата $\mathcal{A}$ допуска строго обръщане на скока, ако за всяко $X \subseteq \mathbb{N}$ е изпълнено: ако $\mathcal{A}$ има копие, което е ниско относно X, тогава $\mathcal{A}$ има копие, което е изчислимо в X. Тук, под $\mathcal{C}$ е ниско относно X, имаме предвид $D(\mathcal{C})' \leq_T X'$.

Дефиницията на строго обръщане на скока е мотивирана от следния резултат на Дауни и Джокуш [DJ94].

Теорема 4.1.3 (Дауни-Джокуш)**.** Всички булеви алгебри допускат строго обръщане на скока.

Пример 4.1.4 (*Структури с една релация на еквивалентност*)**.** Освен булевите алгебри, пример за строго обръщане на скока са структурите с една релация на еквивалентност и с безкрайно много безкрайни класове на еквивалентност. Всяка такава структура се характеризира с точност до изоморфизъм от броя на класовете на еквивалентност и от броя на елементите им. Известно е [AK00], че такава структура има X-изчислимо копие, ако и само ако множеството Q от двойки (n,k), такива че има поне k класа с големина n, е Σ^0_2 относно X. Ако $\mathcal{A}$ е ниско копие в X, тогава Q е Σ^0_2 относно $\mathcal{A}$, и следователно е Σ^0_2 относно X. Тогава $\mathcal{A}$ има X-изчислимо копие.

Твърдение 4.1.5. Нека $\mathcal{A}$ е структура с една релация на еквивалентност с безкрайно много безкрайни класове на еквивалентност. Тогава $\mathcal{A}$ допуска строго обръщане на скока.

Друг пример са абелевите p-групи с дължина ω, където p е просто число. Абелева p-група е абелева група, в която всеки ненулев елемент има ред p^n за някое n.

Пример 4.1.6 (*Абелеви p-групи с дължина ω*)**.** От теоремата на Улм, една изброима абелева p-група се характеризира с точност до изоморфизъм от Улм редицата и размерността на делимата част, виж [Kap69]. Една абелева p-група с дължина ω може да се представи като директна сума на $Z_{p^{n+1}}$, за крайно n, и Прюферовата група Z_{p^∞}. Тогава Улм редицата е $(u_n(G))_{n\in\omega}$, където $u_n(G)$ е броят на членовете на директната сума от вида $Z_{p^{n+1}}$. Размерността на делимата част е броят на членовете на директната сума от вида Z_{p^∞}. Добре известно е [AK00], че ако G е абелева p-група с дължина ω, с делима част от безкрайна размерност, то G има X-изчислимо копие тогава и само тогава, когато множеството $Q = \{(n,k) : u_n(G) \geq k\}$ е Σ^0_2 релативно X. Съвсем аналогично на предишния пример се вижда, че такива групи допускат строго обръщане на скока, защото ако G е ниска в X, то множеството Q е Σ^0_2 релативно X.

Твърдение 4.1.7. Нека G е абелева p-група с дължина ω, такава че делимата част има безкрайна размерност. Тогава G допуска строго обръщане на скока.

Не всички изброими структури допускат строго обръщане на скока, както се вижда от примера на Джокуш и Соар [JS91] на ниски линейни наредби без изчислимо копие.

Пример 4.1.8. Джокуш и Соар [JS91] показват, че има ниски линейни наредби без изчислими копия.

Пример 4.1.9. Ако T е ниско пълно разширение на Пеановата аритметика PA, то T има модел $\mathcal{A}$, такъв че атомарната диаграма $D(\mathcal{A})$, и дори пълната диаграма $D^c(\mathcal{A})$, са изчислими в T. Тогава $D(\mathcal{A})'$ е Δ^0_2. От добре известен резултат на Тененбаум следва, че тъй като $\mathcal{A}$ е непременно нестандартен модел на PA, тогава $\mathcal{A}$ няма изчислимо копие.

В предната глава използвахме нашата дефиниция на скок на структура за да докажем теореми за обръщане на скока. Тук е по-удобно да използваме дефиницията на Монталбан за скок на структура от [Mon09], но модифицирана в [Mon12], с цел да се покаже, че е еквивалентна на нашето понятие.

Дефиниция 4.1.10 (Каноничен скок)**.** За една структура $\mathcal{A}$, *каноничният скок* е структура $\mathcal{A}' = (\mathcal{A}, (R_i)_{i\in\omega})$, където $(R_i)_{i\in\omega}$ са релации, от които в $\mathcal{A}$ можем равномерно да изчислим всички Σ_1^c релации в $\mathcal{A}$, и по индекса i на релацията R_i можем да изчислим местността на R_i и Σ_1^c формулата (без параметри), която я определя в $\mathcal{A}$.

Забележка 4.1.11. Множетсвото $\varnothing'$ е включено в каноничния скок. Можем да определим фамилия от релации $R_{f(e)}$, където f е изчислима функция и още $R_{f(e)}$ е истина, ако $e \in \varnothing'$ и лъжа — в противен случай. Можем да определим $R_{f(e)}$ със Σ_1^c формула $\bigvee_s \tau_{e,s}$, където $\tau_{e,s}$ е $\top$, ако e е влязло в $\varnothing'$ на стъпка s, и $\bot$ — иначе.

Твърдението, което следва, показва, че можем да изразим строгото обръщане на скока в термините на копия на каноничния скок $\mathcal{A}'$ на структурата.

Твърдение 4.1.14 (4.1.14)**.** За всяка структура $\mathcal{A}$ следните са еквивалентни:

(1) $\mathcal{A}$ допуска строго обръщане на скока.

(2) За всяко множество X, ако X' изчислява копие на каноничния скок $\mathcal{A}'$ на $\mathcal{A}$, тогава X изчислява копие на $\mathcal{A}$.

(3) За всеки две множества X и Y, ако $X' \equiv_T Y'$ и Y изчислява копие на $\mathcal{A}$, то също и X изчислява копие на $\mathcal{A}$.

4.2 Общ резултат

В тази секция представяме общи условия, достатъчни да гарантират, че структурата допуска строго обръщане на скока.

Дефиниция 4.2.1. За всяка изброима фамилия S от множества, *номерация на S* е множество R от двойки (i,k), такива че S е фамилията от множества $R_i = \{k : (i,k) \in R\}$. Ако $A = R_i$, казваме, че i е *R-index* за A.

Дефиниция 4.2.2. 1. *B_n-формула* е крайна булева комбинация от крайни Σ_n^0-формули.

2. *B_n-тип* е множеството от B_n-формули от максимален тип, реализиращ се в някоя структура за езика.

Дефиниция 4.2.3. Нека S е множеството от B_1-типове, включващо всички тези, които се реализират в структурата $\mathcal{A}$, и нека R е номерация на S. *R-етикетиране на $\mathcal{A}$* е функция, изпращаща всяка n-торка $\overline{a}$ на $\mathcal{A}$ в R-индекс на B_1-типа на $\overline{a}$.

Интересуваме се от структури $\mathcal{A}$ със следното свойство.

Дефиниция 4.2.4 (Ефективно попълване на типовете)**.** Структурата $\mathcal{A}$ удовлетворява *ефективно попълване на типовете*, ако има равномерна ефективна процедура, която по всеки B_1-тип $p(\overline{u})$, реализиращ се в $\mathcal{A}$, и по всяка екзистенциална формула $\varphi(\overline{u},x)$, такава че $(\exists x)\varphi(\overline{u},x) \in p(\overline{u})$, дава B_1-тип $q(\overline{u},x)$ с $\varphi(\overline{u},x) \in q(\overline{u},x)$ и такъв, че ако $\overline{a}$ от $\mathcal{A}$ реализира $p(\overline{u})$, тогава някое b в $\mathcal{A}$ реализира $q(\overline{a},x)$.

Нашият общ резултат е:

Теорема 4.2.5. Структурата $\mathcal{A}$ допуска строго обръщане на скока, ако удовлетворява следните условия:

(1) Има изчислима номерация R на множество от B_1-типове, което включва всички, реализиращи се в $\mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A}$ удовлетворява условието за ефективно попълване на типовете.

(3) За всяко множество X, ако X' изчислява скока на някое копие на $\mathcal{A}$, то X' изчислява копие на $\mathcal{A}$ с R-етикетиране.

Освен това, ако $\mathcal{C}$ е копие на $\mathcal{A}$ с X'-изчислимо R-етикетиране, тогава има X-изчислимо копие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ с X'-изчислим изоморфизъм от $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$.

Забележка 4.2.6. За някои структури $\mathcal{A}$ условие (3) се удовлетворява по по-силен начин. За всяка $\mathcal{C} \cong \mathcal{A}$ $D(\mathcal{C})'$ изчислява R-етикетиране на $\mathcal{C}$. Следователно, ако $\mathcal{A}$ е ниска, има Δ^0_2 изоморфизъм от $\mathcal{A}$ до изчислимото копие.

В някои примери $\mathcal{A}$ има ефективно попълване на типовете, защото удовлетворява едно свойство, което наричаме *слаба 1-наситеност*. За да опишем това свойство, имаме нужда от следната дефиниция.

Дефиниция 4.2.7. Нека $p(\overline{u})$ и $q(\overline{u},x)$ са B_1-типове. Казваме, че $q(\overline{u},x)$ е *генериран от формули от $p(\overline{u})$ и екзистенциални формули*, ако $q(\overline{u},x) \supseteq p(\overline{u})$, и за всяка универсална формула $\psi(\overline{u},x)$ (пишем $neg(\psi)$ за естествената екзистенциална формула, логически еквивалентна на $\neg\psi$), имаме че $\psi(\overline{u},x) \in q(\overline{u},x)$, ако и само ако има крайна конюнкция $\chi(\overline{u},x)$ от екзистенциални формули в $q(\overline{u},x)$, такива че формулата $(\exists x)[\chi(\overline{u},x)\ \&\ neg(\psi(\overline{u},x))]$ не е в $p(\overline{u})$.

Дефиниция 4.2.8. Структурата $\mathcal{A}$ е *слабо* 1*-наситена*, ако $p(\overline{u})$ е B_1-тип на n-торката $\overline{a}$, и $q(\overline{u}, x)$ е B_1-тип, генериран от формули от $p(\overline{u})$ и екзистенциални формули, то $q(\overline{a}, x)$ се реализира в $\mathcal{A}$.

Лема 4.2.9. Нека $p(\overline{u})$ е B_1-тип. Нека $q(\overline{u}, x)$ е B_1-тип, който е генериран от формули от $p(\overline{u})$ и екзистенциални формули. Тогава $q(\overline{u}, x)$ е съвместим с всички разширения на $p(\overline{u})$ до пълен (максимален) тип над променливите $\overline{u}$.

Твърдение 4.2.10. Ако $\mathcal{A}$ е слабо 1-наситена, то тя удовлетворява условието за ефективно попълване на типовете.

4.3 Примери

4.3.1 Линейни наредби

Фролов доказва в [Fro06], [Fro10], [Fro12] строго обръщане на скока за два специални класа линейни наредби. Ние показваме, че нашите условия са изпълнени за тях.

Първо описваме възможните B_1-типове на линейни наредби. Всеки B_1-тип $p(\overline{u})$ се определя еднозначно от големината на интервалите на $\overline{u}$. Можем да построим изчислима номерация R на всички B_1-типове, реализиращи се в линейни наредби така, че от индекса i на B_1-типа R_i ефективно се определят дължините на интервалите. Всеки безкраен интервал може да разделим на два безкрайни, от което получаваме слаба 1-наситеност.

Твърдение 4.3.1. Нека $\mathcal{A}$ е линейна наредба, такава че всеки безкраен интервал може да се раздели на две безкрайни части. Тогава $\mathcal{A}$ е слабо 1-наситена.

Ето и по-простият ни резултат за линейни наредби.

Теорема 4.3.2. Нека $\mathcal{A}$ е линейна наредба, в която всеки елемент лежи в максимално дискретно наредено крайно множество. Ако има крайна граница N на големината на тези множества, то $\mathcal{A}$ допуска строго обръщане на скока. Нещо повече, ако $\mathcal{A}$ е ниска над X, тогава има X-изчислимо копие и изоморфизим, който е Δ_2^0 релативно X.

В такива линейни наредби Δ_2^0 в $\mathcal{A}$ е да кажем, че интервалът (a, b) има големина n за някое фиксирано n. Σ_1^0 в $\mathcal{A}$ е да кажем, че интервалът е безкраен, просто питаме дали интервалът има големина повече от N.

Следващият резултат, Теорема 4.3.3, е по-сложен. Първо ще резюмираме някои добре известни подходи за линейни наредби. Релацията *блок-еквивалентност* $\sim$ в линейна наредба $\mathcal{A}$ е дефинирана така: $a \sim b$, ако $[a, b]$ е краен. За всяка линейна наредба $\mathcal{A}$, всеки клас на еквивалентност на тази релация е краен интервал или от тип ω (типа наредба на естествените числа), ω^* (типа наредба на целите отрицателни числа) или $\zeta = \omega^* + \omega$ (типа наредба на целите числа). Фактор-структурата $\mathcal{A}/_\sim$, наречена кондензация на $\mathcal{A}$, е също линейна наредба, в която различните елементи са класовете на еквивалентност за $\sim$.

В Теорема 4.3.3 за дадена $\mathcal{A}$, която е ниска за X, не е ясно дали самата $\mathcal{A}$ има R-етикетиране, което е Δ_2^0 относно X. Но ние построяваме копие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ с такова R-етикетиране. С η означаваме типа наредба на рационалните числа.

Теорема 4.3.3. Нека $\mathcal{A}$ е линейна наредба, за която $\mathcal{A}/_\sim$ има тип гъста наредба без крайни точки η. Да предположим също, че в $\mathcal{A}$ всеки безкраен интервал съдържа произволно дълги крайни дискретни подинтервали. Тогава $\mathcal{A}$ допуска строго обръщане на скока. Освен това, ако $\mathcal{A}$ е ниска над X, тогава има X-изчислимо копие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ и изоморфизъм, който е Δ_3^0 релативно X от $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$.

Първо разглеждаме B_1-типовете на линейната наредба и построяваме изчислима номерация R на B_1-типовете, така че от индекса i на B_1-типа R_i можем ефективно да получим големината на интервалите.

Лема 4.3.4. Нека $\mathcal{A}$ е ниска над X. Има копие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ с R-етикетиране, което е Δ_2^0 относно X. Освен това има изоморфизъм f от $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$, такъв че f е Δ_3^0 относно X.

На стъпка s строим (използвайки $\Delta_2^0(X)$ оракул) апроксимация $\mathcal{A}_{n,s}$ на линейната наредба с първите n елемента, на които интервалите са или коректно етикетирани с крайна дължина най-много s, или имат етикет ∞. Имаме поднаредба $\mathcal{B}_s$ на $\mathcal{B}$, в която етикетите са дължината на интервалите. Така построяваме копие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ с R-етикетиране, което е Δ_2^0 относно X и изоморфизъм f, който е $\Delta_3^0(X)$.

Сега по дадена $\mathcal{A}$, ниска за X, лемата ни дава копие $\mathcal{B}$ с R-етикетиране, Δ_2^0 относно X, и изоморфизъм f от $\mathcal{B}$ към $\mathcal{A}$, който е Δ_3^0 относно X. По Теорема 4.2.5, има X-изчислимо копие $\mathcal{C}$ с изоморфизъм g от $\mathcal{C}$ към $\mathcal{B}$, което е Δ_2^0 относно X. Така $f \circ g$ е изоморфизъм от $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}$, който е Δ_3^0 относно X.

4.3.2 Булеви алгебри

Както споменахме в Глава 1., Дауни и Джокуш [DJ94] показват, че всяка ниска булева алгебра $\mathcal{A}$ има изчислимо копие $\mathcal{B}$. В [KS00] е показано, че изоморфизмът между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ е Δ_4^0. Стоб доказва в непубликуван резултат, че това е възможното най-доброто, в смисъл, че има булева алгебра $\mathcal{A}$, такава че никой Δ_3^0 изоморфизъм не изпраща $\mathcal{A}$ в изчислимото копие $\mathcal{B}$.

Атом в булева алгебра е ненулев минимален елемент на индуцираната частична наредба ($x \leq y \iff x \cap y = x$), т.е. x е атом, ако $(\forall y)(y < x \rightarrow$

$y = 0$). 1-атом е такъв елемент, който не може да се представи като точна горна граница ($\cup$) на краен брой атоми, но за всяко y: xy или $x(-y)$ се представя. За булевата алгебра $\mathcal{B}$ елементът *a има размер n,* ако е точна горна граница на n атома, в противен случай се нарича безкраен. Ние разглеждаме безкрайни булеви алгебри без 1-атоми, така че всеки безкраен елемент се разделя на два безкрайни елемента.

Лема 4.3.5. Ако $\mathcal{A}$ е булева алгебра без 1-атоми, то $\mathcal{A}$ е слабо 1-наситена.

Твърдение 4.3.6. Да предположим, че $\mathcal{A}$ е безкрайна булева алгебра без 1-атоми. Тогава $\mathcal{A}$ допуска строго обръщане на скока. Освен това, ако $\mathcal{A}$ е ниска относно X, има X-изчислимо копие $\mathcal{B}$ с изоморфизъм Δ^0_3 релативно X.

Лема 4.3.7. Нека $\mathcal{A}$ е булева алгебра без 1-атоми. Ако $\mathcal{A}$ е ниска относно X, тогава X' изчислява копие $\mathcal{B}$ с R-етикетиране. Освен това има изоморфизъм f от $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$, който е Δ^0_3 относно X.

4.3.3 Дървета

Ние разглеждаме специални класове от поддървета на $\omega^{<\omega}$. Дърветата ни се разклоняват надолу. Коренът е $\varnothing$. За езика на дърветата използваме функцията непосредствен предшественик, където $\varnothing$ — коренът — свой непосредствен предшественик. Разглеждаме два специални класа от дървета. Първият е съвсем прост.

Твърдение 4.3.8. Нека $\mathcal{A}$ е дърво, поддърво на $\omega^{<\omega}$, такова че коренът е безкраен, т.е. има безкрайно много наследници, и всеки безкраен възел има само краен брой наследници листа, а останалите наследници са безкрайни. Тогава $\mathcal{A}$ допуска строго обръщане на скока.

B_1-типът на n-торката $\overline{a}$ е определен от поддървото, генерирано от $\overline{a}$ и етикети "безкраен" или "листо" на възлите. Така получаваме изчислима номерация на всички възможни крайни етикетирани поддървета. За слабата 1-наситеност разглеждаме B_1-типа $p(\overline{a}, x)$, генериран от формули, верни над $\overline{a}$ и екзистенциални формули. Типът може да разположи x в поддърво, генерирано от $\overline{a}$ и в този случай се реализира. Типът може да разположи x под някой безкраен a_i, или на ниво, което не е под никое a_i и пак се реализира от нов безкраен елемент. Показваме, че ако $\mathcal{A}$ е ниско, то има Δ^0_2 R-етикетиране на $\mathcal{A}$.

Вторият клас дървета е малко по-сложен. Ако T е поддърво на $\omega^{<\omega}$ и $a \in T$, с T_a означаваме поддървото на T с корен a.

Дефиниция 4.3.9. За възела a в едно дърво T,

(1) казваме, че a е *краен*, ако T_a е крайно,

(2) казваме, че a е *безкраен*, ако T_a е безкрайно. (За дърветата, разгледани по-долу, ако a е безкраен ще искаме не само T_a да е безкраен, но също и a да има безкрайно много наследници, така удовлетворяваме дефиницията, която използваме в Твърдение 4.3.8.)

Означение. Нека a е краен, с поддърво T_a под a. Нека T_a^1 е възможно преетикетиране на възлите в T_a, в което има поддърво с възли с етикети ∞. С $(T_a^1)^*$ означаваме безкрайно дърво, получено в резултат от разширяването на етикетираното дърво T_a^1 , така че всички нови възли в $(T_a^1)^*$ са с етикети ∞, и всеки възел с етикет ∞ има безкрайно много наследници с етикети ∞. (Няма краен възел в T_a^1, който да има наследник в $(T_a^1)^*$.)

Резултатът за втория вид дървета е следният.

Твърдение 4.3.10. Нека T е поддърво на $\omega^{<\omega}$ такова, че коренът му е безкраен и всеки безкраен възел a има само краен брой крайни наследници. Да предположим още, че за всеки безкраен възел a, за всеки краен наследник b, ако T_b^1 е възможно преетикитеране на T_b, което прави всички възли на даденото поддърво безкрайни, то има безкрайно много наследници b_n на a, такива че $T_{b_n} \cong (T_b^1)^*$. Тогава T допуска строго обръщане на скока.

Ние доказваме, че $\mathcal{A}$ е слабо 1-наситена. Имаме изчислима номерация на възможните крайни етикетирани поддървета, и следователно на B_1-типовете, реализиращи се в дървета от този вид. Нека R е тази изчислима номерация на B_1-типовете.

Лема 4.3.11. Има копие $\mathcal{B}$ на T с Δ_2^0 R-етикетиране.

Прилагайки Теорема 4.2.5, получаваме изчислимо копие на T.

4.3.4 Модели на теории с малко B_1-типове

Лерман и Шмерл [LS79] намират условия, при които една $\aleph_0$-категорична теория T има изчислим модел. Те предполагат, че теорията е аритметична, т.е. Δ_N^0, за някое N и $T \cap \Sigma_{n+1}$ е Σ_n^0 за всяко $1 \le n < N$. Найт показва [Kni94], че условието за T да е аритметична може да се изпусне, но вместо това трябва $T \cap \Sigma_{n+1}$ да е Σ_n^0, равномерно в n. Доказателството в [LS79] дава следното.

Теорема 4.3.12 (Лерман-Шмерл)**.** Нека T е $\aleph_0$-категорична теория, която е Δ_N^0 и да предположим, че за всяко $1 \le n < N$, $T \cap \Sigma_{n+1}$ е Σ_n^0. Тогава T има изчислим модел.

За да докажат това, Лерман и Шмерл показват следното.

Лема 4.3.13. За всяко $n < N$, ако $\mathcal{A}$ е модел, чиято B_{n+1}-диаграма е изчислима в X', и $T \cap \Sigma_{n+2}$ е Σ_1^0 в X, тогава има модел $\mathcal{B}$, чиято B_n-диаграма е изчислима в X.

Нека T е като в теоремата на Лерман-Шмерл. Нека $\mathcal{A}$ е модел на T, който е нисък относно X. Тогава Σ_1 диаграмата на $\mathcal{A}$ е изчислима в X'. Разбира се, $T \cap \Sigma_2$ е Σ_1^0, и следователно Σ_1^0 относно X. От лемата, $\mathcal{A}$ има X-изчислимо копие. Така получаваме следното.

Теорема 4.3.14. Нека T е теория от първи ред в изчислим език, такава че $T \cap \Sigma_2$ е Σ_1^0. Да предположим още, че за всяка n-торка от променливи $\overline{x}$ има само краен брой B_1-типове над $\overline{x}$, съвместими с T. Тогава всеки модел $\mathcal{A}$ на T допуска строго обръщане на скока. Освен това, ако $\mathcal{A}$ е ниска над X, тогава има X-изчислимо копие $\mathcal{B}$ с изоморфизъм, който е Δ_2^0 относно X.

Първо показваме, че има изчислима номерация R на всички B_1-типове. После, показваме, че $\mathcal{A}$ е слабо 1-наситена. И доказваме следната лема.

Лема 4.3.15. Ако $\mathcal{A}$ е ниска над X, тогава има R-етикетиране на $\mathcal{A}$, което е Δ_2^0 относно X.

Накрая прилагаме Теорема 4.2.5 за да получим X-изчислимо копие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ и изоморфизъм от $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$, който е Δ_2^0 относно X.
Да отбележим, че има теории, които не са $\aleph_0$-категорични, но удовлетворяват условията от Теорема 4.3.14.

4.3.5 Диференциално затворени полета

DF_0

Диференециално поле е поле, с една или повече производни, удовлетворяващи следните условия:

1) $\delta(u + v) = \delta(u) + \delta(v)$ и

2) $\delta(u \cdot v) = u \cdot \delta(v) + \delta(u) \cdot v$.

Ние разглеждаме диференциално затворени полета DCF_0 с характеристика 0 и с производна δ на една променлива. Тривиален пример за диференциално поле е $\mathbb{Q}$, с първа производна, изпращаща всеки елемент в 0.

Ако a е елемент на диференциално поле K, тогава *a генерира* едно диференциално поле $F \subseteq K$, където елементите на F се получават от a със затваряне относно събиране, умножение, изваждане и диференциране.

DCF_0

Грубо казано, *диференциално затворено поле DCF* е диференциално поле, в което всеки диференциален полином има корени. А. Робинсон показва, че теорията DCF_0 допуска елиминация на квантори. Блум предлага изчислимо множество от аксиоми, показвайки, че теорията е разрешима и следователно елиминацията на квантори е ефективна. Блум показва също, че DCF_0 е ω-стабилна. Тогава от общи теоретико-моделни резултати следва, че съществуват единствени прости модели над произволно множество (виж Сакс [Sac10]).

Диференциален полиноми

Ние разглеждаме диференциално затворени полета DCF_0 с характеристика 0 и с производна δ на една променлива. Тривиален пример за диференциално поле е $\mathbb{Q}$, с първа производна, изпращаща всеки елемент в 0. Един диференциален полином $p(x)$ над диференциално поле K може да се разглежда като алгебричен полином над $K[x, \delta(x), \delta^{(2)}(x), \dots, \delta^{(n)}(x)]$, за някое n. Нека $K\langle x\rangle$ е множеството от диференциалните полиноми над K. Отначало нека K е $\mathbb{Q}$, където $\delta(q) = 0$, за всяко $q \in \mathbb{Q}$. По-нататък, K е крайно генерирано разширение на $\mathbb{Q}$. Диференциалните полета удовлетворяват правилото за диференциране на частно — това лесно се извежда от правилото за диференциране на произведение. Оттук следва, че ако a е елемент от диференциално поле, разширяващо K, и F е диференциално подполе, генерирано над K с a, тогава всеки елемент на F може да се представи във формата $\frac{p(a)}{q(a)}$, където $p(x), q(x) \in K\langle x\rangle$.

Дефиниция 4.3.16 (Ред)**.** За $p(x) \in K\langle x\rangle$: *редът* на $p(x)$ е най-голямото n, за което $\delta^{(n)}(x)$ участва в $p(x)$. Редът на полинома 0 е ∞.

Дефиниция 4.3.17 (Степен, ранг, ред на рангове)**.** *Степента* на $p(x)$ е най-голямата степен k, с която $\delta^{(n)}(x)$ участва в $p(x)$, ако $p(x)$ е от краен ред n.

Ранг на $p(x)$ е наредена двойка (n, k), където n е редът, а k е степента. Ранговете подреждаме лексикографски.

Дефиниция 4.3.18. Един диференциален полином $p(x) \in K\langle x\rangle$ от ред n се нарича *неразложим*, ако е неразложим, разглеждан като алгебричен полином на $K[x, \delta(x), \dots, \delta^{(n)}(x)]$ (считаме полиномът 0 за неразложим.)

Аксиомите на Блум за DCF_0

Аксиомите на Блум казват, че диференциално затворено поле (с характеристика 0) и с производна на една променлива е диференциално поле K, такова че:

(1) за всеки два полинома $p(x), q(x) \in K\langle x\rangle$, такива че редът на $q(x)$ е по-малък от реда на $p(x)$, има x, удовлетворяващо $p(x) = 0$ и $q(x) \neq 0$;

(2) ако $p(x)$ има ред 0, $p(x)$ има корен.

Аксиома (2) казва, че K е алгебрично затворено.

Типове

Искаме да изучим типовете на произволен брой променливи, реализиращи се в моделите на DCF_0. За една променлива x, всеки тип над $\varnothing$ (т.е. без параметри) е детерминиран от един неразложим диференциален полином $p(x) \in \mathbb{Q}\langle x\rangle$. Ако $p(x) \in \mathbb{Q}\langle x\rangle$ е неразложим от степен n, тогава съответният тип се състои от формули, които се извеждат от аксиомите на DCF_0, формулата $p(x) = 0$ и още формули $q(x) \neq 0$, за $q(x) \in \mathbb{Q}\langle x\rangle$ от ред по-малък от n. Формулите $q(x) \neq 0$, за $q(x) \in \mathbb{Q}\langle x\rangle$ от ред по-малък от n, например $x, \delta(x), \delta^{(2)}(x), \ldots, \delta^{(n-1)}(x)$ са алгебрически независими над $\mathbb{Q}$. Позволен е случаят, в който $p(x)$ е 0 полином, който има ред ∞. В този случай съответният тип λ_p се състои от формули, логически следствия на аксиомите на DCF_0 и формулата $q(x) \neq 0$, за $q(x)$ от всеки краен ред.

Съвсем подобно за диференциално поле K, всеки тип над K (реализиращ се в някое разширение на K до модел на DCF_0) е детерминиран от диференциален полином $p(x) \in K\langle x\rangle$. Ако $p(x)$ е неразложим от ред n, съответният му тип $\lambda_{K,p}$ се състои от формули, които се извеждат от аксиомите на DCF_0, атомарната диаграма на K, формулата $p(x) = 0$ и още формули $q(x) \neq 0$ от ред по-малък от n. Формулите $q(x) \neq 0$, взети заедно, например $x, \delta(x), \delta^{(2)}(x), \ldots, \delta^{(n-1)}(x)$, са алгебрически независими над K.

Твърдение 4.3.19. [Sac10]

1. Ако $p(x) \in \mathbb{Q}\langle x\rangle$ е неразложим, съответният тип λ_p е пълен (максимален) над $\varnothing$. Нещо повече, всички типове над $\varnothing$ (с променлива x) имат тази форма.

2. За диференциално поле K, ако $p(x) \in K\langle x\rangle$ е неразложим, тогава $\lambda_{K,p}$ е пълен (максимален) над K, и всички типове над K (с променлива x) имат тази форма.

Сред типовете на една променлива (над $\varnothing$, или над K), има единствен тип получен от полинома 0, който е *диференциално трансцедентен*. Другите типове, получени от диференциални полиноми от краен ранг, са *диференциално алгебрични*.

Типове на няколко променливи

Ние можем да детерминираме един тип на променливите $(x_1, \ldots, x_n)$ разглеждайки типа с променлива x_1 (над $\varnothing$), типа на x_2 над x_1, типа на

x_3 над (x_1, x_2), и т.н. За да опишем един тип с променливи $(x_1, \dots, x_n)$, ние си представяме едно голямо диференциално поле M и раглеждаме различни елементи и диференциални подполета. Типът на x_1 е λ_{p_1} за някой неразложим полином $p_1 \in \mathbb{Q}\langle x_1 \rangle$. Нека K_1 е диференциално подполе на M, генерирано от x_1 над $\mathbb{Q}$, където x_1 удовлетворява λ_{p_1} в M. Нека K_i е генерирано от $x_1, \dots, x_i$, типът на x_{i+1} над K_i е $\lambda_{K_i, p_{i+1}}$ за някой неразложим $p_{i+1} \in K_i\langle x_{i+1} \rangle$, тогава K_{i+1} е диференциално подполе на M, генерирано от x_{i+1} над K_i.

Към строго обръщане на скока

Маркер и Р. Милър [MM17] показват, че всеки изброим модел на DCF_0 допуска строго обръщане на скока. Те дават метод за кодиране произволен изброим неориентиран граф в модел на DCF_0. Нашата цел е да получим този резултат, използвайки нашите общи условия за строго обръщане на скока. Сред изброимите модели на DCF_0, само наситеният е слабо 1-наситен. Затова трябва да покажем ефективно попълване на типовете. Има лема в [MM17], която казва точно това. Най-трудната задача тук е да построим изчислима номерация на B_1-типовете. Ние построяваме изчислима номерация на всички типове, които се реализират в моделите на DCF_0, следователно и на B_1-типовете. От елиминацията на кванторите, можем ефективно от безкванторните типове $\lambda(\overline{x})$ да преминем към пълните типове, генерирани от $DCF_0 \cup \lambda(\overline{x})$. Така, достатъчно е да номерираме само безкванторните типове. Като получим тази номерация, лесно показваме, че за всеки модел на $\mathcal{A}$, $D(\mathcal{A})'$ изчислява R-етикетиране на $\mathcal{A}$ и прилагаме Теорема 4.2.5.

Изчислима номерация на типовете

Теорията DCF_0 е разрешима и всички типове са изчислими. Но Т. Милар [Mil78] дава пример на разрешима теория T, на която всички типове са изчислими, но тя няма изчислима номерация на типовете. Разглеждаме реализация на безкванторните типове в диференциално поле K, което не е диференциално затворено, имайки предвид, че една n-торка, реализираща $\lambda(\overline{x})$ в K, ще реализира съответните пълни(максимални) типове генерирани от $DCF_0 \cup \lambda(\overline{x})$ във всяко разширение на K до модел на DCF_0. Първо, даваме процедура за една променлива x. Определяме тип $\lambda(x)$, съответен на всеки диференциален полином $p(x) \in \mathbb{Q}\langle x \rangle$, неразложим или не. Нека $(\varphi_s)_{s \in \omega}$ е изчислим лист на атомарните формули на променлива x. На всяка стъпка добавяме към $\lambda(x)$ крайно много формули, винаги проверявайки съвместимостта с DCF_0.

На стъпка 0 слагаме в $\lambda(x)$ само формулата $p(x) = 0$, предполагайки, че е съвместима. Също определяме реда на $p(x)$. На стъпка s решаваме дали φ_s или нейното отрицание да добавим към $\lambda(x)$. Ако $p(x)$ е неразложим, ще има доказателство на точно една от φ_s, $\neg\varphi_s$ от DCF_0, $p(x) = 0$ и формули $q(x) \neq 0$, за $q(x) \in \mathbb{Q}\langle x\rangle$ с ред по-малък от $p(x)$. Така търсим доказателство. Да бъде разложим е р.н. и ако $p(x)$ е разложим, евентуално ще го видим. Така или търсим доказателство за $\pm\varphi_s$ или откриваме, че $p(x)$ е разложим. Ако намерим доказателство на φ_s (или $\neg\varphi_s$), добавяме тази формула в нашия тип, ако е съвместима. Ако видим, че $p(x)$ е разложим, добавяме φ_s, ако е съвместима с DCF_0. Така конструираме тип λ, съответен на всеки $p \in \mathbb{Q}\langle x\rangle$. Ако p е неразложим, то $\lambda = \lambda_p$. Разглеждайки полиномите един по един, получаваме всички типове на една променлива.

Интуитивно, искаме за повече променливи да приложим метода, описан по-горе. Но полетата зависят от тези полиноми и затова използваме по-формален метод. Един тип на n променливи отговаря на n-торка от формални диференциални полиноми $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n)$. Тук $p_1(x_1)$ е един истински диференциален полином с коефициенти в $\mathbb{Q}$. За $i \geq 1$, $p_{i+1}(x_{i+1})$ изглежда като диференциален полином, но коефициентите му са от K_i^F с формални имена за възможните елементи на диференциално поле, генерирано от елементите $x_1, \ldots, x_i$. С индукция по i дефинираме K_i^F и $K_i^F\langle x_{i+1}\rangle$:

Дефиниция 4.3.20.

1. $K_0^F = \mathbb{Q}$, и $K_0^F\langle x_1\rangle = \mathbb{Q}\langle x_1\rangle$,
2. $K_i^F\langle x_{i+1}\rangle$ е множеството от формални изрази, което изглежда като диференциален полином над променливата x_{i+1}, но има коефициенти в K_i^F,
3. K_{i+1}^F съдържа изрази от вида $\frac{r(x_{i+1})}{s(x_{i+1})}$, където $r, s \in K_i^F\langle x_{i+1}\rangle$.

За да получим изчислима номерацията на типовете, показваме серия от леми, които дават *ефективна процедура* по дадено диференциално поле K:

- равномерно в n можем да номерираме n-торките $p_1(x_1), \ldots, p_n(x_n)$, където $p_{i+1}(x_{i+1}) \in K_i^F\langle x_{i+1}\rangle$;
- по тип $\lambda(x)$ над K, дава диференциално поле $K' \supseteq K$, което е генерирано над K от елемент x, реализиращ λ.
- по даден $p \in K_i^F\langle x_{i+1}\rangle$ и диференциално поле K_i, генерирано от елементите $x_1, \ldots, x_i$, определя дали за p коефициентите имат стойност в K_i, и ако е така, идентифицира p с елемент на $K_i\langle x_{i+1}\rangle$;
- по диференциален полином $p(x)$ над K, номерира формулите $\varphi(x)$ (с параметри от K) от DCF_0, $D(K)$, $p(x) = 0$, и $q(x) \neq 0$, за q от по-нисък ред;

- по диференциален полином $p(x)$ над K, номерира доказателствата от формулите $\varphi(x)$ (с параметри от K) от DCF_0, $D(K)$, $p(x) = 0$, и $q(x) \neq 0$, за q от по-нисък ред;
- по $p(x) \in K\langle x\rangle$, номерира типа $\lambda(x)$, за x над K, и ако $p(x)$ е неразложим, то $\lambda(x) = \lambda_{K,p}$;
- номерира разложимите полиноми $p(x)$ над K;
- равномерно по n номерира типовете на n променливи;
- за всяка n-орка $\overline{k}$ в K, DCF_0 заедно с типа на $\overline{k}$ генерира пълен тип, който се реализира от $\overline{k}$ във всяко разширение на K до модел на DCF_0;
- за формула $\varphi(\overline{k}, x)$ (с параметри $\overline{k}$ в K), определя дали $\varphi(\overline{k}, x)$ е съвместима с $DCF_0 \cup D(K)$;
- по даден $p(x) \in K\langle x\rangle$, номерира типа $\lambda(x)$ за x над K. Освен това, ако $p(x)$ е неразложим, то $\lambda(x) = \lambda_{K,p}$.

Твърдение 4.3.32. Има изчислима номерация R на пълните типове, реализиращи се в модели на DCF_0.

С помощта на нашия общ резултат 4.2.5 получаваме:

Твърдение 4.3.33. Всеки изброим модел на DCF_0 допуска строго обръщане на скока.

Разрешим изброим наситен модел на DCF_0

От построяването на изчислима номерация в Твърдение 4.3.32, и резултат на Морли [Mor76], който казва, че една пълна изброима теория T има разрешим наситен модел, ако и само ако има изчислима номерация на типовете, реализиращи се в T, директно получаваме следното следствие:
setcounterchapter4

Следствие 4.3.36. Наситеният модел на DCF_0 има разрешимо копие.

Глава 5

Ефективни влагания и интерпретации

Има различни начини да кодираме (и декодираме) една структура $\mathcal{A}$ в друга структура $\mathcal{B}$. Основната идея е да видим кои класове от структури имат по-голяма изразителна сила. Ние се интересуваме от случаите, в които имаме равномерна ефективна процедура за кодиране и декодиране и също от случаите, в които декодирането е по-трудно. За сравняването на сложността на класификационния проблем за различни класове от структури има много изследвания. В теория на моделите те се сравняват с *мощността на множеството от различните типове изоморфизми.* Известно е, че класификационният проблем на изброими линейни наредби, които имат $2^{\aleph_0}$ типа изоморфизми, трябва да е по-сложен от класификационния проблем на класа на Q-векторните пространства, които имат $\aleph_0$ различни типа изоморфизми. В дескриптивната теория на множествата се използват *Борелови влагания* и частичната наредба $\leq_B$, индуцирана от тях. Например, известно е, че абелевите p-групи с дължина ω лежат строго под класа на изброимите линейни наредби относно частичната наредба $\leq_B$.

Фридман и Стенли [FS89] въвеждат понятието Борелово влагане и разглеждат Борелови влагания на ориентирани графи в линейни наредби, на графи в полета и др. В [CCKM04] Найт и нейни ученици изучават ефективни варианти на Бореловото влагане, като допускат и крайни структури. *Тюринговото изчислимо влагане* на класа от структури K в класа от структури K' се задава от Тюрингов оператор. То дава равномерно ефективно кодиране на всяка структура от K в някоя структура на K', и запазва "back-and-forth" релацията [KMVB07] и изоморфизма между структурите. Подобно понятие е *изчислимото влагане*, но основано на номерационен оператор [CCKM04]. Тъй като номерационният оператор е монотонен, той запазва подструктури. Напоследък това понятие предизвиква интерес [GKV18, BGV19].

Декодирането може да е, а може и да не ефективно. Някои от известните примери за Тюрингово изчислимо влагане включват равномерно дефинирани ефективни интерпретации. В частност, това е вярно за стандартното кодиране (на Лавров, Нийс и Маркер) на ориентирани графи или структури от произволен изчислим език в неориентирани графи. Декодирането се дава от сводимост по Медведев. Да припомним, че една структура $\mathcal{A}$ е сводима по Медведев към структурата $\mathcal{B}$, ако има Тюрингов оператор Φ, който по копие на $\mathcal{B}$ дава копие на $\mathcal{A}$. Нека Θ е Тюрингово изчислимо влагане на ориентирани графи $\mathcal{A}$ в неориентираните графи (виж [Mar02]). Тогава има екзистенциални формули, които дават *равномерна* ефективна интерпретация, т.е. за всеки ориентиран граф $\mathcal{A}$, тези формули интерпретират $\mathcal{A}$ в $\Theta(\mathcal{A})$. Така тези екзистенциални формули задават декодирането. Следователно $\mathcal{A}$ е сводима по Медведев до $\Theta(\mathcal{A})$ равномерно, т.е. $\mathcal{A} \leq_s \Theta(\mathcal{A})$ с фиксиран Тюрингов оператор Φ, който служи за всички $\mathcal{A}$.

Хиршвелд, Хюсеинов, Шор и Слинко [HKSS02] дават условия за пълнота на клас от структури. Идеята е, че структурите в такъв клас притежават всички теоретико-моделни и структурни свойства на изчислимите структури. Един клас от структури $\mathcal{K}$ е пълен относно спектри, ефективни размерности, разширения с константи и спектри на релации, ако за всяка структура $\mathcal{B}$ (в изчислим език) има структура $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ със следните свойства: $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ споделят много свойства — имат еднакви спектри, едни и същи изчислителни размерности (броят на изчислимите изчислимо-неизоморфни копия), които се запазват при разширения с константи и ако $S \subseteq \mathcal{B}$, има $U \subseteq \mathcal{A}$, такова че S и U имат еднакви спектри на релации. В [HKSS02] е показано, че класът на неориентираните графи, частичните наредби, решетките, пръстените (с делители на нулата), областите на цялостност, комутативни полугрупи и класът на нилпотентни групи от клас 2 са пълни.

Един по-общ метод е разгледан от Монталбан [Mon14], базиран на понятието за ефективна би-интерпретируемост. Две структури са ефективно би-интерпретируеми, ако има ефективна интерпретация на всяка от тях в другата, като композицията на изоморфизмите, интерпретиращи едната структура в другата и обратно, е изчислима. Той показва, че ефективната би-интерпретируемост запазва повечето изчислително теоретични свойства. Освен гореспоменатите свойства от [HKSS02], се запазват още и: ако едната структура е твърда (няма нетривиални автоморфизми), то и другата е такава, групите от автоморфизмите на двете структури са изоморфни, едновременно са изчислимо категорични или не, имат Тюрингово еквивалентни индексни множества — множествата от индекси на изчислимите копия и др. Скорошен резултат на Р. Милър, Понен, Шоутенс и Шлапентох [MPSS18] показва, че класът на неориентираните графи са ефективно би-интерпретируеми с класа на полетата.

Ние описваме един позитивен и един негативен резултат. В следващата секция представяме съвместен резултат с Джулия Найт и Стефан Вътев [KAV19] за кодиране и декодиране в графи и линейни наредби. Във втората секция на тази глава представяме ефективна интерпретация на полетата в нилпотентни групи от клас 2 — Хайзенберговите групи [ACG+20]. Последната секция на тази глава е посветена на интерпретация на едно алгебрично затворено $\mathcal{C}$ поле с характеристика 0 в специалната линейна група $SL_2(\mathcal{C})$.

5.1 Кодиране и декодиране на графи в линейни наредби

Класът на неориентираните графи и класът на линейните наредби са на върха на Тюрингово изчислимото влагане, т.е. всеки друг клас от структури Тюрингово изчислимо се влага в тях. Стандартното Тюрингово изчислимо влагане на ориентираните графи (или на структури от произволен изчислим релационен език) в неориентираните графи идва с равномерна ефективна интерпретация. Ние даваме примери за графи, които не са дори сводими по Медведев до никоя линейна наредба, дори и до скока на линейна наредба. Но всеки граф може да се сведе по Медведев до втория скок на линейна наредба. За известното Тюрингово изчислимо влагане на графи в линейни наредби на Фридман и Стенли [FS89] ние показваме, че няма равномерна интерпретация, дефинирана с помощта на $L_{\omega_1\omega}$ формули, т.е. няма фиксирани $L_{\omega_1\omega}$ формули, които могат да интерпретират всеки граф в съответната линейна наредба на Фридман и Стенли.

Предполагаме, че езикът на всяка структура е изчислим и релационен. Разглеждаме структури с носител $\mathbb{N}$. Нека $Mod(L)$ е класът от L-структури с този носител. Идентифицираме структурата $\mathcal{A}$ с нейната атомарна диаграма $D(\mathcal{A})$. Считаме, че $Mod(L)$ е подклас на 2^ω с помощта на Гьоделовото кодиране. За клас от структури $\mathcal{K} \subseteq Mod(L)$ предполагаме, че $\mathcal{K}$ е аксиоматизируем с една $L_{\omega_1\omega}$ затворена формула. Използвайки резултат на Лопез-Ескобар [LE65], това е все едно да предположим, че $\mathcal{K}$ е Борелов подклас на $Mod(L)$, затворен относно изоморфизми.

5.1.1 Борелови влагания

Следната дефиниция е от [FS89], въведена с цел да се разгледа класификация на класове от структури.

Дефиниция 5.1.1. Казваме, че един клас от структури $\mathcal{K}$ е *Борелово вложим* в класа $\mathcal{K}'$, и означаваме с $\mathcal{K} \leq_B \mathcal{K}'$, ако има Борелова функция $\Phi : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, такава че за $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ако и само ако $\Phi(\mathcal{A}) \cong \Phi(\mathcal{B})$.

Бореловото влагане на $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}'$ представя една равномерна процедура за кодиране на структури от $\mathcal{K}$ в структури от $\mathcal{K}'$.

Теорема 5.1.2. Следните класове са на върха на $\leq_B$, т.е. всяка структура може Борелово да се вложи в този клас.

1. неориентираните графи
2. полета с фиксирана характеристика
3. нилпотентни групи от клас 2
4. линейни наредби

Фридман и Стенли [FS89] дефинират влагане на графи в полета от всяка фиксирана характеристика. Те също дефинират влагане на графите в линейни наредби. За другите класове, изброени по-горе, Фридман и Стенли показват по-ранни източници. Лавров [Lav63] дефинира влагане на $Mod(L)$ (структури с носител $\mathbb{N}$ и в езика L) в неориентирани графи за всеки език L. Има подобни конструкции на Нийс [Nie96] и Маркер [Mar02]. Меклер [Mek81] дефинира влагане на графи в нилпотентни групи от клас 2. Алтернативно, ние даваме влагане на графи в нилпотентни групи от клас 2, композирайки влагане на графи в полета с влагането на Малцев [Mal60] на полета в нилпотентни групи от клас 2.

5.1.2 Тюрингово изчислими влагания

Найт и нейните студенти разглеждат ефективни варианти на влагане [CCKM04], [KMVB07]. setcounterchapter5

Дефиниция 5.1.4. Казваме, че един клас от структури $\mathcal{K}$ е *Тюрингово изчислимо вложим* в класа $\mathcal{K}'$, и означаваме с $\mathcal{K} \leq_{tc} \mathcal{K}'$, ако има Тюрингов оператор $\Phi : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, такъв че за всеки $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, ако и само ако $\Phi(\mathcal{A}) \cong \Phi(\mathcal{B})$.

Тюринговото изчислимо влагане представя ефективна кодираща процедура. В [CCKM04] е доказано, че същите класове от Теорема 5.1.2 са на върха на Тюрингово изчислимите влагания. Причината е, че Бореловите влагания на Фридман-Стенли, Лавров, Нийс, Маркер, Меклер и Малцев са всичките Тюрингово изчислими.

5.1.3 Сводимост по Медведев

Един *проблем* е подмножество на 2^ω или ω^ω. Проблемът P е сводим по Медведев към проблема Q, ако има Тюрингов оператор Φ, който изпраща елементи на Q в елементи на P. Проблемите, от които се интересуваме, касаят копия на дадена структура, където всяко копие се идентифицира с елемент на 2^ω.

Дефиниция 5.1.6. Казваме, че структурата $\mathcal{A}$ е *сводима по Медведев* към $\mathcal{B}$, и означаваме това с $\mathcal{A} \leq_s \mathcal{B}$, ако има Тюрингов оператор, който изпраща копия на $\mathcal{B}$ в копия на $\mathcal{A}$.

Да предположим, че $\mathcal{A}$ е кодирана в $\mathcal{B}$, тогава Медведевата сводимост на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ представя една ефективна декодираща процедура.

В много от известните примери за $\mathcal{A} \leq_s \mathcal{B}$, структурата $\mathcal{A}$ се дефинира или интерпретира в $\mathcal{B}$ с помощта на формула, която ни дава възможност да възстановим копие на $\mathcal{A}$ от всяко копие на $\mathcal{B}$.

Понятието Медведева сводимост почти улавя идеята за ефективното възстановяване (декодиране) на копие на $\mathcal{A}$ от копие на $\mathcal{B}$.

5.1.4 Просто влагане

Ще опишем Маркеровото Тюрингово изчислимо влагане на ориентирани графи в неориентирани.

1. За всеки възел a в ориентирания граф $\mathcal{A}$, неориентираният граф $\mathcal{B}$ има възел b_a, свързан с триъгълник.

2. За всяка наредена двойка от възли (a, a') от $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ има възел $p_{(a,a')}$, свързан с една дъга до b_a и с две дъги с $b_{a'}$. Възелът $p_{(a,a')}$ е свързан с квадрат, ако има дъга от a до a' в $\mathcal{A}$, и с петоъгълник, иначе.

За структури $\mathcal{A}$ с повече релации, работи същата идея — ще използваме повече специални възли и повече n-ъгълници.

Факт: За Маркеровото влагане Φ на ориентирани графи в неориентирани има крайни екзистенциални формули, за които за всеки вход $\mathcal{A}$, определят следното.

1. множеството D от b_a, свързани с триъгълник,

2. множеството от наредени двойки $(b_a, b_{a'})$, такива че специалният възел $p_{(a,a')}$ е свързан с квадрат,

3. множеството от наредени двойки $(b_a, b_{a'})$, такива че специалният възел $p_{(a,a')}$ е свързан с петоъгълник.

Това гарантира, че всяко копие на $\Phi(\mathcal{A})$ изчислява копие на $\mathcal{A}$.

5.1.5 Ефективни интерпретации и изчислим функтор

Неформално, една структура $\mathcal{A}$ е ефективно интерпретируема в структурата $\mathcal{B}$, ако има интерпретация на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ (като в теория на моделите [Mar02]), но носителят на интерпретацията е разрешено да бъде подмножество на $B^{<\omega}$, докато в класическата дефиниция се изисква да бъде подмножество на B^n за някое n, и където за всички множества интерпретацията им трябва да е изчислима в структурата (докато в класическата дефиниция трябва да е определима от първи ред). Формулите, дефиниращи интерпретацията, са *обобщени изчислими безкрайни* Σ^c_1, както бяха дефинирани в Глава 2., Дефиниция 2.5.9. Версия с параметри на ефективна интерпретируемост е въведена от Ершов [Ers85] — Σ-определимост над $\mathbb{HF}(\mathcal{B})$, структурата над наследствено-крайни множества над $\mathcal{B}$. Тя използва логика от първи ред в $\mathbb{HF}(\mathcal{B})$ и се изучава в Русия в последните двадесет години [EPS11, Puz09, MK08, Stu13, Kal09a]. Антонио Монталбан в [Mon, Mon12] показва, че Σ-определимостта над $\mathbb{HF}(\mathcal{B})$ отговаря на ефективна интерпретируемост в $\mathcal{B}$ с параметри.

Антонио Монталбан дефинира в [Mon14] ефективна интерпретация на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, гарантирайки, че $\mathcal{A} \leq_s \mathcal{B}$. Крайните редици от елементи на $\mathcal{B}$, които представят елементите на $\mathcal{A}$, нямат фиксирана дължина.

Ние знаем от [AKMS89], [Chi90], Теорема 2.5.8, за една релация R и структура $\mathcal{A}$, R е релативно вътрешна р.н. (или Σ^0_α) над $\mathcal{A}$, ако и само ако е дефинирана в $\mathcal{A}$ с изчислима безкрайна Σ^c_1 (или Σ^c_α) формула с крайна редица $\overline{c}$ от параметри в $\mathcal{A}$. Както споменахме в Глава 2., Монталбан доказва в [Mon12], че една релация $R \subset A^{<\omega}$ е релативно вътрешна р.н. в $\mathcal{A}$, ако е дефинирана с обобщена изчислима Σ^c_1 формула без параметри, но с безкрайно много свободни променливи.

Пример 5.1.9. Релацията линейна зависимост на n-ки в $\mathbb{Q}$-векторно пространство е известна релация без фиксирана местност. Тя се дефинира с една Σ^c_1 формула $\bigvee_n \varphi_n(\overline{x}_n)$, от вида, който използваме при ефективните интерпретации. Нека $\varphi_n(\overline{x}_n) = \bigvee_\lambda \lambda(\overline{x}_n) = 0$, където λ пробягва нетривиалните рационални линейни комбинации на $\overline{x}_n = (x_1, \ldots, x_n)$.

Дефиниция 5.1.10. Една структура $\mathcal{A} = (A, R_i)$ е *ефективно интерпретируема* в структурата $\mathcal{B}$, ако има множество $D \subseteq \mathcal{B}^{<\omega}$, Σ^c_1-определимо над $\varnothing$ (без параметри), и има релации $\sim$ и R^*_i в D, Δ^c_1-определими над $\varnothing$ (без параметри), такива, че $(D, R^*_i)/_\sim \cong \mathcal{A}$.

По-горе описахме Маркеровото Тюрингово изчислимо влагане на ориентирани графи в неориентирани графи, и видяхме, че има равномерни крайни екзистенциални формули, които задават ефективната интерпретация. Един скорошен резултат на Р. Милър, Пунен, Шоутенс и Шлапентох, [MPSS18] дава равномерна ефективна интерпретация на графи в полета.

Харисън-Трейнър, Мелников, Р. Милър и Монталбан [HTMMM17] предлагат второ понятие, което се оказва еквивалентно на ефективна интерпретация.

Дефиниция 5.1.11. [Изчислим функтор][HTMMM17]

Изчислим функтор от $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ е двойка Тюрингови оператори Φ и Ψ със следните свойства:

(1) За всеки $\mathcal{C} \cong \mathcal{B}$ имаме $\Phi(\mathcal{C}) \cong \mathcal{A}$.

(2) За всеки $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \cong \mathcal{B}$ и всеки изоморфизъм f от $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_2$, $\Psi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, f)$ е изоморфизъм от $\Phi(\mathcal{B}_1)$ в $\Phi(\mathcal{B}_2)$. Операторът Ψ трябва да има някои естествени свойства.

   (a) Ако $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 \cong \mathcal{B}$ и f е идентитетът, то $\Psi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, f)$ е идентитетът в $\Phi(\mathcal{B}_1)$.

   (b) За $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3 \cong \mathcal{B}$, и изоморфизми f от $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_2$ и g от $\mathcal{B}_2$ в $\mathcal{B}_3$, $\Psi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3, g \circ f) = \Psi(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, g) \circ \Psi(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, f)$.

Основният резултат от [HTMMM17] дава еквивалентност на двете понятия.

Теорема 5.1.12. За структурите $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ е ефективно интерпретируема в $\mathcal{B}$, точно тогава, когато има изчислим функтор Φ, Ψ от $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$.

Следствие 5.1.13. Ако $\mathcal{A}$ е ефективно интерпретируема в $\mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \leq_s \mathcal{B}$.

Калимулин [Kal12] показва, че обратното не е вярно. Може да има Тюрингов оператор Φ, изобразяващ копия на $\mathcal{B}$ в копия на $\mathcal{A}$, без да имаме Тюрингов оператор Ψ, преобразуващ тройки $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, f)$ в g, където $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ са копия на $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_1 \cong_f \mathcal{B}_2$ и $\Phi(\mathcal{B}_1) \cong_g \Phi(\mathcal{B}_2)$.

В доказателството на Теорема 5.1.12 е важно, че множеството D в интерпретацията се състои от крайни редици от елементи на $\mathcal{B}$ с произволна дължина. Същото е вярно в доказателството на следното твърдение.

Твърдение 5.1.14. Ако $\mathcal{A}$ е изчислима, то $\mathcal{A}$ е ефективно интерпретируема във всяка структура $\mathcal{B}$.

Естествено е да се попитаме, когато $\mathcal{A}$ е ефективно интерпретируема в $(\mathcal{B}, \bar{b})$ с параметри $\bar{b}$, дали тя непременно е интерпретируема в $\mathcal{B}$ без параметри. Калимулин [Kal12] дава пример, който дава отрицателен отговор на този въпрос.

Малцевото влагане Φ на полета в нилпотентни групи от клас 2 включва интерпретация на полето F в $\Phi(F)$ с помощта на параметри. Ние показахме [ACG+20], че има равномерен изчислим функтор от $\Phi(F)$ в F. Следователно, има и ефективна интерпретация на F в $\Phi(F)$, в която формулите нямат параметри. Ще докажем този резултат в следващата секция.

5.1.6 Интерпретация с по-общи формули

Можем да разгледаме интерпретация на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, където D, $\pm\sim$, и $\pm R_i^*$ са дефинирани в $\mathcal{B}$ със Σ_2^c формули, и имаме $(D, (R_i^*)_{i\in\mathbb{N}})/_\sim \cong \mathcal{A}$.

Харисън-Трейнър, Р. Милър и Монталбан [HTMM18] доказват аналогичен резултат на този от [HTMMM17], в който интерпретациите се дефинират с формули от $L_{\omega_1\omega}$, и функторите са Борелови. Отново формулите за интерпретацията на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, множествата от крайни редици в $\mathcal{B}$, които представят елементите на $\mathcal{A}$, могат да имат произволни дължини.

Теорема 5.1.15. [HTMM18]

Една структура $\mathcal{A}$ се интерпретира в $\mathcal{B}$, с помощта на $L_{\omega_1\omega}$-формули, ако и само ако има Борелов функтор (Φ, Ψ) от $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$.

5.2 Интрпретиране на графи в линейни наредби

И графите и линейните наредби са на върха на Тюрингово изчислимото влагане. Както видяхме, всяка структура може ефективно да се интерпретира в граф. Линейните наредби нямат такава интерпретируема сила. За да покажем това, използваме следния резултат на Рихтер [Ric81].

Твърдение 5.2.1 (Рихтер)**.** За всяка линейна наредба L, единствените множества, които са изчислими във всички копия на L, са изчислимите множества.

Твърдение 5.2.2. Има граф G, такъв че за всяка линейна наредба L, $G \nleq_s L$.

Следният резултат от [Kni86] е обобщение на Твърдение 5.2.1.

Твърдение 5.2.3 (Найт)**.** За всяка линейна наредба L, единствените множества, изчислими във всички копия на L' (или в скока на всяко копие на L) са Δ_2^0 множествата.

Така можем да усилим Твърдение 5.2.2.

Твърдение 5.2.4. Има граф G, за който за всяка линейна наредба L, $G \nleq_s L'$.

Но този шаблон не продължава. Следното твърдение е добре познато (виж Теорема 9.12 [AK00]).

Твърдение 5.2.5. За всяко множество S има линейна наредба L, такава че за всички копия на L, вторият им скок изчислява S.

За едно множество A, наредбата $\sigma(A \cup \{\omega\})$ — разбърканата сума ("shuffle sum") на наредби от тип n (дискретна линейна наредба с n елемента) за $n \in A$ и от тип ω се състои от гъсто много копия на тези наредби. Степените на копията на $\sigma(A \cup \{\omega\})$ са степените на множествата X, за които A е р.н. в $X^{(2)}$. Нека $A = S \oplus S^c$, където S^c е допълнението на S. Да разгледаме линейната наредба $L = \sigma(A \cup \{\omega\})$. Тогава имаме двойка от крайни Σ_3 формули, казвайки, че $n \in S$, ако L има максимално дискретно множество с големина $2n$ и $n \notin S$, ако L има максимално дискретно множество с големина $2n+1$. Следователно, всяко копие на $L^{(2)}$ равномерно изчислява множеството S.

Използвайки Твърдение 5.2.5, получаваме следното.

Твърдение 5.2.6. За всеки граф G, има линейна наредба L, за която $G \leq_s L^{(2)}$,

5.2.1 Тюрингово изчислимо влагане на графи в линейни наредби

Класът на линейните наредби, както и класът на графите, лежат на върха на $\leq_{tc}$. Ще опишем Тюрингово изчислимото влагане L, дадено в [FS89], на ориентирани графи в линейни наредби.

Влагането на Фридман и Стенли. Първо, нека $(A_n)_{n \in \omega}$ е ефективно разделяне на $\mathbb{Q}$ на непресичащи се гъсти множества. Нека $(t_n)_{1 \leq n < \omega}$ е списък на атомарните типове в езика на ориентираните графи. Нека t_1 е типът на $\varnothing$, след него слагаме типовете над един елемент, и след това типовете на различни двойки, след тях на различни тройки и т.н. За един граф G, линейната наредба $L(G)$ е поднаредба на $\mathbb{Q}^{<\omega}$, с лексикографската наредба. Елементите на $L(G)$ са крайни редици $r_0 q_1 r_1 \ldots r_{n-1} q_n r_n k \in \mathbb{Q}^{<\omega}$, такива че

1. за $i < n$, $r_i \in A_0$, и $r_n \in A_1$,
2. има специална редица от елементи на G с дължина n, удовлетворяваща атомарния тип t_m, и k е естествено число, по-малко от m,
3. ако $n \geq 1$ специалната редица е $a_1, \ldots, a_n$, то за всяко i, $1 \leq i \leq n$, имаме $q_i \in A_{a_i}$.

В различни доклади Найт е заявявала, без да има доказателство, че това влагане не представя ефективна интерпретация. Нашата цел до края на секцията да докажем следната теорема.

Теорема 5.2.7. Не съществуват $L_{\omega_1 \omega}$-формули, които за всеки граф G интерпретират G в $L(G)$.

Ще разгледаме някои свойства на $L(G)$.

Дефиниция 5.2.8. Нека $b = r_0 q_1 r_1 \dots r_{n-1} q_n r_n k \in L(G)$. Казваме, че b *представя* $\overline{a}$, ако $\overline{a}$ е специална редица от елементи на G с дължина n, такава че $1 \le i \le n$, $q_i \in A_{a_i}$.

Лема 5.2.9. Нека $b \in L(G)$ представя $\overline{a}$. Тогава b лежи в максимален дискретен интервал с крайна дължина $m \ge 1$. Числото m ни показва атомарния тип на $\overline{a}$; в частност ни казва дължината на $\overline{a}$.

Структурата на линейната наредба $L(G)$ не ни казва директно дължината на елементите b (като елементи на $\mathbb{Q}^{<\omega}$). Но ако b представя $\overline{a}$ с дължина n, тогава b има дължина $2n + 2$.

Лема 5.2.10. Ако $b \in L(G)$ има дължина $2n + 2$, тогава има безкраен интервал около b, който се състои изцяло от елементи с дължина поне $2n + 2$.

Лема 5.2.11. Нека $b, b' \in L(G)$, където $b < b'$, и нека d е елемент от $[b, b']$ с минимална дължина. Ако d представя $\overline{c}$, тогава всички елемнти от $[b, b']$ представят разширения на $\overline{c}$.

Нека $\overline{b}$ е крайна редица от елементи на $L(G)$. За всяко b_i в $\overline{b}$, нека $\overline{a}_i$ е редицата в G представена от b_i. Формулите, верни над $\overline{b}$ в $L(G)$, са детерминирани от формулите, верни в G над различните $\overline{a}_i$, заедно с "формата" на $\overline{b}$.

Дефиниция 5.2.12. За n-торката $\overline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ в $L(G)$, с $b_1 < b_2 < \dots < b_n$, *формата* кодира следната информация:

1. типа наредба на $\overline{b}$ — за простота предполагаме, че $b_1 < b_2 < \dots < b_n$,
2. големината на интервала (b_i, b_{i+1}) — да забележим, че интервалът е безкраен, освен ако b_i, b_{i+1} принадлежат на едно и също крайно дискретно множество в $L(G)$, което означава, че те имат еднакви компоненти, всички без последния,
3. местоположението на всяко b_i в крайния дискретен интервал, на който принадлежат,
4. дължината на всяко b_i,
5. за $i < n$, числото k_i, за което $2k_i + 2$ е дължината на най-късия елемент d в интервала $[b_i, b_{i+1}]$ — d представя редицата $\overline{c}$ с дължина k_i, и всички елементи от $[b_i, b_{i+1}]$ представят редици, които разширяват $\overline{c}$.

Твърдение 5.2.13. За всяка n-торка $\overline{b}$, съществуват Π^c_4 и Σ^c_4 формули в езика на линейните наредби, казвайки в $L(G)$ за всяко G, че n-торката $\overline{x}$ има същата форма като дадената $\overline{b}$.

Забележка за елементи с дължина 2: Нека d има дължина 2. Тогава $\varnothing$ е представен от d и атомарният тип $\varnothing$ е t_1, така d има форма $r_0 0$, където $r_0 \in A_1$. Да забележим, че d е единственият елемент от $L(G)$, който започва с r_0. Ако $b < d < b'$, тогава b има първи компонент r и b' има първи компонент r', където $r < r_0 < r'$. Тъй като всичките A_i са гъсти в $\mathbb{Q}$, всичко може да се случи в интервалите (b, d) и (d, b').

Лема 5.2.14. Нека $c < c^* < c'$ в $L(G)$, където c^* има дължина 2.

(1) За всяко $\overline{e}$ в (c, ∞), има автоморфизъм на (c, ∞), който изпраща $\overline{e}$ в някое $\overline{e}'$ в интервала (c, c^*).

(2) За всяко $\overline{e}$ в $(-\infty, c')$, има изоморфизъм на $(-\infty, c')$, който изпраща $\overline{e}$ в някое $\overline{e}'$ в интервала (c^*, c').

Ако $a < b$ в наредбата $L(G)$, казваме, че a лежи *наляво от* b, или че b лежи *надясно от* a.

Лема 5.2.15. Нека $\overline{b}$ е крайна редица от $L(G)$ и нека c е елемент на $L(G)$.

(1) Има автоморфизъм на $L(G)$, който изпраща $\overline{b}$ в $\overline{b}'$ изцяло надясно от c, с елементи с дължина 2 помежду.

(2) Има също автоморфизъм, който изпраща $\overline{b}$ в $\overline{b}''$ изцяло наляво от c, с елементи с дължина 2 помежду.

5.2.2 Релацията $\sim^\gamma$

Дефиниция 5.2.16. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури над фиксиран релационен език. Нека $\overline{a}$ и $\overline{b}$ са крайни редици с еднаква дължина, където $\overline{a}$ е в $\mathcal{A}$ и $\overline{b}$ е в $\mathcal{B}$.

(1) $(\mathcal{A}, \overline{a}) \sim^0 (\mathcal{B}, \overline{b})$, ако $\overline{a}$ и $\overline{b}$ удовлетворяват едни и същи атомарни формули в съответните структури.

(2) За $\gamma > 0$, $(\mathcal{A}, \overline{a}) \sim^\gamma (\mathcal{B}, \overline{b})$, ако $\beta < \gamma$,

 (a) за всяка $\overline{c} \in \mathcal{A}$, съществува $\overline{d} \in \mathcal{B}$, такава че $(\mathcal{A}, \overline{a}, \overline{c}) \sim^\beta (\mathcal{B}, \overline{b}, \overline{d})$,

 (b) за всяка $\overline{d} \in \mathcal{B}$, съществува $\overline{c} \in \mathcal{A}$, такава че $(\mathcal{A}, \overline{a}, \overline{c}) \sim^\beta (\mathcal{B}, \overline{b}, \overline{d})$.

Забележка: Пишем $\mathcal{A} \sim^\gamma \mathcal{B}$ за да отбележим, че $(\mathcal{A}, \varnothing) \sim^\gamma (\mathcal{B}, \varnothing)$.

Лема 5.2.17. Нека $\mathcal{A}$ е изчислима структура над краен релационен език. За всяко $\gamma < \omega_1^{CK}$ и за всяка редица $\overline{a}$ в $\mathcal{A}$, можем ефективно да намерим $\Pi^c_{2\gamma}$-формула $\varphi^\gamma_{\overline{a}}(\overline{x})$, такава че $\mathcal{A} \models \varphi^\gamma_{\overline{a}}(\overline{b})$, ако и само ако $\overline{a} \sim^\gamma \overline{b}$.

Лема 5.2.18. Нека L е фиксиран краен релационен език. За всеки изчислим ординал γ, и всяка редица от променливи $\overline{x}$, $\overline{y}$, с еднаква дължина, можем ефективно да намерим изчислима $\Pi^c_{2\gamma}$-формула $\varphi^\gamma(\overline{x},\overline{y})$, такава че за всяка L-структура $\mathcal{A}$, и всеки $\overline{a}$ и $\overline{b}$ от $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \varphi^\gamma(\overline{a},\overline{b})$, ако и само ако $(\mathcal{A},\overline{a}) \sim^\gamma (\mathcal{A},\overline{b})$.

Лема 5.2.19. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са структури от един и същ изброим език и нека $\overline{a}$ и $\overline{b}$ са редици с еднаква дължина от елементи на $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, съответно. Тогава за всеки изброим ординал γ, ако $(\mathcal{A},\overline{a}) \sim^\gamma (\mathcal{B},\overline{b})$, тогава Σ^c_γ формулите верни над $\overline{a}$ в $\mathcal{A}$ са същите като тези, верни над $\overline{b}$ в $\mathcal{B}$.

5.2.3 $\sim^\gamma$-еквивалентност в линейни наредби

В една линейна наредба, $\sim^\gamma$-класовете на редицата $\overline{a}$ са детерминирани от $\sim^\gamma$-класовете на интервали с крайни точки в $\overline{a}$. Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са линейни наредби. Нека $\overline{a} = a_1 < \ldots < a_n$ е редица от елементи в $\mathcal{A}$ и нека $\overline{b} = b_1 < \ldots < b_n$ е редица от елементи в $\mathcal{B}$. Нека $I_0,\ldots,I_n$ и $J_0,\ldots,J_n$ са интервали в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, определени от $\overline{a}$ и $\overline{b}$, т.е. I_0 е интервалът $(-\infty,a_1)$ в $\mathcal{A}$, J_0 е интервалът $(-\infty,b_1)$ в $\mathcal{B}$, за $i < n$, I_i е интервалът (a_i,a_{i+1}) в $\mathcal{A}$, J_i е интервалът (b_i,b_{i+1}) в $\mathcal{B}$, I_n е интервалът (a_n,∞) в $\mathcal{A}$, и J_n е интервалът (b_n,∞) в $\mathcal{B}$.

Лема 5.2.20. $(\mathcal{A},\overline{a}) \sim^\gamma (\mathcal{B},\overline{b})$ ако и само ако, за $i \le n$, $I_i \sim^\gamma J_i$.

5.2.4 Повече за наредбата $L(G)$

Да се върнем към линейната наредба $L(G)$. В следващата подсекция ще докажем, че не съществуват $L_{\omega_1\omega}$ формули, които интерпретират всеки граф G в $L(G)$. Ако предположим, че има такива формули, то формулите са Σ_α за някой изброим ординал α. Освен това, те са X-изчислими Σ_α за някое X, такова че $\alpha < \omega_1^X$. Разглеждаме G да е ω_1^X, тогава можем да построим редици $\overline{b},\overline{c},\overline{b}'$ в $L(G)$, представящи елементите a,e,a' на G, така че $\overline{b},\overline{c} \sim^\gamma \overline{c},\overline{b}'$, но в G, имаме $a < e$ и $a' < e$, което е противоречие. Следващите леми се използват в построяването на $\overline{b},\overline{c},\overline{b}'$.

Ако $a_1,a_2 \sim^1 b_1,b_2$, то интервалите (a_1,a_2) и (b_1,b_2) имат еднаква дължина. Ако $a \sim^2 b$, то a и b лежат в максимални дискретни интервали с еднаква дължина.

Лема 5.2.21. Нека $I = (b,b')$, където $b < b'$, и нека $J = (c,c')$, където $c < c'$. Да предположим, че $b \sim^\gamma c$ и $b' \sim^\gamma c'$, където някое $b^* \in I$ и някое $c^* \in J$ имат дължина 2. Тогава $I \sim^\gamma J$.

Лема 5.2.22. Нека $\overline{b}_1,\overline{b}_2,\overline{c}_1,\overline{c}_2$ е растяща редица в $L(G)$, където $\overline{b}_1 \sim^\gamma \overline{c}_1$ и $\overline{b}_2 \sim^\gamma \overline{c}_2$. Да предположим още, че има елемент с дължина 2 между последния елемент на $\overline{b}_1$ и първия елемент на $\overline{b}_2$, и има елемент с дължина

2 между последния елемент на $\overline{c}_1$ и първия елемент на $\overline{c}_2$. Тогава $\overline{b}_1, \overline{b}_2 \sim^\gamma \overline{c}_1, \overline{c}_2$.

Лема 5.2.23. Нека $\overline{b}$, $\overline{b}'$ са редици от елементи в $L(G)$ с една и съща форма. Нека $\overline{a}$, $\overline{a}'$ са редиците от всички елементи на G, представени от b_i, или b_i'. Ако $\overline{a} \sim^\gamma \overline{a}'$, то $\overline{b} \sim^\gamma \overline{b}'$.

Дефиниция 5.2.24. Казваме, че $\mathcal{A}$ е изчислимо безкрайна подструктура на $\mathcal{B}$, ако $\mathcal{A}$ е подструктура на $\mathcal{B}$ и за всяка изчислима безкрайна формула $\varphi(\overline{x})$ и всяко $\overline{a}$ в $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \models \varphi(\overline{a})$, ако и само ако $\mathcal{A} \models \varphi(\overline{a})$. (Дефиницията е същата като елементарна подструктура, само формулите не са елементарни (крайни) от първи ред.)

Лема 5.2.25. Нека G_1 и G_2 са ориентирани графи, като G_1 е изчислимо безкрайна подструктура на G_2. Да предположим, че G_2 е изчислима, така и $L(G_2)$ е изчислима. Тогава $L(G_1)$ е изчислимо безкрайна подструктура на $L(G_2)$.

5.2.5 Доказателство на Теорема 5.2.7

Теорема 5.2.7 казва, че няма $L_{\omega_1\omega}$-формули, които за всеки ориентиран граф G дефинират интерпретация на G в $L(G)$. Сред ориентираните графи са линейните наредби. Харисоновата наредба H [Har68] е от тип $\omega_1^{CK}(1+\eta)$. H има изчислимо копие, докато ω_1^{CK} няма изчислимо копие. Известно е, че H и ω_1^{CK} удовлетворяват еднакви изчислими безкрайни затворени формули. В частност те удовлетворяват едни и същи Π_α затворени формули от $L_{\omega_1\omega}$, за всеки изчислим ординал α.

Нека I е начален сегмент на H с тип наредба ω_1^{CK}. Разглеждайки H като ориентиран граф, можем да образуваме линейни наредби $L(H)$ и $L(I)$. По Твърдение 5.1.14, тъй като H има изчислимо копие, H е ефективно интерпретируема във всяка структура $\mathcal{B}$. Ние показваме, че няма изчислими безкрайни формули, които дефинират интерпретация на H в $L(H)$ и също дефинират интерпретация на I в $L(I)$.

Твърдение 5.2.26. $L(I)$ е изчислими безкрайна подструктура на $L(H)$.

Твърдение 5.2.27. Не съществуват изчислими безкрайни формули, дефиниращи интерпретация на H в $L(H)$, и също дефинират интерпретация на I в $L(I)$.

Да предположим, че има изчислими безкрайни формули, дефиниращи интерпретация на H в $L(H)$ и също дефинират интерпретация на I в $L(I)$. Нека D, $\sim$, и $<$ са множества от редици от елементи, които удовлетворяват тези формули в $L(H)$.

За всеки изчислим ординал α, има формула $\varphi_\alpha(x)$, която казва, че за x в H, $pred(x) = \{y : y < x\}$ има тип наредба α. Нека $\psi_\alpha(\overline{x})$ е транслация на формулата над $\overline{x}$, които са от D и множеството от предшествениците на класа на еквивалентност на $\overline{x}$ има тип наредба α. За всеки изчислим ординал α, има редица в D, удовлетворяваща $\psi_\alpha(\overline{x})$ (за подходящо $\overline{x}$). Тъй като $L(I)$ е изчислимо безкрайна подструктура на $L(H)$, някоя редица от D в $L(I)$ също удовлетворява $\psi_\alpha(\overline{x})$. Освен това, всяка редица от D в $L(I)$ удовлетворява някоя ψ_α. Да припомним, че наредбата H е изчислима, и такава е също $L(H)$. Дефинираме релацията $\equiv^\gamma$ над D.

Дефиниция 5.2.28. За редиците $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в D, нека $\overline{a} \equiv^\gamma \overline{b}$, ако и само ако

1. $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имат еднаква форма и
2. $\overline{a} \sim^\gamma \overline{b}$.

Факт: За всеки изчислим ординал γ и всяка $\overline{a}$ в D, $\equiv^\gamma$-класът на $\overline{a}$ е дефиниран с изчислима безкрайна формула.

Лема 5.2.29. За всеки изчислим ординал γ, има $\equiv^\gamma$-клас C, такъв че има произволно големи изчислими ординали α, за които някоя редица $\overline{b}$ в C удовлетворява ψ_α.

За да обясним Твърдение 5.2.27, да предположим, че формулите, дефиниращи D, $\circledless$, и $\sim$ са всичките Σ^c_γ. Тъй като D може да няма фиксирана местност, имаме предвид, че има изчислима редица от Σ^c_γ формули, дефиниращи множеството от n-торки в D, и подобно за $\circledless$ и $\sim$. По Лема 5.2.29, има множество $C \subseteq D$, в което всички редици имат една и съща форма и са в един и същи $\sim^\gamma$-клас — в частност, редиците в C всички имат еднаква дължина. Избираме крайни редици $\overline{b}$ и $\overline{c}$ в $L(I)$, принадлежащи на C, такива, че $\overline{b}$ удовлетворява ψ_α и $\overline{c}$ удовлетворява ψ_β, където $\alpha < \beta$.

По Лема 5.2.15, можем да предположим, че всеки елемент на редицата $\overline{b}$ лежи отляво на $<$-първия елемент на $\overline{c}$, и интервалът между $<$-най-големия елемент на $\overline{b}$ и $<$-първия елемент на $\overline{c}$ съдържа елемент с дължина 2. По същата лема, има редица $\overline{b}'$, автоморфна на $\overline{b}$, такава че всичките елементи на $\overline{b}'$ лежат отдясно на $<$-най-големия елемент на $\overline{c}$, и интервалът между $<$-най-големия елемент на $\overline{c}$ и $<$-първия елемент на $\overline{b}'$, съдържа елемент с дължина 2. Тъй като $\overline{b}$ удовлетворява ψ_α и $\overline{c}$ удовлетворява ψ_β, трябва да имаме $L(I) \models \overline{b} \circledless \overline{c}$. Тъй като $\overline{b}'$ е автоморфен на $\overline{b}$, трябва също да удовлетворява ψ_α, така трябва да имаме $L(I) \models \overline{b}' \circledless \overline{c}$. Прилагайки Лема 5.2.22, получаваме, че $\overline{b}, \overline{c} \sim^\gamma \overline{c}, \overline{b}'$. Затова, тъй като $L(I) \models \overline{b} \circledless \overline{c}$, и $\circledless$ е дефинирана със Σ^c_γ-формула, получаваме, че $L(I) \models \overline{c} \circledless \overline{b}'$. Това е противоречието, което очаквахме да получим за доказателството на Твърдение 5.2.27.

Твърдение 5.2.30. Няма интерпретация на ω_1^{CK} в $L(\omega_1^{CK})$, дефинирана с изчислими безкрайни формули.

Нека предположим, че има интерпретация на ω_1^{CK} в $L(\omega_1^{CK})$, определена с изчислими безкрайни формули. Нека тези формули, които дефинират D, $\textcircled{<}$, и $\sim$ са Σ_γ^c. Нашето предположение дава, че в Харисоновата наредба с добрата наредба на началния сегмент I, тези формули определят интерпретация на I в $L(I)$. Но предположението не казва, че те също интерпретират H в $L(H)$. Следователно не може да използваме Лема 5.2.29.

Лема 5.2.31. Нека $\mathcal{A}$ е изчислима структура. Ако $\mathcal{B}$ удовлетворява изчислимите безкрайни затворени формули, верни в $\mathcal{A}$, тогава формулите $\varphi_{\overline{d}}^{\gamma}$, които дефинират $\sim^\gamma$-класовете на еквивалентност на всички редици от $\mathcal{A}$, също дефинират $\sim^\gamma$-класовете на еквивалентност на всички редици в $\mathcal{B}$. Още, ако $\mathcal{B} \vDash \varphi_{\overline{d}}^{\gamma}(\overline{b})$, тогава Σ_γ^c-формулите, верни над $\overline{b}$ в $\mathcal{B}$ са същите като тези, верни над $\overline{d}$ в $\mathcal{A}$.

Следващата лема дава заключението на Лема 5.2.29. Доказателството включва поставянето на ω_1^{CK} сред по-голяма наредба, подобна на Харисоновата наредба.

Лема 5.2.32. В $L(\omega_1^{CK})$ има крайни редици $\overline{d}_\alpha$, отговарящи на произволно големи изчислими ординали α, така, че $\overline{d}_\alpha$ са в D, всичките с еднаква дължина и форма, всичките $\sim^\gamma$-еквивалентни, и $\overline{d}_\alpha$ удовлетворява ψ_α.

Използваме теоремата на Баруайз-Крайзел за компактност. Нека Γ е Π_1^1 множество от изчислими безкрайни затворени формули, описващи следната структура:

$$\mathcal{U} = (U_1 \cup U_2, U_1, <_1, U_2, <_2, F, c)$$

1. U_1 и U_2 са непресичащи се множества,
2. $(U_1, <_1)$ е линейна наредба, която удовлетворява изчислимите безкрайни затворени формули, верни в ω_1^{CK} и H — тъй като H е изчислима, е Π_1^1,
3. $(U_2, <_2)$ удовлетворяват изчислимите безкрайни затворени формули, верни в $L(\omega_1^{CK})$ — това е Π_1^1, тъй като $L(H)$ е изчислима и $L(I)$ е изчислимо безкрайна подструктури на $L(H)$,
4. F е функция от D^{U_2} в U_1, която индуцира изоморфизъм между $(D^{U_2}, \textcircled{<})/_{\sim^{U_2}}$ и $(U_1, <_1)$,
5. c е константа в U_1, такава че $c >_1 \alpha$, за всеки изчислим ординал α; т.е., има собствен начален сегмент на $<_1$-$pred(c)$ от тип α.

Всяко Δ_1^1 подмножество на Γ се удовлетворява от копия на ω_1^{CK}, $L(\omega_1^{CK})$, с подходяща функция F, и за c — достатъчно голям изчислим ординал. Следователно, цялото множество Γ има модел. Нека $\overline{b}$ е елемент от D^{U_2}, такъв че $F(\overline{b}) = c$. Нека C е множество от крайни редици от U_2, което има формата на $\overline{b}$ и $\sim^\gamma$-еквивалентни на $\overline{b}$. Тъй като $(U_2, <_2)$ удовлетворява същите изчислими безкрайни затворени формули, верни в изчислимата структура $L(H)$, по горната лема, $\sim^\gamma$-класът на еквивалентност на $\overline{b}$ е дефиниран в $(U_2, <_2)$ с една изчислима безкрайна формула. За всеки изчислим ординал α, имаме изчислима безкрайна формула χ_α, която казва че някои редици от C не удовлетворяват ψ_β, за всяко $\beta < \alpha$. Затворената формула χ_α е вярна в нашия модел на Γ, показвайки че има $\overline{b}$, такова че $F(\overline{b}) = c$. Следователно, затворената формула χ_α е вярна също и в $L(\omega_1^{CK})$, със свидетел някоя редица $\overline{b}'$. Тъй като нашите формули дефинират интерпретация на ω_1^{CK} в $L(\omega_1^{CK})$, свидетелят $\overline{b}'$ за χ_α в $L(\omega_1^{CK})$ трябва да удовлетворява ψ_γ за някое $\gamma \geq \alpha$.

Сега можем да продължим, както в доказателството на Твърдение 5.2.27. Работим в $L(\omega_1^{CK})$. Избираме $\overline{b}, \overline{c}$ от редиците от $\overline{d}_\alpha$ от Лема 5.2.32, такива че $\overline{b} \sim^\gamma \overline{c}$, където $\overline{b}$ удовлетворява ψ_α и $\overline{c}$ удовлетворява ψ_β, за $\alpha < \beta$. По Лема 5.2.15 можем да предположим, че всички елементи на $\overline{b}$ лежат отляво на $<$-първия елемент на $\overline{c}$, и интервалът между $<$-най-големия елемент на $\overline{b}$ и $<$-първия елемент на $\overline{c}$ съдържа елемент с дължина 2. Тъй като $\alpha < \beta$, трябва да имаме $L(\omega_1^{CK}) \models \overline{b} \circledless \overline{c}$. Можем да намерим $\overline{b}'$, автоморфен на $\overline{b}$, такъв че всички елементи на $\overline{b}'$ лежат отдясно на $<$-най-големия елемент на $\overline{c}$, и интервалът между $<$-най-големия елемент на $\overline{c}$ и $<$-първия елемент на $\overline{b}'$ съдържа елемент с дължина 2. Ясно е, че $L(\omega_1^{CK}) \models \overline{b}' \circledless \overline{c}$, защото $\overline{b}'$ удовлетворява $\psi_\alpha(\overline{x})$. Прилагайки Лема 5.2.22, получаваме $\overline{b}, \overline{c} \sim^\gamma \overline{c}, \overline{b}'$. Следва, че $L(\omega_1^{CK}) \models \overline{c} \circledless \overline{b}'$, което е противоречие.

Готови сме да довършим доказателството на Теорема 5.2.7, т.е. че няма $L_{\omega_1\omega}$-формули, които за всеки ориентиран граф G, интерпретират G в $L(G)$.

Да допуснем, че има такива формули. За някое X, формулите са X-изчислими безкрайни. Нека G да е линейната наредба ω_1^X. Релативизирайки Твърдение 5.2.30, получаваме, че G не се интерпретира в $L(G)$ с помощта на никои X-изчислими формули.

Влагането на Фридман и Стенли представя едно равномерно ефективно кодиране на ориентираните графи в линейни наредби. Ние видяхме, че няма равномерна интерпретация на графи в линейни наредби с помощта на $L_{\omega_1\omega}$-формули.

Хипотеза 1. Нека Φ е Тюрингово изчислимо влагане на ориентирани графи в линейни наредби. Не съществуват $L_{\omega_1\omega}$ формули, които за всеки ориентиран граф G дефинират интерпретация на G в $\Phi(G)$.

5.3 Интерпретиране на полета в Хайзенберговите групи

Хайзенбергова група над едно поле F е подгрупа на $GL_3(F)$, в която всички матрици са горно-триъгълни и имат 1-ци по диагонала и 0-и под него, а елементите на полето са над диагонала. Малцев [Mal60] показва, че има екзистенциални формули с параметри, които за всяко поле F дефинират F в неговата Хайзенбергова група $H(F)$. В тази секция показваме, че има екзистенциални формули без параметри, които за всяко поле F интерпретират F в $H(F)$. Наблюдавайки какво сме използвали за този резултат, формулираме общ резултат за махане на параметрите от формулите, определящи интерпретацията.

Равномерна дефиниция за ефективна интерпретация (виж Дефиниция 5.1.10), и равномерна дефиниция на изчислим функтор (виж Дефиниция 5.1.11) е следната. Да предположим, че $K \leq_{tc} K'$, помощта на Θ.

(1) Казваме, че структурите в K са *равномерно ефективно интерпретируеми* в техните Θ-образи, ако има фиксирана колекция от обобщени изчислими Σ_1^c формули (без параметри) (виж Дефиниция 2.5.9), такива че за всяка структура $\mathcal{A} \in K$ дефинират интерпретация на $\mathcal{A}$ в $\Theta(\mathcal{A})$.

(2) Казваме, че Φ и Ψ образуват *равномерен изчислим функтор* от структурите $\Theta(\mathcal{A})$ в $\mathcal{A}$, ако тези Тюрингови оператори служат за всяка $\mathcal{A} \in K$.

Равномерен вариант на Теорема 5.1.12 е следният.

Теорема 5.3.3. За класовете K, K', такива че $K \leq_{tc} K'$, с помощта на Θ, следните са еквивалентни:

1. има изчислими безкрайни Σ_1^c формули (без параметри) които за всяка $\mathcal{A} \in K$, ефективно интерпретират $\mathcal{A}$ в $\Theta(\mathcal{A})$,

2. има равномерни Тюрингови оператори Φ, Ψ които за всяка $\mathcal{A} \in K$, образуват изчислим функтор от $\Theta(\mathcal{A})$ в $\mathcal{A}$.

Малцев дефинира Тюрингово изчислимо влагане на полета в нилпотентни групи от клас 2. Влаганията изобразяват всяко поле F в съответната *Хайзенбергова група* $H(F)$. За да покаже, че влаганията запазват изоморфизма, Малцев дава равномерни екзистенциални формули, дефиниращи копие на F в $H(F)$. Дефинициите използват двойка параметри, чиято орбита се дефинира с екзистенциални (даже безкванторни) формули. Тук орбита на n-торката $\overline{a}$ е множеството от тези n-торки $\overline{b}$, за които има автоморфизъм на структурата, изпращаща $\overline{a}$ в $\overline{b}$. В подсекцията 5.3.1, даваме дефиницията на Малцев. В подсекцията 5.3.2, описваме равномерен изчислим функтор, който за всяко F, изпраща копия на $H(F)$ с техните изоморфизми, в копия на F със съответните изоморфизми. По Теорема 5.3.3, има ефективна равномерна интерпретация на F в $H(F)$ без параметри. В подсекция 5.3.3, даваме явни екзистенциални формули, които дефинират такава интерпретация. В подсекция 5.3.4, обясняваме, че дори и F да е ефективно интерпретируема в $H(F)$, и $H(F)$ е ефективно интерпретируема в F, в общия случай няма ефективна би-итерпретируемост. В подсекция 5.3.5, обобщаваме резултата за минаването от дефиницията на Малцев с параметри към равномерна ефективна интерпретация без параметри. Това е съвместен резултат [ACG⁺20] с Алвир, Вайсар, Гудман, Калверт, Морозов, Р. Милър, Найт и Харизанов.

5.3.1 Дефиниране на F в $H(F)$

За полето F, Хайзенберговта група $H(F)$ е множеството от матрици във следната форма:

$$h(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

за a, b, c от F. Да забележим, че $h(0,0,0)$ е единичната матрица. Интересуваме се от не-комутиращи двойки в $H(F)$. Една такава двойка е $(h(1,0,0), h(0,1,0))$. За $u = h(u_1, u_2, u_3)$ и $v = h(v_1, v_2, v_3)$, нека

$$\Delta_{(u,v)} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

За групата G, означаваме с $Z(G)$ нейния център. За елементи на групата x, y, *комутатор е* $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Лема 5.3.4. 1. (a) За u и v комутаторът $[u,v]$ е $h(0,0,\Delta_{(u,v)})$, и

(b) $[u,v] = 1$, ако и само ако $\Delta_{(u,v)} = 0$.

2. Нека $u = h(u_1, u_2, u_3)$, и $v = h(v_1, v_2, v_3)$. Ако $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, то $u \in Z(H(F))$. Ако $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, то $[u,v] = 1$, точно тогава, когато съществува α, такова че $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

3. $Z(H(F))$ се състои от елементи от вида $h(0,0,c)$.

4. Ако $[u,v] \neq 1$, то $x \in Z(H(F))$, ако и само ако $[x,u] = [x,v] = 1$.

Следствие 5.3.5. Ако $x \in H(F)$ е фиксиран при всички автоморфизми на $H(F)$, то $x = 1$.

Следната лема ни показва, как за всяка не-комутираща двойка u, v в групата $(H(F), *)$ можем да дефинираме $+$ и $\cdot$, и изоморфизъм f от F в $(Z(H(F)), +, \cdot)$.

Лема 5.3.6. Нека $u = h(u_1, u_2, u_3)$ и $v = h(v_1, v_2, v_3)$ е не-комутираща двойка. Да предположим, че $\alpha, \beta, \gamma \in F$. Нека $x = h(0, 0, \alpha \cdot \Delta_{(u,v)})$, $y = h(0, 0, \beta \cdot \Delta_{(u,v)})$, и $z = h(0, 0, \gamma \cdot \Delta_{(u,v)})$. Тогава:

1. $\alpha + \beta = \gamma$, ако $x * y = z$, където $*$ е умножение на матрици (груповата операция).

2. $\alpha \cdot \beta = \gamma$, ако съществуват x' и y' , такива че $[x', u] = [y', v] = 1$, $[u, y'] = y$, $[x', v] = x$, и $z = [x', y']$.

Основният резултат в тази подсекция следва директно от Лема 5.3.4 и Лема 5.3.6.

Теорема 5.3.7 (Малцев, Морозов)**.** За произволна не-комутираща двойка (u, v) в $H(F)$, имаме $F_{(u,v)} = (Z(H(F)), \oplus, \otimes_{(u,v)})$, където

1. $x \in Z(H(F))$, ако $[x, u] = [x, v] = 1$,

2. $\oplus$ е груповата операция в $H(F)$,

3. $\otimes_{(u,v)}$ е множество от тройки (x, y, z), такова че съществуват x', y' като $[x', u] = [y', v] = 1$, $[x', v] = x$, $[u, y'] = y$, и $[x', y'] = z$,

4. функцията $g_{(u,v)}$, изпращаща $\alpha \in F$ в $h(0, 0, \alpha \cdot \Delta_{(u,v)}) \in H(F)$, е изоморфизъм между F и $F_{(u,v)}$.

Забележка От част 4., е ясно, че $h(0, 0, \Delta_{(u,v)})$ е единицата (единичен елемент по отношение на умножението) в полето $F_{(u,v)}$ — означаваме с $1_{(u,v)}$ този елемент.

Твърдение 5.3.8. Има Тюрингов оператор Φ, който равномерно свежда по Медведев F в $H(F)$.

По дадена $G \cong H(F)$, търсим първата не-комутираща двойка (u, v) в G, и после използваме Малцевата дефиниция за да намерим копие на F, изчислимо от G.

Медведевата редукция Φ е половината на изчислимия функтор. В следващата подсекция обясняваме как се получава другата половина.

5.3.2 Изчислим функтор

Видяхме, че за всяко поле F и всяка не-комутираща двойка (u, v) в $H(F)$, има изоморфно копие $F_{(u,v)}$ на F, дефинирано в $H(F)$ с крайни екзистенциални формули с параметри (u, v). Определимите формули са еднакви за всяко поле F. Следователно има равномерен Тюрингов оператор Φ, такъв че за всяко поле F, преобразува копия на $H(F)$ в копия на F. Остана да опишем как строим оператор Ψ, така че Φ и Ψ заедно образуват равномерен изчислим функтор. За всяко поле F и всяка тройка (G_1, p, G_2), такава че G_1 и G_2 са копия на $H(F)$ и p е изоморфизъм от G_1 върху G_2, функцията $\Psi(G_1, p, G_2)$ трябва да е изоморфизъм на $\Phi(G_1)$ върху $\Phi(G_2)$, и освен това, изоморфизмът, зададен от Ψ трябва да запазва идентитета и композицията. Видяхме, че за всяко поле F и всяка не-комутираща двойка (u, v) в $H(F)$, функцията $g_{(u,v)}$, изпращаща α в $h(0, 0, \alpha \cdot \Delta_{(u,v)})$, е изоморфизъм от F върху $F_{(u,v)}$. Използваме $g_{(u,v)}$ по-долу.

Лема 5.3.9. За всяко F и всеки не-комутиращи двойки (u, v), (u', v') в $H(F)$, има естествен изоморфизъм $f_{(u,v),(u',v')}$ от $F_{(u,v)}$ върху $F_{(u',v')}$. Освен това, за фамилията от изоморфизми $f_{(u,v),(u',v')}$ е изпълнено:

1. и за всяка не-комутираща двойка (u, v) функцията $f_{(u,v),(u,v)}$ е идентитетът,

2. за всеки три не-комутиращи двойки (u, v), (u', v'), и (u'', v''),

$$f_{(u,v),(u'',v'')} = f_{(u',v'),(u'',v'')} \circ f_{(u,v),(u',v')}.$$

Следващата лема показва, че има равномерна екзистенциална дефиниция на фамилията от изоморфизми $f_{(u,v),(u',v')}$.

Лема 5.3.10. Има крайна екзистенциална формула $\psi(u, v, u', v', x, y)$, която, за всеки две не-комутиращи двойки (u, v) и (u', v') дефинира изоморфизъм $f_{(u,v),(u',v')}$, който изпраща $x \in F_{(u,v)}$ в $y \in F_{(u',v')}$.

Използваме Лема 5.3.9 и Лема 5.3.10, за да покажем следното твърдение.

Твърдение 5.3.11. Има равномерен изчислим функтор, който за всяко F изпраща $H(F)$ в F.

Следствие 5.3.12. Има равномерна ефективна интерпретация на F в $H(F)$.

Резултатът от [HTMMM17] дава равномерна интерпретация на F в $H(F)$, валидна за всяко изброимо поле F, като използва Σ_1^c формули без параметри. Редиците от $H(F)$, които представят елементите на F може да имат произволна крайна дължина.

Да забележим, че равномерната интерпретация на F в $H(F)$ ни позволява да пренесем изчислимо-моделно-теоретичните свойства на всеки граф G в една нилпотентна група от клас 2, без да въвеждаме константи. Това не е нов резултат: в [Mek81] Меклер показва съответно кодиране на графи в нилпотентни групи от клас 2, които заедно с пълнотата на графите относно такива свойства (виж [HKSS02]), потвърждава същия факт, въпреки, че кодирането на Меклер има други цели, а не пълнота. По-късно в [HKSS02], Хиршвелд, Хюсеионов, Шор и Слинко използват Малцевата интерпретация на област на цялостност в Хайзенберговата ѝ група с два параметъра, и показват пълнотата. Наскоро в [MPSS18] се показва пълнотата на полетата с кодиране на графи в полета. От този резултат, заедно със Следствие 5.3.12 и обичайната дефиниция на $H(F)$ като матрична група, зададена като множество от тройки от F, ние получаваме кодиране на графи в нилпотентни групи от клас 2, различно от Меклеровото кодиране, без да се използват константи.

5.3.3 Дефиниране на интерпретацията директно

Целта ни в тази подсекция е да дадем явни екзистенциални формули, които дефинират равномерна интерпретация на полета в Хайзенберговите групи. Ние откриваме формулите за тази интерпретация като изследваме безкрайните формули, използвани в интерпретацията на Следствие 5.3.12, като показваме всъщност, че са крайни.

Теорема 5.3.13. Има крайни екзистенциални формули, които равномерно за всяко поле F, дефинират ефективна интерпретация на F в $H(F)$ с елементите на F, представени с тройки от елементи на $H(F)$.

Носителят D на интерпретацията се състои от тройки (u, v, x) от $H(F)$, такива че $uv \neq vu$ и x е в центъра: за всяка двойка (u, v) прилагаме Малцевата дефиниция, с u, v като параметри, за да получим $F_{(u,v)} \cong F$. Тройките са разположени така :

$F_{(u,v)}$	$F_{(u',v')}$	$F_{(u'',v'')}$	$\cdots$
(u,v,x_0)	(u',v',x_0)	(u'',v'',x_0)	
(u,v,x_1)	(u',v',x_1)	(u'',v'',x_1)	
(u,v,x_2)	(u',v',x_2)	(u'',v'',x_2)	
(u,v,x_3)	(u',v',x_3)	(u'',v'',x_3)	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Тук всяка колона може да я гледаме като $F_{(u,v)}$ за някоя не-комутираща двойка (u, v). Системата от изоморфизми от Лема 5.3.9 ни позволява да идентифицираме всеки елемент в една колона със съответен елемент в друга колона, и като използваме това, построяваме копие на F.

Нека H е група изоморфна на $H(F)$. Да разгледаме естествения изоморфизъм $f_{(u,v),(u',v')}$, дефиниран в Лема 5.3.9, за не-комутиращите двойки (u, v) и (u', v'). Дефинираме $D \subseteq H$, двуместна релация $\sim$ над D, и триместни релации $\oplus$, $\odot$ (които са двуместни операции) над D, както следва.

1. D е множеството от тройки (u,v,x), такива че $uv \neq vu$ и $xu = ux$ и $xv = vx$. (Забележете, без значение коя не-комутираща двойка (u,v) е избрана, множеството от съответните елементи x е точно центърът $Z(H)$, по Теорема 5.3.7.)

2. $(u,v,x) \sim (u',v',x')$ е изпълнено, ако изоморфизмът $f_{(u,v),(u',v')}$ от $F_{(u,v)}$ в $F_{(u',v')}$ изобразява x в x'.

3. $\oplus((u,v,x),(u',v',y'),(u'',v'',z''))$ е изпълнено, ако съществуват $y,z \in H$, такива че
$(u,v,y) \sim (u',v',y')$ и $(u,v,z) \sim (u'',v'',z'')$, и $F_{(u,v)} \models x + y = z$.

4. $\odot((u,v,x),(u',v',y'),(u'',v'',z''))$ е изпълнено, ако съществуват $y,z \in H$, такива че
$(u,v,y) \sim (u',v',y')$ и $(u,v,z) \sim (u'',v'',z'')$, и $F_{(u,v)} \models x \cdot y = z$.

В Теорема 5.3.13, за да елиминираме параметрите в Малцевата дефиниция на F в $H(F)$, показахме интерпретация на F в $H(F)$, а не друга дефиниция. (Дефиницията е интерпретация, в която релацията на еквивалентност е просто равенството.) Ще демонстрираме невъзможността от усилване на теоремата да се даде дефиниция без параметри на F в $H(F)$.

Твърдение 5.3.14. Няма дефиниция без параметри, която всяко поле го дефинира в неговата Хайзенбергова група с крайни формули.

5.3.4 Въпросът за би-интерпретируемост

Ако $\mathcal{B}$ се интерпретира в $\mathcal{A}$, означаваме с $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ копието на $\mathcal{B}$, зададено от интерпретацията на $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$. Структурите $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са *ефективно би-интерпретируеми*, ако има равномерни релативно изчислими изоморфизми f от $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{A}^{\mathcal{B}^{\mathcal{A}}}$ и g от $\mathcal{B}$ върху $\mathcal{B}^{\mathcal{A}^{\mathcal{B}}}$. Общо казано, изоморфизмът f ще изобрази всеки елемент от $\mathcal{A}$ в класа на еквивалентност на крайна редица от елементи на $\mathcal{A}$. Представяме f с релация R_f, която е в сила за $a, \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$, ако f изобразява a в класовете на еквивалентност на крайна редица от класове на еквивалентност на $\overline{a}_i$. Подобно, изоморфизмът g се представя с релация R_g, която е в сила за $b, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_r$, ако g изобразява b в класа на еквивалентност на крайна редица от класове на еквивалентност $\overline{b}_i$. f и g са равномерно релативно изчислими, ако релациите R_f, R_g имат обобщена изчислима безкрайна Σ_1^c дефиниция без параметри.

За полето F и неговата Хайзенбергова група $H(F)$, когато дефинираме $H(F)$ в F, елементите на $H(F)$ се представят с тройки в F, и имаме крайни безкванторни или екзистенциални формули, които дефинират груповата операция (като релация). Когато интерпретираме F в $H(F)$, елементите на F се представят с тройки елементи от $H(F)$, и имаме крайни екзистенциални формули, които дефинират операциите на полето и техните отрицания (като релации с три аргумента). Така в $F^{H(F)^F}$

(копието на F, итерпретирано в копието на $H(F)$, което е дефинирано в F), елементите са тройки от класове на еквивалентност от тройки от тройки. В $H(F)^{F^{H(F)}}$ (копието на $H(F)$, дефинирано в копие на F, което е интерпретирано в $H(F)$), елементите са класове на еквивалентност от тройки. Така изоморфизмът f от F в $F^{H(F)^F}$ се представя с 10-местна релация R_f над F, а изоморфизмът g от $H(F)$ в $H(F)^{F^{H(F)}}$— с 10-местна релация R_g над $H(F)$.

За Тюрингово изчислимото влагане Θ на K в K' имаме *равномерна ефективна би-интерпретируемост*, ако има обобщени изчислими Σ_1^c формули без параметри, които за всеки $\mathcal{A} \in K$ и $\mathcal{B} = \Theta(\mathcal{A})$ дефинират изоморфизъм на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}^{\mathcal{B}^{\mathcal{A}}}$ и от $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}^{\mathcal{A}^{\mathcal{B}}}$. Монталбан зададе следния естествен въпрос.

Въпрос 5.3.15. Дали има равномерна ефективна би-интерпретируемост на F и $H(F)$?

Отговорът на този въпрос е отрицателен. Например, $\mathbb{Q}$ и $H(\mathbb{Q})$ не се ефективно би-интерпретируеми. Един начин да се види това е да забележим, че $\mathbb{Q}$ е твърда (няма нетривиални автоморфизми), докато $H(\mathbb{Q})$ не е — например, за всеки два не-комутиращи двойки $u, v \in H(\mathbb{Q})$, има групов автоморфизъм който изпраща (u, v) в (v, u). Отрицателният отговор на Въпроса 5.3.15 следва от [Mon, Лема VI.26(4)], която казва, че ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са ефективно би-интерпретируеми, то групите на изоморфизмите им са изоморфни.

Резултат на Морозов показва в коя половина от ефективната би-интерпретируемост има проблеми.

Твърдение 5.3.16 (Морозов)**.** Има крайна екзистенциална формула, която за всяко поле F дефинира в F специфичен изоморфизъм k от F в $F^{H(F)^F}$.

За другата половина, да има равномерна ефективна би-интерпретируемост е понякога невъзможно, както отбелязахме по-горе в случая с $F = \mathbb{Q}$. Ние не знаем примери, в които F и $H(F)$ са ефективно би-интерпретируеми, възможно е ситуацията за $\mathbb{Q}$ да е в сила за всяко поле.

Въпрос 5.3.17. За кои полета F, ако има такива, групите на автоморфизмите на F и $H(F)$ са изоморфни?

Дори, да има полета F, за които $\mathrm{Aut}(F) \cong \mathrm{Aut}(H(F))$, ние предполагаме, че F и $H(F)$ не са ефективно би-интерпретируеми, просто защото е трудно да се види как може да се намери изчислима Σ_1^c формула в езика на групите, която дефинира специфичен изоморфизъм от $H(F)$ в $H(F)^{F^{H(F)}}$.

5.3.5 Обобщаване на метода

Първите ни по-общи дефиниция и твърдение следват внимателно примера за полета и тяхната Хайзенбергова група.

Дефиниция 5.3.18. Нека $\mathcal{A}$ е структура в изчислим релационен език и нейните релации са R_i, където R_i е k_i-местна. Казваме, че $\mathcal{A}$ е *ефективно дефинирана в* $\mathcal{B}$ *с параметри* $\overline{b}$, ако съществуват $D(\overline{b}) \subseteq \mathcal{B}^{<\omega}$ и $\pm R_i(\overline{b}) \subseteq D(\overline{b})^{k_i}$, определими с редица от обобщени Σ_1^c формули с параметри $\overline{b}$.

Твърдение 5.3.19. Нека $\mathcal{A}$ е ефективно дефинирана в $\mathcal{B}$ с параметри $\overline{b}$. За $\overline{c}$ в орбитата на $\overline{b}$, нека $\mathcal{A}_{\overline{c}}$ е копие на $\mathcal{A}$, дефинирано със същите формули, но с параметри $\overline{c}$, заместващи $\overline{b}$. Тогава следните условия, взети заедно, са достатъчни да дадем ефективна интерпретация на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ без параметри:

(1) Орбитата на $\overline{b}$ е дефинирана с изчислима Σ_1^c формула $\varphi(\overline{u})$;

(2) Има обобщена, изчислима Σ_1^c формула $\psi(\overline{u}, \overline{v}, \overline{x}, \overline{y})$, такава че за всеки $\overline{c}, \overline{d}$ в орбитата на $\overline{b}$, формулата $\psi(\overline{c}, \overline{d}, \overline{x}, \overline{y})$ дефинира изоморфизъм $f_{\overline{c},\overline{d}}$ от $\mathcal{A}_{\overline{c}}$ върху $\mathcal{A}_{\overline{d}}$; и

(3) Фамилията от изоморфизми $f_{\overline{c},\overline{d}}$ запазват идентитета и композицията.

Следствие 5.3.20. С условията на Твърдение 5.3.19, ако $D(\overline{b})$ е от $\mathcal{B}^n$ за някое $n \in \mathbb{N}$, тогава ψ в условие (2) и формулите в Дефиниция 5.3.18 са просто изчислими (не обобщени) Σ_1^c формули и интерпретацията на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ без параметри е също с изчислими (не обобщени) Σ_1^c формули.

Дефиниция 5.3.21. Казваме, че $\mathcal{A}$, с релации R_i, k_i-местни, е *ефективно интерпретируема с параметри* $\overline{b}$ в $\mathcal{B}$, ако съществуват $D \subseteq \mathcal{B}^{<\omega}$, $\equiv \subseteq D^2$, и $R_i^* \subseteq D^{k_i}$, такива че

1. $(D, (R_i^*)_i)/_{\equiv} \cong \mathcal{A}$,
2. D, $\pm \equiv$, и $\pm R_i^*$ са дефинирани с изчислими редици от обобщени изчислими Σ_1^c формули с фиксираната редица от параметри $\overline{b}$.

Отново, в случай че $D \subseteq \mathcal{B}^n$ за някое фиксирано n, формулите, дефиниращи ефективна интерпретация, са изчислими Σ_1^c формули с параметри $\overline{b}$.

Твърдение 5.3.22. Нека $\mathcal{A}$ (с релации R_i, k_i-местни) има ефективна интерпретация в $\mathcal{B}$ с параметри $\overline{b}$. За редиците $\overline{c}$ в орбитата на $\overline{b}$, нека $\mathcal{A}_{\overline{c}}$ е копие на $\mathcal{A}$, получено със заместване на параметрите $\overline{b}$ с $\overline{c}$ в дефиниращата формула, с носител $D_{\overline{c}}/\equiv_{\overline{c}}$, съдържащо $\equiv_{\overline{c}}$-класове $[\overline{a}]_{\equiv_{\overline{c}}}$. Тогава следните условия, взети заедно, са достатъчни да дадем ефективна интерпретация на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ без параметри:

(1) Орбитата на $\overline{b}$ е дефинирана с изчислима Σ_1^c формула $\varphi(\overline{x})$;

(2) Релацията $F \subseteq \mathcal{B}^{<\omega}$, дефинирана с обобщена изчислима Σ_1^c-формула, такава, че за всеки $\overline{c}$ и $\overline{d}$ в орбитата на $\overline{b}$, множеството от двойки $(\overline{x},\overline{y}) \in D_{\overline{c}} \times D_{\overline{d}}$ с $(\overline{c},\overline{d},\overline{x},\overline{y}) \in F$ е инвариантно относно $\equiv_{\overline{c}}$ над $\overline{x}$ и относно $\equiv_{\overline{d}}$ над $\overline{y}$, и дефинира изоморфизъм $f_{\overline{c},\overline{d}}$ от $\mathcal{A}_{\overline{c}}$ върху $\mathcal{A}_{\overline{d}}$; и

(3) Фамилията автоморфизми $f_{\overline{c},\overline{d}}$ запазва идентитета и композицията.

Показваме, че нашият резултат е приложим и за интерпретации, използващи обобщени $L_{\omega_1\omega}$ формули.

Теорема 5.3.23. Нека $\mathcal{A}$ е релационна структура с релации R_i, които са k_i-местни. Да предположим, че има интерпретация на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ с обобщени $L_{\omega_1\omega}$ формули, с параметри $\overline{b}$ от $\mathcal{B}$. За $\overline{c}$ в орбитата на $\overline{b}$, нека $\mathcal{A}_{\overline{c}}$ е копие на $\mathcal{A}$, получено при интерпретацията с параметри $\overline{c}$, замествайки $\overline{b}$. Нека има обобщена $L_{\omega_1\omega}$-определена релация F дефинираща , за всеки $\overline{c}$ и $\overline{d}$ в орбитата на $\overline{b}$, изоморфизъм $f_{\overline{c},\overline{d}} : \mathcal{A}_{\overline{c}} \to \mathcal{A}_{\overline{d}}$ като в Твърдение 5.3.22, и тази фамилия е затворена относно композиция и идентитета $f_{\overline{c},\overline{c}}$, за всяко $\overline{c}$. Тогава има интерпретация на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ с $L_{\omega_1\omega}$ формули без параметри. Освен това новата интерпретация удовлетворява следните условия.

- За всеки изброим ординал α, ако интерпретацията в $(\mathcal{B},\overline{b})$ дефинира D, $\equiv$ и всяко R_i, като използва Σ_α формули от $L_{\omega_1\omega}$, и F и орбитата на $\overline{b}$ в $\mathcal{B}$ са дефинирани и двете със Σ_α формули, тогава и новата интерпретация без параметри също използва Σ_α формули, за да определи тези множества.

- За всеки изброим ординал α, ако интерпретацията в $(\mathcal{B},\overline{b})$ дефинира всяко от D, $\pm\equiv$, и $\pm R_i$, както и F и орбитата на $\overline{b}$ в $\mathcal{B}$ със Σ_α формули, тогава и новата интерпретация без параметри също използва Σ_α, за да дефинира носителя си, релацията на еквивалентност $\sim$, допълнението $\not\sim$, и релациите $\pm R_i$.

- Нека $X \subseteq \mathbb{N}$. Ако интерпретацията в $(\mathcal{B},\overline{b})$ използва X-изчислими формули, и F и орбитата на $\overline{b}$ в $\mathcal{B}$ са дефинирани с X-изчислими формули, тогава и новата интерпретация без параметри също използва X-изчислими формули.

  (Ако $X = \varnothing$, X-изчислими формули са просто изчислимите.)

5.4 Интерпретация на $ACF(0) - C$ в специалната линейна група $SL_2(C)$

Нека C е алгебрически затворено поле с характеристика 0 - $ACF(0)$. Означаваме с $SL_2(C)$ групата от 2×2 матрици над C с детерминанта

1. Ясно е, че $SL_2(C)$ се дефинира в C без параметри. Всяко едно поле C има изчислимо копие, което е ефективно интерпретируемо в $SL_2(C)$. Но има безкрайно много неизоморфни полета C, различаващи се в трансцедентната степен. Ние показваме крайни екзистенциални формули, които за всяко C дефинират C в $SL_2(C)$ с двойка параметри. Преди да дефинираме полето като цяло, представяме отделно събирането и умножението. Това е работа в начален стадий, съвместно с Алвир, Р. Милър и Найт [AKMS].

Дефиниране на $(C, +)$

Нека A е множество от матрици в $SL_2(C)$ от вида $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Да забележим, че в A умножението с този вид матрици дава събиране, т.е.

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Можем да дефинираме A, използвайки параметъра $p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Свойство 1. Матриците, които комутират с p, имат формата
$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Лесно се вижда, че единичният елемент I е единственият елемент от $SL_2(C)$, който е равен на своя квадрат. Затова можем да дефинираме I с безкванторна формула. Но I има много квадратни корени освен $\pm I$. Обаче, те не комутират с параметъра p — единственият квадратен корен на I, който не е равен на I, и комутира с p, е $-I$.

Свойство 2. $x \in A$, ако и само ако x комутира с p и квадратът на x комутира с p.
Следователно $(C, +) \cong (A, *)$, и така $(C, +)$ се дефинира в $SL_2(C)$ с параметъра p.

5.4.1 Дефиниране на $(C \setminus \{0\}, \cdot)$

Нека M е множеството от матрици $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$.

В M умножението с матрици дава умножението, т.е.
$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & (ab)^{-1} \end{bmatrix}$.

Можем да дефинираме M, използвайки параметър
$q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Свойство 3. $x \in M$, ако и само ако x комутира с q.

Имаме $(C \setminus \{0\}, \cdot) \cong (M, *)$, така $(C \setminus \{0\}, \cdot)$ е дефинирана в $SL_2(C)$, с помощта на безкванторни формули с параметър q.

5.4.2 Дефиниране на $(C, +, \cdot)$

За да дефинираме полето $(C, +, \cdot)$, представяме елементите $a \in C$ с двойка матрици (x, y), където $x \in A$ и $y \in M$.

Най-естественият избор за x е $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ако $a \neq 0$, тогава нека $y = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$, докато ако $a = 0$, тогава нека $y = I$. За $a = 1$, избираме (p, I), и за $a = 0$, избираме (I, I) — със същия втори аргумент. Нека T е множеството от тези двойки (x, y), избрани за да представят елементите на C.

Свойство 4. $(x, y) \in T$ точно тогава, когато или $x = y = I$ (така (x, y) представя 0), или $x \neq I$, $x \in A$, $y \in M$, и има z, такова че $z * z = y$, $z \in M$, и $z * p * z^{-1} = x$. (Във втория случай, (x, y) представя някое $a \neq 0$, и има само две възможности за z, съответстващи на двата възможни корена на a.)

За $(x, y) \in T$ дефинираме събирането и умножението както следва:

1. $(x, y) \oplus (x', y') = (u, v)$, ако $x * x' = u$ и $(u, v) \in T$,

2. $(x, y) \otimes (x', y') = (u, v)$, ако поне едно от (x, y), (x', y') е (I, I) и $(u, v) = (I, I)$, иначе никое от (x, y), (x', y') не е (I, I), тогава $y * y' = v$ и $(u, v) \in T$.

Така показахме следното твърдение.

Твърдение 5.4.1. Полето C се дефинира в $SL_2(C)$ с помощта на крайни екзистенциални формули с параметри p и q. (Дефиницията на T е екзистенциална, докато дефинициите на операциите са безкванторни.)

Въпрос 5.4.2. Има ли формули, които за всяко алгебрично затворено поле C с характеристика 0, дефинират ефективна интерпретация на C в $SL_2(C)$? Има ли екзистенциални формули, които я определят?

Забележка. Има моделно теоретични резултати на Пойзат [Poi01], които дават равномерна определимост на копие на C в $SL_2(C)$ с помощта на формули от първи ред без параметри. Но ние не знаем колко сложни са дефиниращите формули. Имаме формула $\varphi(u,v)$, която казва за формулите D, $\pm \sim$, $\oplus$, и $\otimes$, задаващи интерпретацията на C в $SL_2(C)$, че те определят поле, което не е с характеристика 2, в което всеки елемент има квадратен корен. За всяка двойка (u,v), удовлетворяваща тази формула, имаме едно безкрайно поле $F_{(u,v)}$. Теорията на $SL_2(C)$ е ω-стабилна. От резултат на Макентайер, $F_{(u,v)}$ трябва да е алгебрично затворено. Резултатът на Пойзат показва, че $F_{(u,v)}$ е изморфно на C и има единствени определими изоморфизми между полетата $F_{(u,v)}$, съответстващи на двойката (u,v), които удовлетворяват $\varphi(u,v)$. Тези изоморфизми запазват идентитета и композицията. Така имаме не задължително *ефективна* интерпретация без параметри, но такава, която е дефинирана с елементарни формули от първи ред. Но не знаем сложността на тези формули.

Глава 6

Кохесивни степени

Скулем пръв през 1934 г. прави конструкция на изброим нестандартен модел на аритметиката [Sko34]. Неговата конструкция може да се обясни грубо по следния начин. За множества $X, Y \subseteq \mathbb{N}$, означаваме $X \subseteq^* Y$, ако $X \setminus Y$ е крайно. Първо фиксираме едно безкрайно множество $C \subseteq \mathbb{N}$, което е *кохесивно* за колекцията от аритметични множества: за всяко аритметично множество $A \subseteq \mathbb{N}$, или $C \subseteq^* A$, или $C \subseteq^* \overline{A}$. След това дефинираме релация на еквивалентност $=_C$ над аритметичните функции $f{:}\,\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с $f =_C g$, ако и само ако $C \subseteq^* \{n : f(n) = g(n)\}$. После дефинираме структура върху $=_C$-класовете на еквивалентност $[f]$ като $[f] + [g] = [f + g]$, $[f] \times [g] = [f \times g]$ (където $f + g$ и $f \times g$ се изчисляват покомпонентно) и $[f] < [g] \iff C \subseteq^* \{n : f(n) < g(n)\}$. Използвайки аритметичната кохесивност на C, може да се покаже, че тази структура е елементарно еквивалентна на $(\mathbb{N}; +, \times, <)$. Структурата е изброима, защото има само изброимо много аритметични функции и има нестандартен елементи, такива като елемента, представящ идентитета.

Можем да считаме Скулемовата конструкция като по-ефективен аналог на конструкцията на ултрастепен. Вместо да строим структура от всички функции $f{:}\,\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, Скулем строи структура само от аритметичните функции f. Аритметичното кохесивно множество C играе ролята на ултарфилтър. Феферман, Скот и Тененбаум [FST59] изследват въпроса дали Скулемовата конструкция може да стене по-ефективна, ако предположим, че C е само *r-кохесивно* (т.е. кохесивно за съвкупността от изчислимите множества) и ограничавайки се само до изчислими функции f. Те отговарят на този въпрос негативно, показвайки че дори не е възможно да получим модел на Пеановата аритметика по този начин. Лерман [Ler70] изследва ситуацията по-нататък и показва, че ако се ограничим до *кохесивни* множества C (т.е, кохесивни за съвкупността на р.н. множества), които са ко-р.н. и до изчислимите функции f, тогава теорията от първи ред на получената структура е точно определена от многозначната степен на C. Още резултати в тази посока се появяват в [Hir75, HW75].

Димитров [Dim09] обобщава конструкцията за ефективни ултрастепени за произволни изчислими структури. Тези *кохесивни степени* от изчислими структури се изучават в [Dim08, DH15, DHMM14], във връзка с решетката на р.н. подпространства, по модул крайна размерност, на едно фиксирано изчислимо с безкрайна размерност векторно пространство над $\mathbb{Q}$. В тази секция ние изследваме въпрос, дуален на въпроса изучаван от Лерман. Лерман фиксира изчислима презентация на изчислима структура (всъщност, всички изчислими презентации на стандартния модел на аритметиката са изчислимо изоморфни) и изучава ефекта от избора на кохесивното множество, как то влияе на кохесивната степен. Вместо да фиксираме изчислима презентация на структурата и да променяме кохесивното множество, ние фиксираме изчислимо представена структура и кохесивно множество и тогава разглеждаме различните изчислими презентации. Фокусът ни са линейните наредби, със специално наблягане на изчислимите представяния на ω. Избрахме да работим с линейни наредби, защото те са добър източник на неизчислими категорични структури и защото са достатъчно прости за да можем напълно да опишем някои кохесивни степени с точност до изоморфизъм. Тези резултати [DHM+19] и една доста разширена версия [DHM+20] са съвместни с Димитров, Харизанов, Морозов, Шефер и Вътев.

Нашият основен резултат е следният, където ω, ζ и η означават съответните типове наредби на естествените числа, на целите числа и на рационалните числа.

- Ако C е кохесивно и $\mathcal{L}$ е изчислимо копие на ω, което е изчислимо изоморфно на стандартното представяне на ω (т.е., $\mathcal{L}$ има изчислима функция наследник), тогава кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{L}$ има тип наредба $\omega + \zeta\eta$. (Следствие 6.4.6.)

- Ако C е ко-р.н. и кохесивно и $\mathcal{L}$ е изчислимо копие на ω, тогава крайната кондензация на кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{L}$ има тип наредба $1 + \eta$. (Теорема 6.4.4. Виж дефиниция 6.3.3 за дефиницията на *крайна кондензация*.)

- Ако C е ко-р.н. и кохесивно, тогава има изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω, където кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{L}$ има тип-наредба $\omega + \eta$. (Следствие 6.5.2.)

- По-общо, ако C е ко-р.н. и кохесивно и $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ е или Σ^0_2 множество или Π^0_2 множество, приемайки го като множество от крайни типове наредба, тогава има изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω, за което кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{L}$ има тип наредба $\omega+\sigma(X\cup\{\omega+\zeta\eta+\omega^*\})$. Тук ω^* означава в обратен ред наредена ω и σ означава "разбърканата сума" (shuffle sum) от Дефиниция 6.6.1. Освен това, ако X е крайно и непразно, то има изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω, където кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{L}$ има тип наредба $\omega + \sigma(X)$. (Теорема 6.6.6.)

Горният резултат дава много примери от двойки изоморфни изчислими линейни наредби, чиито кохесивни степени не са елементарно еквивалентни. Показваме също примери на изчислими линейни наредби, които винаги са изоморфни на своите кохесивни степени и примери от двойки линейни наредби, които не са елементарно еквивалентни, чиито кохесивни степени са изоморфни.

6.1 Основни свойства

Дефиниция 6.1.1. Едно безкрайно множество $C \subseteq \mathbb{N}$ е *кохесивно*, ако за всяко р.н. множество W, или $C \subseteq^* W$, или $C \subseteq^* \overline{W}$.

Да забележим, че ако C е кохесивно множество и X е или р.н. или ко-р.н., тогава ако $C \cap X$ е безкрайно, то $C \subseteq^* X$. Използваме кванторите $\forall^\infty n$ и $\overset{\infty}{\exists}\, n$ като съкращение на 'за почти всяко n' и 'има безкрайно много n'. Така например, $(\forall^\infty n \in C)(n \in X)$ означава $C \subseteq^* X$.

Дефиниция 6.1.2 ([Dim09])**.** Нека $\mathfrak{L}$ е изчислим език. Нека $\mathcal{A}$ е изчислима $\mathfrak{L}$-структура с непразен носител $A \subseteq \mathbb{N}$. Нека $C \subseteq \mathbb{N}$ е кохесивно. *Кохесивнаа степен на $\mathcal{A}$ над C*, означена с $\Pi_C\mathcal{A}$, е $\mathfrak{L}$-структура $\mathcal{B}$, дефинирана както следва.

- Нека $D = \{\varphi \mid \varphi\colon \mathbb{N} \to A$ е част. рекурсивна функция и $C \subseteq^* dom(\varphi)\}$.
- За $\varphi, \psi \in D$, нека $\varphi =_C \psi$ означава $C \subseteq^* \{x : \varphi(x)\downarrow = \psi(x)\downarrow\}$. Релацията $=_C$ е релация на еквивалентност над D. Нека $[\varphi]$ означава класа на еквивалентност на $\varphi \in D$, относно $=_C$.
- Носителят на $\mathcal{B}$ е множеството $B = \{[\varphi] : \varphi \in D\}$.
- Нека R е n-местен предикатен символ от $\mathfrak{L}$. За $[\varphi_0], \dots, [\varphi_{n-1}] \in B$, дефинираме

$$R^{\mathcal{B}}([\varphi_0], \dots, [\varphi_{n-1}]) \Leftrightarrow C \subseteq^* \{x : (\forall i < n)\varphi_i(x)\downarrow \wedge R^{\mathcal{A}}(\varphi_0(x), \dots, \varphi_{n-1}(x))\}.$$

- Нека f е n-местен функционален символ от $\mathfrak{L}$. За $[\varphi_0], \dots, [\varphi_{n-1}] \in B$, нека ψ е частично рекурсивна функция, дефинирана с

$$\psi(x) \simeq f^{\mathcal{A}}(\varphi_0(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)),$$

и да забележим, че $C \subseteq^* dom(\psi)$, тъй като $C \subseteq^* dom(\varphi_i)$, за всяко $i < n$. Дефинираме $f^{\mathcal{B}}$ by $f^{\mathcal{B}}([\varphi_0], \dots, [\varphi_{n-1}]) = [\psi]$.

- Нека c е константен символ на $\mathfrak{L}$. Ако ψ е тоталната изчислима функция с константни стойности $c^{\mathcal{A}}$, то дефинираме $c^{\mathcal{B}} = [\psi]$.

Ние често разглеждаме кохесивните степени на изчислими структури с ко-р.н. кохесивно множество. Ко-р.н. кохесивни множества са точно допълненията на *максималните* множества, които са ко-атоми на решетката от р.н. множества по модул крайна разлика. Такива множества съществуват по добре познатата теорема на Фридберг (виж [Soa87] Теорема X.3.3). Кохесивните степени са ефективен аналог на ултрастепените, така по тази аналогия, има смисъл да наложим ефективност на кохесивното множество, които играе ролята на ултарфилтър. Технически, това помага да разберем, кои числа не са в кохесивното множество C, когато строим изчислима структура $\mathcal{A}$ и така също това влияе на $\Pi_C\mathcal{A}$ по един особен начин. Кохесивните степени на ко-р.н. кохесивно множество също имат свойство, което помага всеки член на кохесивната степен да има тотално изчислима функция-представител.

Една рестриктивна версия на Теорема на Лош е в сила за кохесивните степени. Ако $\mathcal{A}$ е изчислима структура, C е кохесивно множество и Φ е Π_3 затворена формула, тогава от $\Pi_C\mathcal{A} \vDash \Phi$, следва $\mathcal{A} \vDash \Phi$. В общия случай тази рестриктивна версия на теоремата на Лош за кохесивни степени е възможно най-доброто. В Секции 6.4, 6.5, и 6.6, разглеждаме няколко примера на изчислима линейна наредба $\mathcal{L}$, в която Σ^0_3 затворената формула “има елемент без непосредствен предшественик” е вярна за някоя кохесивна степен на $\mathcal{L}$, но не е вярна в $\mathcal{L}$.

Теорема 6.1.3 ([Dim09])**.** Нека $\mathcal{A}$ е изчислима структура и C е кохесивно множество.

(1) Нека $t(v_0,\dots,v_{n-1})$ е терм и $[\varphi_0],\dots,[\varphi_{n-1}] \in |\Pi_C\mathcal{A}|$. Ако ψ е частично рекурсивна функция $\psi(x) \simeq t^{\mathcal{A}}(\varphi_0(x),\dots,\varphi_{n-1}(x))$, тогава $t^{\Pi_C\mathcal{A}}([\varphi_0],\dots,[\varphi_{n-1}]) = [\psi]$.

(2) Нека $\Phi(v_0,\dots,v_{n-1})$ е булева комбинация от Σ^0_1 и Π^0_1 формули, с показаните свободни променливи. За всеки $[\varphi_0],\dots,[\varphi_{n-1}] \in |\Pi_C\mathcal{A}|$,

$$\Pi_C\mathcal{A} \vDash \Phi([\varphi_0],\dots,[\varphi_{n-1}]) \quad\Leftrightarrow\quad C \subseteq^* \{x : (\forall i < n)\varphi_i(x)\downarrow \wedge \\ \mathcal{A} \vDash \Phi(\varphi_0(x),\dots,\varphi_{n-1}(x))\}.$$

(3) Ако Φ е Π^0_2 затворена формула или Σ^0_2 затворена формула, то $\Pi_C\mathcal{A} \vDash \Phi$, ако и само ако $\mathcal{A} \vDash \Phi$.

(4) Ако Φ е Π_3 затворена формула и $\Pi_C\mathcal{A} \vDash \Phi$, tтогава $\mathcal{A} \vDash \Phi$.

Както при структурите и техните ултарстепени, една изчислима структура $\mathcal{A}$ винаги естествено се влага в нейната кохесивна степен. За

$a \in A$, нека ψ_a е тотална изчислима функция с константна стойност a. Тогава за всяко кохесивно множество C, изображението $a \mapsto [\psi_a]$ влага $\mathcal{A}$ в $\Pi_C \mathcal{A}$. Това изображение се нарича *канонично влагане* на $\mathcal{A}$ в $\Pi_C \mathcal{A}$. Ако $\mathcal{A}$ е крайна и C е кохесивно, тогава всяка частично рекурсивна функция $\varphi : \mathbb{N} \to |\mathcal{A}|$ с $C \subseteq^* dom(\varphi)$ е евентуално константа в C. В този случай, всеки елемент на $\Pi_C \mathcal{A}$ е в областта от стойности на каноничното влагане и следователно $\mathcal{A} \cong \Pi_C \mathcal{A}$. Ако $\mathcal{A}$ е безкрайна изчислима структура, то всяка кохесивна степен $\Pi_C \mathcal{A}$ е изброимо безкрайна: безкрайна, защото $\mathcal{A}$ се влага в $\Pi_C \mathcal{A}$ и изброима, защото елементите на $\Pi_C \mathcal{A}$ са представени с частично рекурсивни функции. Виж [Dim09] за повече детайли.

Изчислимите структури, които са изчислимо изоморфни (т.е. има изчислим изоморфизъм), имат изоморфни кохесивни степени. Този факт по същество се появява в [Dim09], но ние включваме доказателството тук за пълнота.

Теорема 6.1.4. Нека $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ са изчислими $\mathfrak{L}$-структури, които са изчислимо изоморфни и нека C е кохесивно. Тогава $\Pi_C \mathcal{A}_0 \cong \Pi_C \mathcal{A}_1$.

Да припомним, че една изчислима структура $\mathcal{A}$ се нарича *изчислимо категорична*, ако всяка изчислима структура, изоморфна на $\mathcal{A}$, е изоморфна на $\mathcal{A}$ с помощта на изчислим изоморфизъм. От Теорема 6.1.4 следва, че ако $\mathcal{A}$ е изчислимо категорична изчислима структура и C е кохесивно, то $\Pi_C \mathcal{A} \cong \Pi_C \mathcal{B}$, всеки път, когато $\mathcal{B}$ е изчислима структура, изоморфна на $\mathcal{A}$.

Следствие 6.1.5. Нека $\mathcal{A}$ е изчислимо категорична изчислима структура, нека $\mathcal{B}$ е изчислима структура, изоморфна на $\mathcal{A}$ и нека C е кохесивно. Тогава $\Pi_C \mathcal{A} \cong \Pi_C \mathcal{B}$.

В Теорема 6.1.4, е съществено, че двете структури са изоморфми с изчислим изоморфизъм. В следващата секция представяме конструкция с две изоморфни структури с неизоморфни кохесивни степени. В Секция 6.4, 6.5, и 6.6, разглеждаме много примери на двойки изчислими линейни наредби (но не изчислимо изоморфни) на ω с кохесивни степени, които не са елементарно еквивалентни.

6.2 Неизоморфни кохесивни степени на изоморфни структури

Теорема 6.2.1. За всяко кохесивно ко-р.н. (ко-максимално) множество $C \subseteq \mathbb{N}$ има две изоморфни изчислими структури $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, на които кохесивните степени $\prod_C \mathcal{A}$ и $\prod_C \mathcal{B}$ не са изоморфни.

Нека S е множеството от четните числа. За всяко безкрайно множество $A \subseteq S$, такова че $S \setminus A$ е безкрайно, построяваме изчислима структура

$\mathcal{M}_A = (\mathbb{N}, P)$, където $P(x, w, y)$ казва, че има стрелка с етикет w от x в y (например, $x \xrightarrow{w} y$) с много свойства, включително, формулата

$$\Phi(x, y) = \exists w P(x, w, y) \wedge \neg\exists w_1 P(y, w_1, x)$$

се удовлетворява точно от тези $x, y \in A$, за които $x < y$. Освен това, за всеки две безкрайни множества D, $E \subseteq S$ и такива, че $S \smallsetminus D$ и $S \smallsetminus E$ са безкрайни и р.н., имаме $\mathcal{M}_D \cong \mathcal{M}_E$. Формулата $\Theta(x)$ дефинира множеството A в $\mathcal{M}_A$, където

$$\Theta(x) = (\exists t)\left[\Phi(x, t) \vee \Phi(t, x)\right].$$

За всяка структура $\mathcal{M} = (M, P)$ в езика с един триместен предикатен символ, нека $L_{\mathcal{M}} = \{x \in M \mid \mathcal{M} \models \Theta(x)\}$ и
$<_{L_{\mathcal{M}}} = \{(x, y) \in M \times M \mid \mathcal{M} \models \Phi(x, y)\}$.

Фиксираме $A \subseteq S$, такова че $S \smallsetminus A$ е безкрайно и р.н. Следователно формулата $\Phi(x, y)$ дефинира в $\mathcal{M}_A$ рестрикцията на естествената наредба $<$ до A. Ясно е, че $(L_{\mathcal{M}_A}, <_{L_{\mathcal{M}_A}})$ има тип наредба ω.

Нека $\mathcal{M}^\sharp_A = \prod_C \mathcal{M}_A$. За частично рекурсивните функции f и g, такива че $[f], [g] \in dom(\mathcal{M}^\sharp_A)$ имаме:

(i) $\mathcal{M}^\sharp_A \models \Phi([f], [g]) \Leftrightarrow C \subseteq^* \{i \mid (f(i) \in A) \wedge (g(i) \in A) \wedge (f(i) < g(i))\}$

(ii) $L_{\mathcal{M}^\sharp_A} = \{[f] \in \mathcal{M}^\sharp_A \mid f(C) \subseteq^* A\}$ и $(L_{\mathcal{M}^\sharp_A}, <_{L_{\mathcal{M}^\sharp_A}})$ е линейна наредба.

За всяко $a \in A$ нека $f_a(i) = a$ за всяко $i \in \omega$. Наричаме елемента $[f_a]$ константа в $\mathcal{M}^\sharp_A$.

Множеството от константи $\{[f_a] \mid a \in A\}$ в структурата $\mathcal{M}^\sharp_A$ образува начален сегмент на $(L_{\mathcal{M}^\sharp_A}, <_{L_{\mathcal{M}^\sharp_A}})$ с тип наредба ω.

Сега дефинираме следната Σ^0_3 затворена формула:

$$\Psi = (\exists x)\left[\Theta(x) \wedge (\forall y)\left[\Theta(y) \Rightarrow \Phi(y, x)\right]\right].$$

Интерпретацията на Ψ следва да е: ако $\Phi(x, t)$ дефинира линейна наредба $(L_{\mathcal{M}}, <_{L_{\mathcal{M}}})$, то наредбата има най-голям елемент. Да забележим, че $\mathcal{M}_A \models \neg\Psi$. Това е защото $\left(L_{\mathcal{M}_A}, <_{L_{\mathcal{M}_A}}\right)$ има тип наредба ω и следователно няма най-голям елемент.

Използваме Твърдение 2.1 от [Ler70].

Твърдение 6.2.2. (Лерман [Ler70]) Нека R е ко-r-максимално множество (т.е. кохесивно, ко-рекурсивно), и нека f е изчислима функция, такава че $f(R) \cap R$ е безкрайно. Тогава рестикцията $f \restriction R$ се различава от идентитета само за краен брой стойности.

Фиксираме ко-максимално (следователно ко-r-максимално) множество $C \subseteq S$ и едно безкрайно, ко-безкрайно множество $D \subseteq S$. Имаме $\mathcal{M}_C \cong \mathcal{M}_D$. Века $\mathcal{M}^\sharp_C = \prod_C \mathcal{M}_C$ и $\mathcal{M}^\sharp_D = \prod_C \mathcal{M}_D$.

Не е трудно да се покаже, че тъй като C е ко-максимално, за всяка изчислима функция φ, за която $C \subseteq^* dom(\varphi)$, има изчислима функция f_φ, такава че $[\varphi] = [f_\varphi]$ (виж [DHMM14]).

За да довършим, използваме следните факти:

$\mathcal{M}^\sharp_C \vDash \Psi$

$\mathcal{M}^\sharp_D \vDash \neg\Psi$

Накрая дефинираме изчислими изоморфни структури $\mathcal{M}_C$ и $\mathcal{M}_D$, такива че $\prod_C \mathcal{M}_C$ и $\prod_C \mathcal{M}_D$ не са дори елементарно еквивалентни. Структурата $\mathcal{M}_C$ също дава точна горна граница на фундаменталната теорема за кохесивните степени (Теорема 6.1.3). Именно, за Σ^0_3 затворена формула Ψ, $\mathcal{M}_C \vDash \neg\Psi$, но $\prod_C \mathcal{M}_C \vDash \Psi$.

6.3 Линейни наредби и техните кохесивни степени

Изследваме кохесивните степени на изчислими линейни наредби, като специално внимание отделяме на изчислимите линейни наредби от тип ω. Една *линейна наредба* $\mathcal{L} = (L, \prec)$ се състои от непразно множество L, заедно с двуместна релация $\prec$, удовлетворяваща следните аксиоми.

- $\forall x\,(x \nprec x)$
- $\forall x \forall y\,(x \prec y \;\rightarrow\; y \nprec x)$
- $\forall x \forall y \forall z\,[(x \prec y \wedge y \prec z) \;\rightarrow\; x \prec z]$
- $\forall x \forall y\,(x \prec y \vee x = y \vee y \prec x)$

Допълнително, една линейна наредба $\mathcal{L}$ е *гъста*, ако $\forall x \forall y \exists z\,(x \prec y \rightarrow x \prec z \prec y)$ и *няма крайни точки*, ако $\forall x \exists y \exists z\,(y \prec x \prec z)$. Книгата на Розенщайн [Ros82] е отличен източник за свойствата на линейните наредби.

За линейната наредба $\mathcal{L} = (L, \prec)$, използваме обичайните означения за интервали $(a,b)_\mathcal{L} = \{x \in L : a \prec x \prec b\}$ и $[a,b]_\mathcal{L} = \{x \in L : a \preceq x \preceq b\}$ за да означи отворен и затворен интервал в $\mathcal{L}$. Понякога е удобно да позволим $b \preceq a$, в тези означения, в случая, $(a,b)_\mathcal{L} = \varnothing$. Означението $|(a,b)_\mathcal{L}|$ показва големината на интервала $(a,b)_\mathcal{L}$. Означенията $\min_\prec\{a,b\}$ и $\max_\prec\{a,b\}$ показват минимума и максимума на a и b по отношение на наредбата $\prec$.

Както е обичайно, ω означава типа наредба $(\mathbb{N}, <)$, ζ е означение за типа наредба $(\mathbb{Z}, <)$ и η означава типа наредба $(\mathbb{Q}, <)$. Така, ω, ζ и η означават съответния тип наредба в естествените числа, целите числа и рационалните, всяка със своята обичайна наредба. Използваме $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ и $(\mathbb{Q}, <)$ като *стандартните презентации* на ω, ζ и η, съответно. Да припомним, че всяка изброима гъста линейна наредба без крайни точки има тип наредба η (виж [Ros82] Теорема 2.8). Освен това, всяка изчислима изброима гъста наредба без крайни точки е изчислимо изоморфна на $\mathbb{Q}$ (виж [Ros82] Задача 16.4).

За да опишем типовете наредби, използваме операциите *сума*, *произведение* и *обратна* над линейни наредби, както и *кондензация*на линейни наредби.

Дефиниция 6.3.1. Нека $\mathcal{L}_0 = (L_0, \prec_{\mathcal{L}_0})$ и $\mathcal{L}_1 = (L_0, \prec_{\mathcal{L}_1})$ са линейни наредби.

- *Сумата* $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ на $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ е линейна наредба $\mathcal{S} = (S, \prec_{\mathcal{S}})$, където $S = (\{0\} \times L_0) \cup (\{1\} \times L_1)$ и

$$(i, x) \prec_{\mathcal{S}} (j, y) \quad \text{т.т.к.} \quad (i < j) \vee (i = j \wedge x \prec_{\mathcal{L}_i} y).$$

- *Произведението* $\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1$ на $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ е линейната наредба $\mathcal{P} = (P, \prec_{\mathcal{P}})$, където $P = L_1 \times L_0$ и

$$(x, a) \prec_{\mathcal{P}} (y, b) \quad \text{т.т.к.} \quad (x \prec_{\mathcal{L}_1} y) \vee (x = y \wedge a \prec_{\mathcal{L}_0} b).$$

  Да забележим, че по (добре установена) конвенция, $\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1$ е зададена по лексикографската наредба на произведението $L_1 \times L_0$, а не по $L_0 \times L_1$.

- *Обратната* $\mathcal{L}_0^*$ на $\mathcal{L}_0$ е линейна наредба $\mathcal{R} = (R, \prec_{\mathcal{R}})$, $R = L_0$ и $x \prec_{\mathcal{R}} y$, ако и само ако $y \prec_{\mathcal{L}_0} x$. Да предупредим читателя, че $*$ в означението $\mathcal{L}_0^*$ няма общо със $*$ в означението $X \subseteq^* Y$.

Ако $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ са изчислими линейни наредби, то може да се използва функцията наредени двойки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ за да изчислим копия на $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1$. Разбира се, ако $\mathcal{L}$ е изчислима линейна наредба, то такава е и $\mathcal{L}^*$.

Дефиниция 6.3.2. Нека $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ е линейна наредба. *Кондензация* на $\mathcal{L}$ е всяка линейна наредба $\mathcal{M} = (M, \prec_{\mathcal{M}})$, получена с разбиване на L с колекция на непразни интервали M и за интервалите $I, J \in M$, дефинираме $I \prec_{\mathcal{M}} J$ ако и само ако $(\forall a \in I)(\forall b \in J)(a \prec_{\mathcal{L}} b)$.

Най-важната кондензация е *крайната кондензация*.

Дефиниция 6.3.3. Нека $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ е линейна наредба. За $x \in L$, нека с $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(x)$ означим множеството от $y \in L$, за които има само краен брой елементи между x и y:

$$\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(x) = \{y \in L : \text{интервалът } [\min_{\prec_{\mathcal{L}}}\{x, y\}, \max_{\prec_{\mathcal{L}}}\{x, y\}]_{\mathcal{L}} \text{ в } \mathcal{L} \text{ е краен}\}.$$

Множеството $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(x)$ е винаги непразен интервал, тъй като $x \in \mathbf{c}_{\mathrm{F}}(x)$. *Крайната кондензация* $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\mathcal{L})$ на $\mathcal{L}$ е кондензация, получена от разделянето (разбиването) $\{\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(x) : x \in L\}$.

Например, $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\omega) \cong 1$, $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\zeta) \cong 1$, $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\eta) \cong \eta$ и $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\omega + \zeta\eta) \cong 1 + \eta$. Да забележим, че за един елемент x от линейната наредба $\mathcal{L}$, типът наредба $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(x)$ е винаги краен, ω, ω^*, или ζ.

Наричаме често интервалите, които съдържа кондензацията на една линейна наредба $\mathcal{L}$ *блокове*. За крайната кондензация на $\mathcal{L}$, един блок е максималният интервал I, такъв че за всеки два елемента на I има само краен брой елементи на $\mathcal{L}$ между тях. В Глава 4. използвахме понятието блок в този смисъл. За елементи a и b на $\mathcal{L}$, пишем $a \ll_{\mathcal{L}} b$, ако интервалът $(a, b)_{\mathcal{L}}$ (еквивалентно, интервалът $[a, b]_{\mathcal{L}}$) в $\mathcal{L}$ е безкраен. За $a <_{\mathcal{L}} b$, имаме, че $a \ll_{\mathcal{L}} b$, ако и само ако a и b са в различни блокове. Виж [Ros82] Глава 4 за повече детайли.

Директно проверяваме, че ако $\mathcal{L}$ е изчислима линейна наредба и C е кохесивно, тогава $\Pi_C\mathcal{L}$ е също линейна наредба. Освен това, може да се покаже, че ако $\mathcal{L}$ е изчислима гъста линейна наредба без крайни точки, то $\Pi_C\mathcal{L}$ е също гъста линейна наредба без крайни точки. Тези два факта следват още от Теорема 6.1.3, защото линейните наредби се описват от Π^0_1 затворени формули, и гъстите линейни наредби без крайни точки се определят с Π^0_2 затворени формули.

Случаят на $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ е специален и заслужава внимание. Ние видяхме, че ако $\mathcal{A}$ е крайна структура, тогава $\mathcal{A} \cong \Pi_C\mathcal{A}$ за всяко кохесивно множество C. За $\mathbb{Q}$, $\Pi_C\mathbb{Q}$ е изброима линейна наредба без крайни точки и следователно изоморфна на $\mathbb{Q}$, за всяко кохесивно множество C. Така $\mathbb{Q}$ е един пример на безкрайна изчислима структура с $\mathbb{Q} \cong \Pi_C\mathbb{Q}$, за всяко кохесивно множество C. Това, че $\mathbb{Q}$ е изоморфна на всички свои кохесивни степени не е случайно. С комбиниране на Теорема 6.1.3 с теорията на границите на Фресе —*Fraïssé limits* (виж [Hod93] Глава 6, например), виждаме, че равномерно локално крайните ултрахомогенни изчислими структури в краен език са винаги изоморфни на всички свои кохесивни степени. Да припомним, че една структура е *локално крайна*, ако всяка крайно генерирана подструктура е крайна и е *равномерно локално крайна*, ако има функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такава че всяка подструктура, генерирана от най-много n елемента, има мощност най-много $f(n)$. Да забележим, че всяка структура в краен релационен език е равномерно локално крайна. Също да припомним, че една структура е *ултрахомогенна*, ако всеки изоморфизъм между две крайно генерирани подструктури се разширява до автоморфизъм на структурата.

Твърдение 6.3.4. Нека $\mathcal{A}$ е безкрайна равномерно локално крайна ултрахомогенна изчислима структура в краен език и нека C е кохесивно. Тогава $\mathcal{A} \cong \Pi_C\mathcal{A}$.

От твърдение 6.3.4 следва, че ако една равномерно локално крайна изчислима структура, в краен език, е граница на Фресе, тогава тя е изоморфна на всички свои кохесивни степени. Така изчислимите презентации на Радо граф (случаен граф) и на изброимите безатомни булеви алгебри са допълнителни примери на изчислими структури, които са изоморфни на всички свои кохесивни степени. Примери на този феномен, които не се дължат на ултрахомогенност, се появяват и в Секции 6.4 и 6.5.

Да се върнем към линейните наредби, да припомним следната добре позната лема, която казва че една строго запазваща наредбата сюрекция от една линейна наредба в друга, е изоморфизъм.

Лема 6.3.5. Нека $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ и $\mathcal{M} = (M, \prec_{\mathcal{M}})$ са линейни наредби. Ако $f: L \to M$ е сюрективна и удовлетворява $(\forall x, y \in L)[x \prec_{\mathcal{L}} y \to f(x) \prec_{\mathcal{M}} f(y)]$, тогава f е изоморфизъм.

Кохесивните степени комутират със сума, произведение и обръщане на наредбата.

Теорема 6.3.6. Нека $\mathcal{L}_0 = (L_0, \prec_{\mathcal{L}_0})$ и $\mathcal{L}_1 = (L_1, \prec_{\mathcal{L}_1})$ са изчислими линейни наредби и нека C е кохесивно. Тогава:

(1) $\Pi_C(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1) \cong \Pi_C\mathcal{L}_0 + \Pi_C\mathcal{L}_1$,

(2) $\Pi_C(\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1) \cong (\Pi_C\mathcal{L}_0)(\Pi_C\mathcal{L}_1)$ и

(3) $\Pi_C(\mathcal{L}_0^*) \cong (\Pi_C\mathcal{L}_0)^*$.

Секциите 6.4, 6.5 и 6.6 разглеждат въпроса с изследването на типа наредба на кохесивните степени на изчислимите копия на ω. За да направим това, трябва да можем да определим кога един елемент от кохесивната степен е непосредствен наследник или непосредствен предшественик на друг и трябва да можем да детерминираме кога два елемента от кохесивната степен са в различни блокове на тяхната крайна кондензация.

В кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{L}$ на една изчислима линейна наредба $\mathcal{L}$, $[\varphi]$ е непосредствен наследник на $[\psi]$, ако и само ако $\varphi(n)$ е непосредствен наследник на $\psi(n)$ за почти всички $n \in C$. Затова $[\psi]$ е непосредствен предшественик на $[\varphi]$, ако и само ако $\psi(n)$ е непосредствен предшественик на $\varphi(n)$ за почти всяко $n \in C$.

Лема 6.3.7. Нека $\mathcal{L}$ е изчислима линейна наредба, нека C е кохесивно и нека $[\psi]$ и $[\varphi]$ са елементи на $\Pi_C\mathcal{L}$. Тогава следните са еквивалентни.

(1) $[\varphi]$ е $\prec_{\Pi_C\mathcal{L}}$-непосредствен наследник на $[\psi]$.

(2) $(\forall^\infty n \in C)(\varphi(n)$ е $\prec_{\mathcal{L}}$-непосредствен наследник на $\psi(n))$.

(3) $(\overset{\infty}{\exists}\, n \in C)(\varphi(n)$ е $\prec_{\mathcal{L}}$-непосредствен предшественик на $\psi(n))$.

Лема 6.3.8. Нека $\mathcal{L}$ е изчислима линейна наредба, C е кохесивно и нека $[\psi]$ и $[\varphi]$ са елементи на $\Pi_C\mathcal{L}$. Тогава следните са еквивалентни.

(1) $[\psi] \lessdot_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$ (в различни блокове).

(2) $\lim_{n\in C}|(\psi(n),\varphi(n))_{\mathcal{L}}| = \infty$.

(3) $\limsup_{n\in C}|(\psi(n),\varphi(n))_{\mathcal{L}}| = \infty$.

Крайната кондензация на една изчислима линейна наредба с ко-р.н. кохесивно множество е винаги гъста.

Теорема 6.3.9. Нека $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ е изчислима линейна наредба и нека C е ко-р.н. и кохесивно. Тогава $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\Pi_C\mathcal{L})$ е гъста.

Нека $[\varphi]$ и $[\psi]$ са елементи от $\Pi_C\mathcal{L}$ с $[\psi] \lessdot_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$. Изчисляваме ч. р. функция $\theta\colon\mathbb{N}\to L$, така че $[\theta]$ е елемент на $\Pi_C\mathcal{L}$ с $[\psi] \lessdot_{\Pi_C\mathcal{L}} [\theta] \lessdot_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$.

От Лема 6.3.8, $[\psi] \lessdot_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$ означава, че $\limsup_{n\in C}|(\psi(n),\varphi(n))_{\mathcal{L}}| = \infty$. Дефинираме θ с номериране на $\mathrm{graph}(\theta) = \{\langle n,x\rangle : \theta(n) = x\}$. Целта е да получим $|C \cap dom(\theta)| = \infty$ (така, $C \subseteq^* dom(\theta)$ от кохесивността), $\limsup_{n\in C}|(\psi(n),\theta(n))_{\mathcal{L}}| = \infty$ и $\limsup_{n\in C}|(\theta(n),\varphi(n))_{\mathcal{L}}| = \infty$. Тогава следва, че $[\psi] \lessdot_{\Pi_C\mathcal{L}} [\theta] \lessdot_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$.

6.4 Кохесивни степени на изчислими копия на ω

Изследваме кохесивните степени на изчислими линейни наредби от тип ω. Да забележим, че една безкрайна линейна наредба има тип ω, ако и само ако всеки елемент има само краен брой предшественици. Ще използваме това свойство и занапред. Въпреки че не е част от езика на линейните наредби, всяка линейна наредба $\mathcal{L}$ от тип ω има съответна функция непосредствен наследник $S^{\mathcal{L}}\colon|\mathcal{L}| \to |\mathcal{L}|$, зададена с $S^{\mathcal{L}}(x) =$ $\prec_{\mathcal{L}}$-непосредствения наследник на x. За стандартната презентация на ω, функцията непосредствен наследник, разбира се, се задава с изчислимата функция $S(x) = x+1$. Директно се проверява дали едно изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω е изчислимо изоморфно на стандартната презентация, ако и само ако $S^{\mathcal{L}}$ е изчислима.

Ние показваме, че всяка кохесивна степен на стандартната презентация на ω е с тип наредба $\omega + \zeta\eta$ (Теорема 6.4.5). Така и се очакваше, защото $\omega + \zeta\eta$ е известната тип наредба на всеки изброим нестандартен модел на Пеановата аритметика (виж [Kay91], Теорема 6.4). Затова по Теорема 6.1.4, всяка кохесивна степен на всяко изчислимо копие на ω, което е изчислимо изоморфно на стандартната презентация, има тип наредба $\omega + \zeta\eta$, или еквивалентно, всяка кохесивна степен на всяко изчислимо копие на ω с изчислима функция непосредствен наследник има тип наредба $\omega+\zeta\eta$. Но свойството “изчислимо изоморфна на стандартната интерпретация” (еквивалентно, имайки изчислима функция непосредствен наследник) не характеризира изчислимите копия на ω, които имат кохесивни степени от тип $\omega + \zeta\eta$. Показваме, че има изчислимо копие на ω, което не е изчислимо изоморфно на стандартната презентация, но въпреки това всяка негова кохесивна степен е изоморфна на $\omega + \zeta\eta$ (Теорема 6.4.8). Така, за да изчислим копие на ω, имащо кохесивна степен не от тип $\omega + \zeta\eta$, трябва да се направи повече, а не само просто да осигурим функцията наследник да не е изчислима. Ние показваме, че за всяко кохесивно множество C, има изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω, такова че кохесивната му степен $\Pi_C\mathcal{L}$ няма тип наредба $\omega + \zeta\eta$ (Теорема 6.4.9). Но показваме също, че всеки път, когато $\mathcal{L}$ е изчислимо копие на ω и C е ко-р.н. кохесивно множество, крайната кондензация $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\Pi_C\mathcal{L})$ на кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{L}$ винаги има тип наредба $1 + \eta$ (Теорема 6.4.4).

Първо, кохесивната степен на изчислимо копие на ω винаги има начален сегмент от тип а ω.

Лема 6.4.1. Нека $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ е изчислимо копие на ω и C е кохесивно. Тогава образът на каноничното влагане на $\mathcal{L}$ в $\Pi_C\mathcal{L}$ е начален сегмент на $\Pi_C\mathcal{L}$ от тип ω.

Нека $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ е изчислимо копие на ω, C е кохесивно и нека $\varphi\colon \mathbb{N} \to L$ е произволна изчислима биекция. Тогава $[\varphi]$ не е в образа на каноничното влагане на $\mathcal{L}$ в $\Pi_C\mathcal{L}$, следователно трябва да е $\prec_{\Pi_C\mathcal{L}}$ — над всеки елемент на образа на каноничното влагане. Следователно $\Pi_C\mathcal{L}$ е във вида $\omega + \mathcal{M}$ за някоя непразна линейна наредба $\mathcal{M}$. По аналогия с терминологията за модели на Пеановата аритметика, наричаме елементите на ω-частта на $\Pi_C\mathcal{L}$ (т.е. образът на каноничното влагане) *стандартни*, а елементите на $\mathcal{M}$ — частта на $\Pi_C\mathcal{L}$ *нестандартни*.

Лема 6.4.2. Нека $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ е изчислимо копие на ω, C е кохесивно и $[\varphi]$ е елемент на $\Pi_C\mathcal{L}$. Тогава $[\varphi]$ е нестандартен тогава и само тогава, когато $\liminf_{n\in C} \varphi(n) = \infty$ (еквивалентно, $\lim_{n\in C}\varphi(n) = \infty$).

Лема 6.4.3. Нека $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ е изчислимо копие на ω, C е кохесивно, а $[\varphi]$ е нестандартен елемент на $\Pi_C\mathcal{L}$. Тогава има нестандартни елементи $[\psi^-]$ и $[\psi^+]$ на $\Pi_C\mathcal{L}$ с $[\psi^-] \lessapprox_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi] \lessapprox_{\Pi_C\mathcal{L}} [\psi^+]$.

От Леми 6.4.1 и 6.4.3 следва, че ако $\mathcal{L}$ е изчислимо копие на ω и C е кохесивно, то $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\Pi_C\mathcal{L}) \cong 1 + \mathcal{M}$ за някоя безкрайна наредба $\mathcal{M}$. Наричаме блокът, съответен на 1 — *стандартен блок*, а блоковете, съответни на $\mathcal{M}$ *нестандартни блокове*. Ако допълнително допуснем, че C е ко-р.н., то получаваме, че $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\Pi_C\mathcal{L}) \cong 1 + \eta$.

Теорема 6.4.4. Нека $\mathcal{L}$ е изчислимо копие на ω, а C е ко-р.н. и кохесивно. Тогава $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\Pi_C\mathcal{L})$ има тип наредба $1 + \eta$.

По Лема 6.4.1, стандартните елементи на $\Pi_C\mathcal{L}$ образуват начален блок. По Теорема 6.3.9 и Лема 6.4.3, нестандартните блокове на $\Pi_C\mathcal{L}$ формират една изброима гъста линейна наредба без крайни точки. Следователно $\mathbf{c}_{\mathrm{F}}(\Pi_C\mathcal{L}) \cong 1 + \eta$.

Мислейки в термините на блокове, това че линейната наредба $\mathcal{M}$ има тип $\omega + \zeta\eta$ ни позволява да покажем, че $\mathcal{M}$ се състои от начален блок от тип ω, следван от гъсти (без крайни точки) наредени блокове от тип ζ.

Теорема 6.4.5. Нека $\mathbb{N}$ е стандартната презентация на ω и нека C е кохесивно. Тогава $\Pi_C\mathbb{N}$ има тип наредба $\omega + \zeta\eta$.

По Лема 6.4.1, $\Pi_C\mathbb{N}$ има начален сегмент от тип ω. За да покажем за нестандартните блокове, че всеки има тип наредба ζ, показваме, че всеки елемент на $\Pi_C\mathbb{N}$ има $<_{\Pi_C\mathbb{N}}$-непосредствен наследник и всеки елемент на $\Pi_C\mathbb{N}$, без първия елемент, има $<_{\Pi_C\mathbb{N}}$-непосредствен предшественик.

По Лема 6.4.3, няма нито най-малък, нито най-голям нестандартен блок на $\Pi_C\mathbb{N}$. Не можем да използваме Теорема 6.3.9, да заключим, че нестандартните блокове са гъсто наредени, защото не предполагаме, че C е ко-р.н. Така да предположим, че $[\varphi]$ и $[\psi]$ са такива, че $[\psi] \ll_{\Pi_C\mathbb{N}} [\varphi]$ (в различни блокове). Тогава $\lim_{n\in C}|(\psi(n),\varphi(n))| = \infty$ по Лема 6.3.8. Дефинираме частично рекурсивна функция θ с $\theta(n) \simeq \lfloor(\varphi(n)+\psi(n))/2\rfloor$. Тогава $\lim_{n\in C}|(\psi(n),\theta(n))| = \infty$ и $\lim_{n\in C}|(\theta(n),\varphi(n))| = \infty$, така $[\psi] \ll_{\Pi_C\mathbb{N}} [\theta] \ll_{\Pi_C\mathbb{N}} [\varphi]$. Следователно нестандартните блокове на $\Pi_C\mathbb{N}$ формират една гъста линейна наредба без крайни точки. Така $\Pi_C\mathbb{N} \cong \omega + \zeta\eta$.

Следствие 6.4.6. Нека $\mathcal{L}$ е изчислимо копие на ω с изчислима функция наследник и нека C е кохесивно. Тогава $\Pi_C\mathcal{L}$ има тип наредба $\omega + \zeta\eta$.

Можем да изчислим типовете наредби на кохесивните степени на много други изчислими презентации на линейни наредби с комбиниране на Теореми 6.1.4, 6.3.6, 6.4.5 и факта $\Pi_C\mathbb{Q} \cong \eta$.

Пример 6.4.7. Нека C е кохесивно множество. Нека $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ означават стандартните презентации на ω, ζ и η.

(1) $\Pi_C\mathbb{N}^* \cong \zeta\eta + \omega^*$. Това е защото

$$\Pi_C\mathbb{N}^* \;\cong\; (\Pi_C\mathbb{N})^* \;\cong\; (\omega+\zeta\eta)^* \;\cong\; \zeta\eta+\omega^*.$$

(2) $\Pi_C\mathbb{Z} \cong \zeta\eta$. Това е защото $\mathbb{Z}$ е изчислимо изоморфна на $\mathbb{N}^* + \mathbb{N}$, така

$$\begin{aligned}\Pi_C\mathbb{Z} \;\cong\; \Pi_C(\mathbb{N}^*+\mathbb{N}) \;\cong\; \Pi_C(\mathbb{N})^* + \Pi_C(\mathbb{N}) \;&\cong\; (\zeta\eta+\omega^*)+(\omega+\zeta\eta)\\ &\cong\; \zeta\eta+\zeta+\zeta\eta \;\cong\; \zeta\eta.\end{aligned}$$

(3) $\Pi_C(\mathbb{Z}\mathbb{Q}) \cong \zeta\eta$. Това е защото

$$\Pi_C(\mathbb{Z}\mathbb{Q}) \;\cong\; (\Pi_C\mathbb{Z})(\Pi_C\mathbb{Q}) \;\cong\; (\zeta\eta)\eta \;\cong\; \zeta\eta.$$

(4) $\Pi_C(\mathbb{N}+\mathbb{Z}\mathbb{Q}) \cong \omega+\zeta\eta$. Това е защото

$$\Pi_C(\mathbb{N}+\mathbb{Z}\mathbb{Q}) \;\cong\; \Pi_C(\mathbb{N}) + \Pi_C(\mathbb{Z}\mathbb{Q}) \;\cong\; (\omega+\zeta\eta)+\zeta\eta \;\cong\; \omega+\zeta\eta.$$

Да припомним, че по Твърдение 6.3.4, една ултрахомогенна изчислима структура от краен релационен език, както например изчислимата линейна наредба $\mathbb{Q}$, е изоморфна на всяка своя кохесивна степен. Да забележим, обаче, че изчислимите линейни наредби $\mathbb{Z}\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}+\mathbb{Z}\mathbb{Q}$ не са ултрахомогенни, но въпреки това са изоморфни на съответните си кохесивни степени. Така, възможно е също неултрахомогенна изчислима структура да бъде изоморфна на всяка своя кохесивна степен.

Да забележим още, че $\Pi_C\mathbb{N}$ и $\Pi_C(\mathbb{N}+\mathbb{Z}\mathbb{Q})$ и двете имат тип наредба $\omega+\zeta\eta$. Подобно, $\Pi_C\mathbb{Z}$ и $\Pi_C(\mathbb{Z}\mathbb{Q})$ и двете имат тип наредба $\zeta\eta$. Така, възможно е също и неизоморфни линейни наредби да имат изоморфни кохесивни степени. В Секция 6.5 даваме пример за двойки от структури, които не са елементарно еквивалентни, но имат изоморфни кохесивни степени.

Сега да разгледаме един пример на изчислимо копие на ω, което не е изчислимо изоморфно на стандартната интерпретация, но всичките му кохесивни степени са от тип $\omega+\zeta\eta$.

Теорема 6.4.8. Има изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω , такова че

- $\mathcal{L}$ не е изчислимо изоморфна на стандартната презентация на ω, но
- за всяко кохесивно множество C, кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{L}$ има тип $\omega+\zeta\eta$.

Използваме класически пример на изчислимо копие на ω с неизчислима функция наследник.

Нека C е кохесивно. Показваме, че $\Pi_C\mathcal{L}\cong\omega+\zeta\eta$. Както в Теорема 6.4.5, достатъчно е да покажем следното.

(a) Всеки елемент на $\Pi_C\mathcal{L}$ има $\prec_{\Pi_C\mathcal{L}}$-непосредствен наследник.

(b) Всеки елемент на $\Pi_C\mathcal{L}$, който не е $\prec_{\Pi_C\mathcal{L}}$-най-малък елемент, има $\prec_{\Pi_C\mathcal{L}}$-непосредствен предшественик.

(c) Ако $[\psi],[\varphi]\in|\Pi_C\mathcal{L}|$ удовлетворяват $[\psi]\prec_{\Pi_C\mathcal{L}}[\varphi]$, тогава има $[\theta]\in|\Pi_C\mathcal{L}|$ с $[\psi]\prec_{\Pi_C\mathcal{L}}[\theta]\prec_{\Pi_C\mathcal{L}}[\varphi]$.

Накрая показваме, че за всяко кохесивно множество C има изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω, такова че $\Pi_C\mathcal{L}$ не е изоморфно, иадаже не е елементарно еквивалентно на $\omega+\zeta\eta$. Стратегията е да осигурим за елемента $[\mathrm{id}]$ на $\Pi_C\mathcal{L}$, представен с функцията идентитет $\mathrm{id}\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, да няма $\prec_{\Pi_C\mathcal{L}}$-непосредствен наследник. Това показва една разлика на $\Pi_C\mathcal{L}$ и $\omega+\zeta\eta$, защото всеки елемент на $\omega+\zeta\eta$ има непосредствен наследник. Това също показва, че Теорема 6.1.3 част (4) е точна (т.е. не може да се обобщи) твърдението "няма елемент без непосредствен наследник" се изразява със Σ^0_3 затворена формула, вярна в $\Pi_C\mathcal{L}$, но не в $\mathcal{L}$.

Теорема 6.4.9. Нека C е кохесивно множество. Има изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω, за което $\Pi_C\mathcal{L}$ не е елементарно еквивалентна (и следователно неизоморфна) на $\omega + \zeta\eta$.

Следствие 6.4.10. Теорема 6.1.3 (4) е точна като цяло: има кохесивно множество C, изчислима линейна наредба $\mathcal{L}$ и Σ^0_3 затворена формула Φ, за която $\Pi_C\mathcal{L} \models \Phi$, но $\mathcal{L} \not\models \Phi$.

Следствие 6.4.10 може да се изведе и от доказателството на Лерман на теоремата на Феферман, Скот и Тененбаум, че няма кохесивна степен на стандартния модел на аритметиката, която е модел на Пеановата аритметика (виж [Ler70], Теорема 2.1). Лерман дава малко технически пример на Σ^0_3 затворена формула Φ, използвайки предиката на Клини T, която не е вярна в стандартния модел на аритметиката, но е верен във всяка кохесивна степен. Нашият пример показва оптималността на Теорема 6.1.3 (4) с естествено Σ^0_3 твърдение в езика на линейните наредби.

В следващата секция ще усложним конструкцията на Теорема 6.4.9, с цел да изчислим копие $\mathcal{L}$ на ω, така че $\Pi_C\mathcal{L} \cong \omega + \eta$ за дадено ко-р.н. кохесивно множество C.

6.5 Кохесивна степен от типа $\omega + \eta$

По дадено ко-р.н. кохесивно множество изчисляваме копие $\mathcal{L}$ на ω, за което $\Pi_C\mathcal{L}$ е $\omega+\eta$. За да можем да разбъркаме различни линейни наредби в кохесивни степени, в Секция 6.6 изчисляваме линейна наредба $\mathcal{L} = (\mathbb{N}, \prec_{\mathcal{L}})$, заедно с оцветяваща функция $F{:}\,\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, която оцветява елементите на $\mathcal{L}$ с изброимо много цветове. Оцветяването F поражда оцветяване $\widehat{F}$ на $\Pi_C\mathcal{L}$ по следния начин. Цветовете на елементите на $\Pi_C\mathcal{L}$ са представени с частично рекурсивни функции $\delta{:}\,\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, като $C \subseteq^* dom(\delta)$. Както в Дефиниция 6.1.2, нека $\delta_0 =_C \delta_1$, ако $(\forall^\infty n \in C)(\delta_0(n){\downarrow} = \delta_1(n){\downarrow})$ и пишем $[\![\delta]\!]$ вместо $[\delta]$ за $=_C$-клас на еквивалентност на δ, когато мислим в термините на цветове. Тогава $\widehat{F}$ е зададена с $\widehat{F}([\varphi]) = [\![F \circ \varphi]\!]$. Така например, елементите $[\varphi]$ и $[\psi]$ на $\Pi_C\mathcal{L}$ имат еднакъв $\widehat{F}$-цвят, ако и само ако $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ имат еднакъв F-цвят за почти всички $n \in C$.

Един цвят $[\![\delta]\!]$ наричаме *твърд цвят*, ако има $x \in \mathbb{N}$, такова че $(\forall^\infty n \in C)(\delta(n) = x)$. Иначе наричаме $[\![\delta]\!]$ *мек цвят*. Да забележим, че ако $[\![\delta]\!]$ е мек, то $\lim_{n \in C} \delta(n) = \infty$. Изчисляваме $\mathcal{L}$ и F така, че $\Pi_C\mathcal{L} \cong \omega + \eta$ и всеки твърд цвят се появява гъсто в частта от тип η. Между всеки два различни елемента на частта от тип η — има също елемент с мек цвят, но ние не искаме всеки мек цвят да се появява гъсто, т.е. не искаме всички меки цветове да се появяват между тези елементи. В Секция 6.6 показваме, че заместването на всяка точка от $\mathcal{L}$ с някоя крайна линейна наредба в зависимост от цвета има ефекта на разбъркването на тези крайни наредби в нестандартната част на $\Pi_C\mathcal{L}$.

Теорема 6.5.1. Нека C е ко-р.н. кохесивно множество. Тогава има изчислимо копие $\mathcal{L} = (\mathbb{N}, \prec_{\mathcal{L}})$ на ω и изчислимо оцветяване $F{:}\,\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ на $\mathcal{L}$ със следното свойство. Нека $[\varphi]$ и $[\psi]$ са два нестандартни елемента на $\Pi_C\mathcal{L}$, като $[\psi] \prec_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$. Тогава за всеки твърд цвят $[\![\delta]\!]$ има $[\theta]$ в $\Pi_C\mathcal{L}$ така, че $[\psi] \prec_{\Pi_C\mathcal{L}} [\theta] \prec_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$ и $\widehat{F}([\theta]) = [\![\delta]\!]$. Освен това, има $[\theta]$ в $\Pi_C\mathcal{L}$, такава че $[\psi] \prec_{\Pi_C\mathcal{L}} [\theta] \prec_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$, където $\widehat{F}([\theta])$ е мек цвят.

Работим с ко-р.н. кохесивно множество и да припомним, че в тази ситуация всеки елемент $[\varphi]$ на $\Pi_C\mathcal{L}$ има тотална представяща функция. Да припомним също, че един елемент $[\varphi]$ на $\Pi_C\mathcal{L}$ е нестандартен, ако и само ако $\lim_{n\in C}\varphi(n) = \infty$, по Лема 6.4.2.

Целта на конструкцията на $\mathcal{L}$ е да осигурим за всяка двойка тотални изчислими функции φ и ψ, за които $\lim_{n\in C}\varphi(n) = \lim_{n\in C}\psi(n) = \infty$, следното:

$$
\begin{aligned}
&(\forall^\infty n \in C)(\psi(n)\downarrow \prec_{\mathcal{L}} \varphi(n)\downarrow \Rightarrow \\
&(\forall d \le \max_<\{\varphi(n), \psi(n)\})(\exists k)[(\psi(n) \prec_{\mathcal{L}} k \prec_{\mathcal{L}} \varphi(n)) \wedge (F(k) = d)]). \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Да предположим, че удовлетворим $(*)$ за φ и ψ и $\lim_{n\in C}\varphi(n) = \lim_{n\in C}\psi(n) = \infty$ и $(\forall^\infty n \in C)(\varphi(n)\downarrow \prec_{\mathcal{L}} \psi(n)\downarrow)$. Да фиксираме един цвят d и нека δ е константната функция със стойност d. Изчисляваме частичната функция $\theta(n)$ като търсим k, за което $\psi(n) \prec_{\mathcal{L}} k \prec_{\mathcal{L}} \varphi(n)$ и $F(k) = d$. Ако има такова k, нека $\theta(n)$ да бъде първото k. Свойството $(*)$ и предположението $\lim_{n\in C}\varphi(n) = \lim_{n\in C}\psi(n) = \infty$ осигуряват, че има такова k за почти всички $n \in C$. Затова $C \subseteq^* dom(\theta)$, $[\psi] \prec_{\Pi_C\mathcal{L}} [\theta] \prec_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$ и $\widehat{F}([\theta]) = [\![\delta]\!]$. Също така, можем вместо това да дефинираме $\theta(n)$ като търсим k, за което $\psi(n) \prec_{\mathcal{L}} k \prec_{\mathcal{L}} \varphi(n)$ и $F(k) = \varphi(n)$ и нека $\theta(n)$ да е първото (ако има) такова намерено k. В този случай ще имаме $[\psi] \prec_{\Pi_C\mathcal{L}} [\theta] \prec_{\Pi_C\mathcal{L}} [\varphi]$ и $\widehat{F}([\theta]) = [\![\varphi]\!]$, което е мек цвят, защото $\lim_{n\in C}\varphi(n) = \infty$. Така удовлетворявайки $(*)$ е достатъчно да докажем теоремата, стига да осигурим $\mathcal{L} \cong \omega$. Трудността на конструкцията е между удовлетворяването на $(*)$ и осигуряването за всяко z да има само краен брой x, за които $x \prec_{\mathcal{L}} z$.

Следствие 6.5.2. Нека C е ко-р.н. кохесивно множество. Тогава има изчислимо копие $\mathcal{L}$ на ω, за което кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{L}$ има тип наредба $\omega + \eta$.

Пример 6.5.3. Нека C е ко-р.н. кохесивно множество и $\mathcal{L}$ е изчислимо копие на ω с $\Pi_C\mathcal{L} \cong \omega + \eta$, както в Следствие 6.5.2.

(1) Има изброима колекция от изчислими копия на ω, чиито кохесивни степени над C две по две не са елементарно еквивалентни. Нека $k \ge 1$, и нека k означава k-елементна линейна наредба от тип $0 < 1 < \cdots < k-1$. Тогава $k\mathcal{L}$ има тип наредба ω, защото $\mathcal{L}$ има тип

наредба ω и $\Pi_C k \cong k$ по коментара след Теорема 6.1.3. Използвайки Теорема 6.3.6, изчисляваме:

$$\Pi_C(k\mathcal{L}) \cong (\Pi_C k)(\Pi_C \mathcal{L}) \cong k(\omega + \eta) \cong \omega + k\eta.$$

Линейните наредби $\omega + k\eta$ за $k \geq 1$, две по две не са елементарно еквивалентни. Затворената формула "има $x_0 < \cdots < x_{k-1}$, такива че всяко друго y удовлетворява или $y < x_0$, или $x_{k-1} < y$, ако $y < x_0$, тогава има z, за което $y < z < x_0$; и ако $x_{k-1} < y$, то има z, такова че $y < z < x_{k-1}$" показваща, че има максимален блок с размер k, е вярна в $\omega + k\eta$, но не в $\omega + m\eta$, ако $m \neq k$. Така $1\mathcal{L}, 2\mathcal{L}, \ldots$ е редица от изчислими копия на ω, чиито $\Pi_C(k\mathcal{L})$ две по две не са елементарно еквивалентни.

(2) Възможно е две изчислими линейни наредби, които не са елементарно еквивалентни, да имат изоморфни кохесивни степени. Да разгледаме изчислимите линейни наредби $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L} + \mathbb{Q}$. Те не са елементарно еквивалентни, защото формулата "всеки елемент има непосредствен наследник" е вярна в $\mathcal{L}$, но не е вярна в $\mathcal{L} + \mathbb{Q}$. Обаче, използвайки Теорема 6.3.6 и факта, че $\Pi_C \mathbb{Q} \cong \eta$, заключаваме

$$\Pi_C(\mathcal{L} + \mathbb{Q}) \cong \Pi_C \mathcal{L} + \Pi_C \mathbb{Q} \cong (\omega + \eta) + \eta \cong \omega + \eta \cong \Pi_C \mathcal{L}.$$

Така, кохесивните степени $\Pi_C \mathcal{L}$ и $\Pi_C(\mathcal{L} + \mathbb{Q})$ на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L} + \mathbb{Q}$ са изоморфни.

6.6 Разбъркване(shuffling) крайни линейни наредби

Разбъркването (shuffle) $\sigma(X)$ на най-много изброима непразна колекция X от типове наредби е получена с гъсто оцветяване на $\mathbb{Q}$ с $|X|$-много цветове, давайки на всеки тип наредба в X различен цвят и заместваайки всяко $q \in \mathbb{Q}$ с копие на линейна наредба, чиито цвят съответства на цвета q.

Дефиниция 6.6.1. Нека X е непразна колекция от линейни наредби, като $|X| \leq \aleph_0$, $(\mathcal{L}_i)_{i<|X|}$ е списък от елементите на X и нека $\mathcal{L}_i = (L_i, \prec_{\mathcal{L}_i})$ за всяко $i < |X|$. Нека $F\colon \mathbb{Q} \to |X|$ е оцветяване на $\mathbb{Q}$, в което всеки цвят се появява гъсто. Дефинираме линейна наредба $\mathcal{S} = (S, \prec_{\mathcal{S}})$ със заместване на всяко $q \in \mathbb{Q}$ с копие на $\mathcal{L}_{F(q)}$. Формално, нека $S = \{(q, \ell) : q \in \mathbb{Q} \wedge \ell \in L_{F(q)}\}$ и

$$(p, \ell) \prec_{\mathcal{S}} (q, r) \quad \text{ако и само ако} \quad (p < q) \vee (p = q \wedge \ell \prec_{\mathcal{L}_{F(p)}} r).$$

Тъй като всеки цвят се появява гъсто, типът наредба на $\mathcal{S}$ не зависи от избора на избраната F или от реда, по който X е номериран. Поради тази причина, $\mathcal{S}$ се нарича *разбъркване* на X и се означава с $\sigma(X)$. Обикновено гледаме на X като колекция на типове наредби, вместо като колекция на конкретни линейни наредби.

Нека C е ко-р.н. и кохесивно, $\mathcal{L}$ е линейната наредба от Следствие 6.5.2 за C и да разгледаме линейната наредба $2\mathcal{L}$ от Пример 6.5.3 част (1). Можем да мислим за $2\mathcal{L}$ като получена от $\mathcal{L}$ със заместване на всеки елемент на $\mathcal{L}$ с копие на 2. Тази операция на заместване на всеки елемент с копие на 2 рефлектира в кохесивната степен и имаме, че $\Pi_C(2\mathcal{L}) \cong \omega+2\eta$.

Нека сега разгледаме същата $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ заедно с оцветяването $F\colon L \to \mathbb{N}$ от Теорема 6.5.1. Свиваме F в оцветяване $G\colon L \to \{0,1\}$, където $G(x) = 0$, ако $F(x) = 0$ и $G(x) = 1$, ако $F(x) \geq 1$. Тогава оцветяването $\widehat{G}$ на $\Pi_C\mathcal{L}$, което е съответно на G, използва точно два цвята: $[\![0]\!]$, представен с константната функция със стойност 0 и $[\![1]\!]$, представен с константната функция със стойност 1. Всеки от тези два цвята се среща гъсто в нестандартната част на $\Pi_C\mathcal{L}$. Изчисляваме една линейна наредба $\mathcal{M}$, започвайки с $\mathcal{L}$, замествайки $x \in L$, за което $G(x) = 0$, с копие на 2 и замествайки всяко $x \in L$, за което $G(x) = 1$, с копие на 3. Кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{M}$ се повлиява от конструкцията и имаме линейна наредба получена от $\Pi_C\mathcal{L}$ със заместване на всяка точка от $\widehat{G}$-цвета $[\![0]\!]$ с копие на 2 и заместваме всяка точка от $\widehat{G}$-цвета $[\![1]\!]$ с копие на 3. Така получаваме изчислимо копие $\mathcal{M}$ на ω с $\Pi_C\mathcal{M} \cong \omega+\sigma(\{2,3\})$. Използвайки тази стратегия, можем да разбъркаме всяка крайна колекция от крайни линейни наредби в кохесивната степен на изчислимо копие на ω.

Теорема 6.6.2. Нека $k_0, \ldots, k_N$ са различни от нула естествени числа. Нека C е ко-р.н. кохесивно множество. Тогава има изчислимо копие $\mathcal{M}$ на ω, на което кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{M}$ е от тип наредба $\omega+\sigma(\{k_0, \ldots, k_N\})$.

До края на секцията нека α означава типа наредба $\omega+\zeta\eta+\omega^*$. Искаме да използваме метода от Теорема 6.6.2, за да покажем, че ако $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ е или Σ^0_2 или Π^0_2, тогава, мислейки си за X като множество от типове крайни наредби, има кохесивна степен на ω с тип наредба $\omega+\sigma(X \cup \{\alpha\})$. Първо разглеждаме специалния случай $X = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, за да илюстрираме как α естествено се появява, когато разбъркваме безкраен брой типове наредби.

Теорема 6.6.3. Нека X е множеството от всички крайни ненулеви типове наредби. Нека C е ко-р.н. кохесивно множество. Тогава има изчислимо копие $\mathcal{M}$ на ω, за което $\Pi_C\mathcal{M}$ има тип наредба $\omega+\sigma(X \cup \{\alpha\})$.

Нека $\mathcal{L} = (L, \prec_{\mathcal{L}})$ е линейната наредба от Теорема 6.5.1 за C, заедно с нейното оцветяване $F\colon L \to \mathbb{N}$. Нека $\mathcal{M} = (M, \prec_{\mathcal{M}})$ е изчислима линейна наредба, получена със заместването на всяко $x \in L$ с копие от $x+1$, ако $F(x) = 0$ и $F(x)$, ако $F(x) > 0$. Тогава $\mathcal{M}$ е изчислима линейна наредба от тип ω.

Да разгледаме кондензацията $\mathbf{c}_\pi(\Pi_C\mathcal{M})$ на $\Pi_C\mathcal{M}$, оцветена с $\widehat{F}$. По Теорема 6.5.1, нестандартните елементи на $\mathbf{c}_\pi(\Pi_C\mathcal{M})$ формират линейната наредба с тип η, където твърдите $\widehat{F}$-цветове се появяват гъсто. Освен това, между всеки два различни нестандартни елемента на $\mathbf{c}_\pi(\Pi_C\mathcal{M})$ има нестандартен елемент с мек цвят. Ако $\mathbf{c}_\pi([\chi]_\mathcal{M})$ има твърд цвят $[\![k]\!]$ за някое $k > 0$, тогава типът наредба му е k. Показваме, че ако един нестандартен елемент $\mathbf{c}_\pi([\chi]_\mathcal{M})$ има или твърд цвят $[\![0]\!]$, или мек цвят, тогава неговият тип наредба е α. Следва, че нестандартните елементи на $\Pi_C\mathcal{M}$ имат тип наредба $\sigma(X \cup \{\alpha\})$, така $\Pi_C\mathcal{M}$ има желания тип наредба $\omega + \sigma(X \cup \{\alpha\})$.

Накрая, за да разбъркаме Σ^0_2 или Π^0_2 множества от краен тип наредби в кохесивните степени на ω, е удобно да работим с линейни наредби, чиито носители са р.н. Кохесивните степени на частично рекурсивна структура се дефинира по същия начин като в Дефиниция 6.1.2, единствената разлика е, че носителят A на структурата $\mathcal{A}$ е р.н. вместо изчислим. За да покажем, че има изчислимо копие на ω с кохесивна степен от даден тип, достатъчно е да покажем, че има частично рекурсивно копие на ω, което има кохесивна степен от желания тип.

Теорема 6.6.4. Нека $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ е Π^0_2 множество, като си мислим за него като множество от крайни типове наредби. Нека C е ко-р.н. кохесивно множество. Тогава има изчислимо копие $\mathcal{M}$ на ω, на което кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{M}$ има тип наредба $\omega + \sigma(X \cup \{\alpha\})$.

Построяваме $\mathcal{M}$ като разбъркваме k в $\Pi_C\mathcal{M}$, когато Π^0_2 свойството е изпълнено за k и да разбъркаме фиксирано k_0 в $\Pi_C\mathcal{M}$, когато Π^0_2 свойството не е вярно за k. Можем да считаме, че $X \neq \varnothing$, иначе можем да изчислим копие $\mathcal{M}$ на ω с $\Pi_C\mathcal{M} \cong \omega + \sigma(\{\alpha\})$, комбинирайки доказателствата на Теореми 6.6.2 и 6.6.3. Нека R е изчислим предикат, за който $X = \{k : \forall a \exists b R(k, a, b)\}$. Нека $k_0 > 0$ е $<$-най-малък елемент на X. Нека $\mathcal{L} = (L, <_\mathcal{L})$ е линейната наредба от Теорема 6.5.1 за C, заедно със своето оцветяване $F\colon L \to \mathbb{N}$. Конструираме частично рекурсивно копие $\mathcal{M}$ на ω с $\Pi_C\mathcal{M} \cong \omega + \sigma(X \cup \{\alpha\})$. Дефинираме $\mathcal{M}$ от $\mathcal{L}$, както следва. Ако $x \in L$ има $F(x) < k_0$, тогава заместваме x с копие на $x + 1$, както направихме с цвета 0 в доказателството на Теорема 6.6.3. Ако $x \in L$ има $F(x) \geq k_0$, тогава първо заместваме x с копие на k_0. Тогава за всяко $a \leq x$, търсим b, такова че $R(F(x), a, b)$. Ако $(\forall a \leq x)(\exists b) R(F(x), a, b)$, тогава добавяме още елементи за да заместим x с копие на $F(x)$, вместо с копие на k_0. Крайният ефект от тази процедура е такъв, че ако $F(x) \in X$, тогава разбъркваме $F(x)$ в $\Pi_C\mathcal{M}$, като ако $F(x) \notin X$, тогава разбъркваме k_0 в $\Pi_C\mathcal{M}$.

Теорема 6.6.5. Нека $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ е Σ^0_2 множество, мислейки за него като множество от крайни типове линейни наредби. Нека C е ко-р.н. кохесивно множество. Тогава има изчислимо копие $\mathcal{M}$ на ω, за което кохесивната степен $\Pi_C\mathcal{M}$ има тип наредба $\omega + \sigma(X \cup \{\alpha\})$.

Разсъждението е подобно на това от Теорема 6.6.4. Тук искаме да разбъркаме k в $\Pi_C\mathcal{M}$, когато Π^0_2 свойството не е изпълнено за k и да разбъркаме α в $\Pi_C\mathcal{M}$, когато Π^0_2 свойството е изпълнено за k. Нека $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ е Σ^0_2. Нека R е изчислим предикат, за който $\overline{X} = \{k : \forall a \exists b R(k,a,b)\}$. Нека $\mathcal{L} = (L, <_{\mathcal{L}})$ е линейната наредба от Теорема 6.5.1 за C, заедно с нейното оцветяване $F\colon L \to \mathbb{N}$. Достатъчно е да построим частично рекурсивно копие $\mathcal{M}$ на ω с $\Pi_C\mathcal{M} \cong \omega + \sigma(X \cup \{\alpha\})$. Дефинираме $\mathcal{M}$ от $\mathcal{L}$ както следва. Ако $x \in L$ има $F(x) = 0$, тогава заместваме x с копие на $x+1$ като в Теорема 6.6.3. Ако $x \in L$ има $F(x) > 0$, то първо заместваме x с копие на $F(x)$. После за всяко $a \leq x$, търсим b, такова че $R(F(x), a, b)$. Ако $x \geq F(x)$ и $(\forall a \leq x)(\exists b) R(F(x), a, b)$, то добавяме още елементи, за да заместим x с копие на $x+1$, вместо с копие на $F(x)$.

Комбинираме резултатите от тази секция в едно твърдение.

Теорема 6.6.6. Нека $X \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ е или Σ^0_2 или Π^0_2 множество, като го считаме като множество от крайни типове линейни наредби. Нека C е ко-р.н. кохесивно множество. Тогава има изчислимо копие $\mathcal{M}$ на ω , чиято кохесивна степен $\Pi_C\mathcal{M}$ има тип наредба $\omega + \sigma(X \cup \{\alpha\})$. Освен това, ако X е крайно и непразно, то има също изчислимо копие $\mathcal{M}$ на ω, чиято кохесивна степен $\Pi_C\mathcal{M}$ има тип наредба $\omega + \sigma(X)$.

Глава 7

Кототалност и скип оператор

В тази глава представяме понятието кототалност и оператора скип в номерационните степени. Степенните структури $\mathcal{D}_T$ и $\mathcal{D}_e$ с $\leq$, $\oplus$ и скок оператора са също абстрактни структури. Тук разглеждаме подклас на номерационните степени $\mathcal{D}_e$, наречени кототални степени. Ние започнахме изследванията по тази тема в 2015 г. заедно с Христо Ганчев, Стефан Лемп, Джозеф Милър и Мария Соскова в София, след CiE 2015 в Букурещ, когато Лемп и Милър от университета Медисън, Уисконсин посетиха София. В 2016 г. Ури Андрюс и Рутгер Кайпер от същия университет се присъединиха към изследванията и тук представяме резултатите, публикувани в статията [AGK+19] в списанието *Transaction of the American Mathematical Society*.

Едно множество $A \subseteq \mathbb{N}$ е *кототално*, ако е номерационно сводимо към своето допълнение $\overline{A}$. *Скипът* на A е равномерна горна граница на допълненията на всички множества, номерационно сводими към A. Тези понятия са тясно свързани: A има кототална степен точно тогава, когато е номерационно сводимо до своя скип. Изучаваме кототалност и съответните свойства, използвайки скип оператора като средство в изследванията. Показваме много примери на класове от номерационни степени, които или осигуряват кототалност, или отхвърлят кототалност. Изследваме също и самия скип оператор, който притежава много от хубавите свойства на Тюринговия скок, въпреки че скипът на A не винаги е над A (т.е., не всички степени са кототални). Всъщност, има множество, което съвпада със своя двоен скип.

За произволно множество $A \subseteq \mathbb{N}$, номерационната степен на A и номерационната степен на $\overline{A}$, допълнението на A, може и да не са сравними. С изискването те да са сравними, може да изолираме два интересни подкласа на номерационните степени. Първият беше въведен по същото време с номерационните степени. Знаем, че едно множество $A \subseteq \mathbb{N}$ е *тотално*, ако $\overline{A} \leq_e A$, и наричаме номерационната му степен *тотална*, ако съдържа тотално множество. Да забележим, че A е тотално, ако и само ако $A \equiv_e A \oplus \overline{A}$, където $\oplus$ е ефективното непресичащо се обединение (join) на множества. Тъй като всяко множество от вида $A \oplus \overline{A}$ е тотално, тоталните степени са точно степените на множествата $A \oplus \overline{A}$, за някое $A \subseteq \mathbb{N}$. Знаем, че изображението $\iota : A \mapsto A \oplus \overline{A}$ индуцира изоморфизъм, запазващ наредбата, между Тюринговите степени и тоталните номерционни степени. Името "тотално" се появява заради факта, че една номерационна степен е тотална, ако съдържа графиката на тотална функция. В частност, ако A е тотално множество, то $d_e(A)$ съдържа графиката на характеристичната функция на A.

Важно е да споменем, че тоталните степени[1] винаги съдържат и нетотално множество. Например, всички р.н. множества имат тотална степен, защото са номерационно еквивалентни на празното множество, но само изчислимите р.н. множества са тотални.

7.1 Кототалност

Да припомним, че едно множество $A \subseteq \mathbb{N}$ е *кототално*, ако $A \leq_e \overline{A}$, и една номерационна степен е *кототална*, ако съдържа кототално множество. И името, и свойството се появяват в литературата. Името е използвано в резюме на Панкратов 2000 г. [Pan00]. Той използва термина "кототальное" за това, което тук наричаме граф-кототални степени, които са собствен подклас на кототалните степени. За всяка тотална функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, нека $G_f = \{\langle n, m\rangle : f(n) = m\}$ е графиката на f. Лесно е да се види, че $\overline{G_f} \leq_e G_f$, така $\overline{G_f}$ е кототално множество. Ако номерационната степен съдържа множество от вида $\overline{G_f}$, тогава ние я наричаме *граф-кототална*.

Граф-кототалните множества и степени се изучават по-нататък от Солон, ръководител на Панкратов. В [Sol06] той използва "ко-тотално" за това, което ние наричаме "граф-кототално". Обаче в руската версия [Sol05] на същата статия, Солон използва "ко-тотальное" за друго свойство: Да наречем **a** *слабо кототална*, ако съдържа множество A такова че $\overline{A}$ има тотална номерационна степен. Ясно е, че всяка кототална е слабо кототална, защото ако $A \leq_e \overline{A}$, то $\overline{A}$ е тотално множество. Така, имаме

$$\text{граф-кототално} \implies \text{кототално} \implies \text{слабо кототално.}$$

Ние показваме, че тези три понятия са различни. Най-трудната част от задачата да ги различим е дадена в Секция 7.6, където използваме метод на приоритета с безкрайни нарушения релативно $\mathbf{0}'$, за да построим кототално множество, което не е граф-кототално. В Секция 7.5, даваме пример за слабо кототална степен, която не е кототална, както и номерационни степени, които не са слабо кототални. От всички тези свойства, вярваме, че свойството *кототалност* е най-фундаменталното.

[1] Понякога използваме термина *степен* за номерационна степен.

Нашите изследвания за кототалност бяха мотивирани от два примера на кототални множества, които ни бяха съобщени от Жандел [Jea15]. Той показва, че множеството от думите, различни от единичния елемент, на една крайно породена проста група е кототално (виж също Томас и Уилямс [TW16]). Жандел дава също пример от символната динамика: Множеството от думи, което се появява в минимално преместване - подшифт (subshift) е кототално. Това е особено интересно, защото Тюринговите степени на елементите на минимален подшифт са точно степените, които номерират множеството от думи, които се появяват в минимален подшифт, така изучаването на номерационните степени е тясно свързано с изучаването на Тюринговия спектър на подшифт.

В Секция 7.3, обясняваме примерите на Жандел в повече детайли и даваме няколко примера на кототални множества и степени. Показваме, че всяко Σ^0_2-множество е кототално, и даже граф-кототално. Показваме също, че допълнението на максимално независимо множество на един изчислим граф е кототално, и че всяка кототална степен съдържа допълнение на максимално независимо подмножество $\omega^{<\omega}$. Етън Маккарти доказва, че същото е в сила за допълненията на максимални антивериги в $\omega^{<\omega}$. Показваме, че директната сума (join) на нетривиални K-двойки е кототално множество, и естественото влагане на непрекъснатите степени в номерационните степени ги изобразява в кототалните степени. Накрая, отбелязваме, че Харис [Har10] доказва, че множествата с добра апроксимация имат кототални степени.

Най-ранните сведения за понятието кототалност изглежда са от дисертацията на Кейс [Cas69, p. 14] от 1969 г. Той пише "Авторът не знае дали има множество A, такова че A лежи в тотална частична степен и $\overline{A}$ лежи в нетотална частична степен, но той предполага, че няма такива множества." На нашия език, Кейс е предполагал, че ако $\overline{A}$ има слабо кототална степен, тогава има и тотална степен. Същият въпрос се появява в статията му [Cas71, p. 426]. Гутеридж [Gut71, Глава II] доказва, че тази хипотеза не е вярна с построяването на квазиминимална граф-кототална степен. Да припомним, че една степен $\mathbf{a}$ е *квазиминимална*, ако е ненулева и единствената тотална степен под $\mathbf{a}$ е $\mathbf{0}_\mathrm{e} = d_\mathrm{e}(\varnothing)$; в частност, квазиминималните степени не са тотални. Поне две независими конструкции на нетотални кототални степени се появяват в литературата: Санчис [San78], вероятно не подозиращ за хипотезата на Кейс, дава явна конструкция на кототално множество, което не е тотално. Запознат с хипотезата на Кейс, но не подозиращ за примера на Гутеридж, Сорби [Sor88] конструира квазиминимална кототална степен. Никоя от тези конструкции не дава явно граф-кототална степен.

Панкратов [Pan00], както споменахме, твърди, че има граф-кототална Σ^0_2-номерационна степен, която образува минимална двойка с всяка непълна Π^0_1-номерационна степен.[2] Граф-кототалните степени са изучавани по-интензивно от Солон [Sol05, Sol06].[3] Той доказва, че всяка тотална номерационна степен над $\overline{K}$ съдържа графиката G_f на тотална функция $f{:}\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такава че $\overline{G_f}$ е квазиминимално. Той също показва, че за всяка тотална номерационна степен $\mathbf{b}$, има граф-кототална номерационна степен $\mathbf{a}$, която е квазиминимална над $\mathbf{b}$. Накрая, Солон доказва, че за всяка тотална номерационна степен $\mathbf{b}$ над $\overline{K}$, има граф-кототална квазиминимална номерационна степен $\mathbf{a}$, такава че $\mathbf{a}' = \mathbf{b}$. Това усилва резултата на Макевой [McE85], който доказва, че квазиминималните номерационни степени имат всички възможни номерационни скокове. Да забележим, че трите резултата на Солон може да се гледат и като обобщение на конструкцията на Гутеридж на квазиминимална граф-кототална степен.

7.2 Скип операторът

Кототалността е свързана, както отбелязахме, със скип оператора. Нека $\{\Gamma_e\}_{e\in\omega}$ е ефективен списък на всички номерационни оператори и нека $K_A = \bigoplus_{e\in\omega} \Gamma_e(A) = \{\langle e,x\rangle \mid x \in \Gamma_e(A)\}$. Да забележим,че $K_A \equiv_{\mathrm{e}} A$. Дефинираме *скипът* на A да е $A^\Diamond = \overline{K_A}$. Лесно е да се види, че скипът е инвариантен относно степени, и така той индуцира оператор над номерационните степени. Използваме $\mathbf{a}^\Diamond$ да означим скипа на $\mathbf{a}$. Да забележим, че компонентите на елементите на $d_{\mathrm{e}}(A)$ са номерационно сводими към $A^\Diamond$; наистина, те са колони на $A^\Diamond$. С други думи, $d_{\mathrm{e}}(A^\Diamond)$ е максималната възможна степен на компонентите на елементите на $d_{\mathrm{e}}(A)$. Едно следствие от тази характеризация е връзката между скипа и кототалността.

Твърдение 7.2.1. Множеството $A \subseteq \mathbb{N}$ има кототална степен, т.т.к. $A \le_{\mathrm{e}} A^\Diamond$.

Тази връзка е доста удобна. Разликата в класовете степени, която доказваме в Секция 7.5, се дължи на свойствата на скип оператора в Секция 7.4.

В някакъв смисъл, скип операторът е аналог на Тюринговия скок оператор. Например, една стандартна диагонализация показва, че $A^\Diamond \not\le_{\mathrm{e}} A$. В Твърдение 7.4.1, повтаряме добре известния факт, че $A \le_{\mathrm{e}} B$ т.т.к. $A^\Diamond \le_1 B^\Diamond$, точно както скокът в Тюринговите степени. Накрая в Теорема 7.4.3 доказваме теорема за обръщане на скипа, аналог на теоремата на

[2] Този резултат не се появява в публикация и не знаем какво доказателството е имал пред вид Панкратов, но забележете че граф-кототалността е изпълнена, защото всяка Σ^0_2-номерационна степен е граф-кототална.

[3] Ние забелязахме тук малка неяснота в статиите на Солон между кототално множество и кототалните степени, което обаче не променя неговите основни резултати.

Фридберг за обръщане на скока: Ако $S \geq_{\mathrm{e}} \overline{K}$, то има множество A, такова че $A^{\Diamond} \equiv_{\mathrm{e}} S$.

Голямата разлика между скипа и Тюринговия скок е, че не винаги имаме $A \leq_{\mathrm{e}} A^{\Diamond}$ (защото не всички номерационни степени са кототални). Всъщност, както ще видим в Секция 7.4.2, има *цикъл на два скипа*, т.е. множество $A \subseteq \mathbb{N}$, за което $A = A^{\Diamond\Diamond}$. Ако модифицираме скипа, за да осигурим, че е растящ в номерационните степени, то възстановяваме дефиницията на номерационен скок, както е бил въведен от Купър[4] [Coo84].

Номерационният скок на множеството $A \subseteq \mathbb{N}$ е $A'_{\mathrm{e}} = K_A \oplus \overline{K_A} \equiv_{\mathrm{e}} A \oplus A^{\Diamond}$. (Използваме също A' за да означим A'_{e}). Така, A има кототална степен, ако и само ако $A'_{\mathrm{e}} \equiv_{\mathrm{e}} A^{\Diamond}$. Разбира се, номерационният скок е инвариантен по отношение на степените и поражда номерационен оператор над номерационните степени; използваме $\mathbf{a}'$ за скока на $\mathbf{a}$. Дефиницията на номерационен скок осигурява, че $A <_{\mathrm{e}} A'_{\mathrm{e}}$, както се очаква от скока. От друга страна, губим две от свойствата, които скипът споделя с Тюринговия скок. Номерационният скок е винаги тотален, така не може да покрие всички номерационни степени над $\mathbf{0}'_{\mathrm{e}}$. Обаче от теоремата на Фридберг за обръщане на скока, той покрива всички тотални номерационни степени над $\mathbf{0}'_{\mathrm{e}}$. Ако $A'_{\mathrm{e}} \leq_1 B'_{\mathrm{e}}$, то не е задължително $A \leq_{\mathrm{e}} B$. Така нито скипът, нито номерационният скок са перфектни аналози на Тюринговия скок; ние вярваме, че и двата имат своята роля в изучаването на номерационните степени.

7.3 Примери за кототални множества и степени

7.3.1 Тотални степени

За всяко множество $A \subseteq \mathbb{N}$, множеството $A \oplus \overline{A}$ е кототално. Затова всяка тотална степен е кототална.

7.3.2 Допълнение на графика на тотална функция

Както отбелязахме, ако $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е тотална, то $\overline{G}_f$, допълнението на графиката на f, е кототално множество. Това е защото $\langle n, m \rangle \in \overline{G}_f$, ако има $m' \neq m$, такова че $\langle n, m' \rangle \in G_f$. Класът на граф-кототалните номерационни степени лежи строго между тоталните и кототалните степени. За да видим, че всяка тотална е граф-кототална, да припомним, че всяка тотална степен съдържа характеристичната функция χ_A на някое тотално множество A; също съдържа и допълнението на графиката на χ_A. Ние видяхме, че $\overline{G}_{\chi_A} \leq_{\mathrm{e}} G_{\chi_A}$. Но сега, тъй като $\langle n, m \rangle \in G_{\chi_A}$, ако.

[4] Купър [Coo84] благодари на своя ученик Макевой за помощта му при намиране на коректната дефиниция на номерационен оператор. Сорби припомня (в частна комуникация), че първоначалната "некоректна" дефиниция на Купър е била точно нашата дефиниция на скип оператора.

$m \in \{0,1\}$ и $\langle n, 1-m\rangle \in \overline{G}_{\chi_A}$, имаме че $\overline{G}_{\chi_A} \equiv_{\mathrm{e}} G_{\chi_A}$. Следващият резултат показва, че има нетотални граф-кототални степени.

Твърдение 7.3.1. Всяка номерационна степен $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'_{\mathrm{e}}$ е граф-кототална.

Номерационните степени под $\mathbf{0}'_{\mathrm{e}}$ се състоят изцяло от Σ^0_2-множества. Да фиксираме една номерационна степен $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'_{\mathrm{e}}$ и едно Σ^0_2-множество $A \in \mathbf{a}$. Показваме, че има множество $\overline{G} \equiv_{\mathrm{e}} A$, което е допълнение на графика G на тотална функция, използвайки Σ^0_2-апроксимации $\{A_s\}_{s<\omega}$ на множеството A.

Да отбележим, че този аргумент не може да се разшири до по-високи нива на аритметичната йерархия. В Секция 7.5 показваме, че има Π^0_2-множества, които нямат дори кототална степен. От друга страна е лесно да се види, че всяко Π^0_2-множество има слабо кототална степен. Това е, защото всяко множество A е номерационно еквивалентно на $A \oplus K$, където K е множеството на стоп проблема. Така, ако A е Π^0_2, то $\overline{A \oplus K} = \overline{A} \oplus \overline{K} \equiv_{\mathrm{e}} \overline{K} \in \mathbf{0}'_{\mathrm{e}}$. За по-високи нива на аритметичната йерархия в Секция 7.5 показваме Δ^0_3-множества, които не са дори слабо кототални.

Нека $\overline{G}$ е допълнението на графиката G на едно тотално множество. Ако $x \in \overline{G}$, тогава има единствена аксиома в Γ, която номерира x в $\Gamma(G)$. Казваме, че $\overline{G}$ се редуцира до G с *единствена аксиома редукция*. Ще видим, че това свойство характеризира граф-коточалните номерационни степени сред всички кототални номерационни степени.

Твърдение 7.3.2 (Характеризация с единствена аксиома)**.** Номерационната степен $\mathbf{a}$ е граф-кототална точно тогава, когато съдържа кототално множество A, което се редуцира до $\overline{A}$ с единствена аксиома редукция.

Можем да направим тази характеризация още по-точна, като забележим, че редукцията Γ, използвана като свидетел, че $\overline{G} \leq_{\mathrm{e}} G$ е *оператор синглетон*: всяка аксиома в Γ е от вида $\langle a, \{b\}\rangle$, където $a \neq b$.

Затова се интересуваме от намирането на примери на кототални номерационни степени, които не удовлетворяват характеризацията с единствена аксиома, като искаме да разделим коточалните степени от граф-котоалните. Следващият пример, идващ от теория на графите, е мотивиран от това желание.

7.3.3 Допълнения на максимални независими множества

Да припомним, че един (неориентиран) граф е двойка $G = (V, E)$, където V е множеството от върховете и E е множеството от ненаредени двойки от върхове, определящи релацията ребро.

Дефиниция 7.3.3. *Независимо множество* за един граф $G = (V, E)$ е множество от върхове $S \subseteq V$, такива че няма двойка от различни върхове в S, която е свързана с ребро. Едно независимо множество е *максимално*, ако няма собствено независимо множество, което го съдържа.

С други думи, едно независимо множество S е максимално, т.т.к. всеки връх $v \in V$ е или в S или е свързан с ребро с елемент на S. Максималните независими множества за графа на куба са илюстрирани по-долу, като фигурата е с любезното съдействие на Дейвид Ъпщайн и Уикипедия.

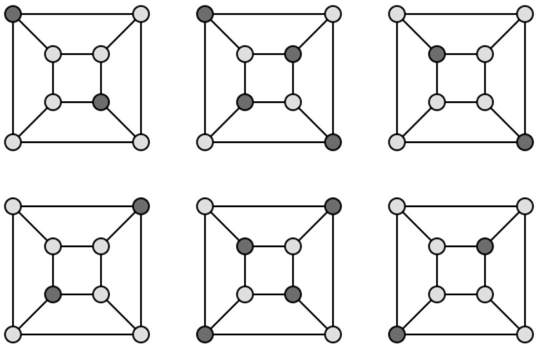

Figure 7.1: Максимални независими множества на куба

Да разгледаме един безкраен граф $G = (\mathbb{N}, E)$ с изчислима релация ребро. Например, можем да мислим за дървото $\omega^{<\omega}$ като изчислим граф от естествени числа с фиксиране на ефективно кодиране на крайните редици от естествени числа и слагайки ребро между всеки два върха (различни от корена) и неговия непосредствен предшественик. Ако S е максимално независимо множество за G, то S може да номерира своето допълнение.

$$\overline{S} = \{v \mid (\exists u \in S)[\{u, v\} \in E]\}.$$

Следователно допълненията на максимално независимите множества в изчислими графи над $\mathbb{N}$ са кототални. Нашата главна причина да разгледаме този пример е, че изобщо тази редукция няма свойството на единствената аксиома за редукцията. Това е добре илюстрирано във Фигура 7.1: максималното независимо множество, средната от първия ред, например, ще номерира всеки елемент на неговото допълнение с три различни коректни аксиоми. Следователно можем да се надяваме, че допълненията на максимални независими множества ни позволяват да преминем отвъд граф-кототалните степени. В частност, те са универсални за кототалните номерационни степени.

Теорема 7.3.4. Всяка кототална степен съдържа допълнение на максимално независимо множество за $\omega^{<\omega}$.

7.3.4 Допълнения на максимални антивериги в $\omega^{<\omega}$

Един тясно свързан пример е да разгледаме максимални антивериги в $\omega^{<\omega}$. В този случай частичната наредба на крайни редици от естествени числа се дефинира с $\sigma \leq \tau$, ако и само ако $\sigma \preceq \tau$. *Антиверигата* е подмножество на $\omega^{<\omega}$, такова че никои два елемента в него не са сравними, и антиверигата е *максимална*, ако не може да се разшири собствено от друга антиверига. Примери за изчислими максимални антивериги: За всяко фиксирано n, множеството от всички елементи на $\omega^{<\omega}$ с дължина n е максимална антиверига.

Ако S е максимална антиверига, то $\overline{S} \leq_{\mathrm{e}} S$, като $\sigma \in \overline{S}$, ако и само ако има $\tau \in S$, което е сравнимо със σ. Като в предния пример, тази редукция няма свойството на единствена аксиома. Да разгледаме например всички стрингове с дължина n. Тогава за всеки стринг с дължина $m < n$ има безкрайно много причини да бъде номериран в допълнението на тази максимална антиверига. Итън Маккарти е показал, че допълненията на максимални антивериги са също универсални за кототалните номерационни степени.

Теорема 7.3.5 (Маккарти[McC18])**.** Всяка кототална степен съдържа допълнение на максимална антиверига в $\omega^{<\omega}$.

7.3.5 Множеството от думи, появяващи се в минимален подшифт

В тази подсекция обясняваме по-детайлно нашите мотивиращи примери, въведени от Жандел [Jea15]. Първият изисква да припомним някои дефиниции от символната динамика.

Дефиниция 7.3.6. Нека $X \subseteq 2^\omega$ е затворено множество в обичайната топология на Канторовто пространство.

1. X е *подшифт*, ако X е затворено относно операцията шифт, която премахва първия бит на двоичната редица, т.е. от $a\alpha \in X$ следва $\alpha \in X$.

2. Ако X е подшифт, то *езикът на* X е множеството

$$\mathcal{L}_X = \{\sigma \in 2^{<\omega} \ : \ (\exists \alpha \in X)[\sigma \text{ е поддума на } \alpha]\}.$$

   Множеството $\overline{\mathcal{L}_X}$ се нарича *множество на забранените думи.*

3. Един подшифт X е *минимален*, ако няма непразно собствено подмножество, което е също подшифт. Това е еквивалентно да кажем, че всяка $\sigma \in \mathcal{L}_X$ е поддума на всяка $\alpha \in X$.

Жандел открива интересна връзка между номерационните степени на езика на един минимален подшифт и Тюринговата степен на елементите на подшифта: Тюринговите степени на елементите в X са точно Тюринговите степени, които номерират $\mathcal{L}_X$. Този факт е особено интересен, ако приложим Селмановата характеризация на номерационната сводимост

(Теорема 2.3.4). За произволно множество A, нека с $\mathcal{E}_A$ означим множеството на Тюринговите степени, чиито елементи изчисляват номерациите на A. Селман [Sel71] доказва, че $A \leq_e B$, т.т.к. $\mathcal{E}_B \subseteq \mathcal{E}_A$. Така, номерационната степен на множеството $\mathcal{L}_X$ може да се характеризира с елементите на $\mathcal{E}_{\mathcal{L}_X}$, които са точно Тюринговите степени, които изчисляват елементите на минималния подшифт X. Естествено е да попитаме какви допълнителни свойства трябва да има една номерационна степен, за да е номерационна степен на един минимален подшифт. Следващата теорема показва, че тя трябва да е кототална.

Теорема 7.3.7 (Жандел [Jea15])**.** $\mathcal{L}_X \leq_e \overline{\mathcal{L}_X}$.

Итън Маккарти има резултат, който показва, че всъщност кототалността точно характеризира номерационните степени в езика на минимален подшифт.

Теорема 7.3.8 (Маккарти [McC18])**.** Ако A е кототално, то $A \equiv_e \mathcal{L}_X$ за някой минимален подшифт X.

7.3.6 Думите, различни от единичния елемент в една крайно генерирана проста група

Вторият пример на Жандел1 [Jea15] е свързан с групите.

Дефиниция 7.3.9. Нека G е група.

1. G е *крайно генерирана*, ако има краен брой елементи в G, наречени генератори, такива че G може да бъде породена с произведение на тези генератори. (За удобство, предполагаме, че множеството от генераторите е затворено относно взимане на обратен елемент.)

2. G е *проста*, ако единствените нормални подгрупи са G и тривиалната група.

3. Множеството от *думите на единичния елемент* на G е множеството $\mathcal{W}_G$ на всички думи (т.е. крайни редици от генератори), които представят единичния елемент.

4. *Презентация* на G е двойка $\langle F \mid R \rangle$, такава че F е множество от генератори и $\mathcal{W}_G$ е нормалното затваряне на $R \subset \mathcal{W}_G$.

Проблемът за принадлежност на дума за една група G е проблемът за принадлежност към множеството $\mathcal{W}_G$. Кузнецов [Kuz58] показва, че ако G е крайно генерирана проста група с презентация $\langle F \mid R \rangle$, такава че R е изчислима, тогава тя има разрешим проблем за принадлежност. Жандел разглежда колекцията на всички крайно генерирани прости групи, без да ограничаваме сложността на техните презентации. Той показва, че множеството на думите, които не дават единичния елемент в крайно генерирана проста група, е кототално. Този факт е също независимо получен от Томас и Уилямс [TW16].

Теорема 7.3.10 (Жандел [Jea15]; Томас и Уилямс [TW16])**.** Ако G е крайно генерирана проста група, то $\overline{\mathcal{W}_G} \leq_{\mathrm{e}} \mathcal{W}_G$.

Това обобщава резултата на Кузнецов, като ако групата $G = \langle F \mid R \rangle$ има изчислимо множество от релации R, то $\mathcal{W}_G$ е автоматично р.н. Фактът, че $\overline{\mathcal{W}_G} \leq_{\mathrm{e}} \mathcal{W}_G$ показва, че $\overline{\mathcal{W}_G}$ е също р.н., и следователно $\mathcal{W}_G$ е изчислимо.

7.3.7 Джойнове на нетривиални $\mathcal{K}$-двойки

Нашият следващ пример е свързан с класа от номерационни степени, които играят важна роля за определимостта от първи ред на релации в $\mathcal{D}_{\mathrm{e}}$.

Дефиниция 7.3.11. Една двойка от множества $\{A, B\}$ образува *$\mathcal{K}$-двойка*, ако има р.н. множество W, такова че $A \times B \subseteq W$ и $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq \overline{W}$. Една $\mathcal{K}$-двойка е *нетривиална*, ако никой от нейните компоненти не е р.н.

$\mathcal{K}$-двойките са въведени от Калимулин [Kal03]. Той показва, че те са определими от първи ред в структурата на номерационните степени и ги използва за да даде дефиниция от първи ред на номерационния скок. Кай, Ганчев, Лемп, Милър и М. Соскова [CGL+16] използват $\mathcal{K}$-двойките, за да дефинират класа на тоталните номерационни степени. В следващата секция $\mathcal{K}$-двойките ще ни дадат голямо разнообразие от примери на множества, които нямат кототални степени. Но, ако разгледаме джойна $A \oplus B$ на нетривиална $\mathcal{K}$-двойка $\{A, B\}$, то винаги се получава кототално множество. За да видим това, трябва да припомним едно основно свойство на $\mathcal{K}$-двойките.

Твърдение 7.3.12 (Калимулин [Kal03])**.** Ако $\{A, B\}$ е нетривиална $\mathcal{K}$-двойка, то

- $A \leq_{\mathrm{e}} \overline{B}$ и $B \leq_{\mathrm{e}} \overline{A}$;
- $\overline{B} \leq_{\mathrm{e}} A \oplus \overline{K}$ и $\overline{A} \leq_{\mathrm{e}} B \oplus \overline{K}$.

От първата част следва, че ако $\{A, B\}$ образуват нетривиална $\mathcal{K}$-двойка, то $A \oplus B \leq_{\mathrm{e}} \overline{B} \oplus \overline{A} \equiv_{\mathrm{e}} \overline{A \oplus B}$.

Този пример обобщава факта, че всяка тотална степен е кототална, като съгласно Кай, Ганчев, Лемп, Милър и М. Соскова [CGL+16], тоталните степени са точно тези, които съдържат джойна на особен вид $\mathcal{K}$-двойки—следователно джойновете на нетривиални $\mathcal{K}$-двойки, образуват определим с формула от първи ред клас от кототални степени, които съдържат тоталните номерационни степени. Те не съдържат всички кототални степени. Ахмад [Ahm89] показва, че има неразделящи се (nonsplitting) Σ_2^0-номерационни степени, т.е. степени, които не са точни горни граници на всяка двойка от строго по-малки степени. Така въпреки че, както видяхме, всички Σ_2^0-номерационни степени са кототални, неразделящите се не могат да са джойнове на $\mathcal{K}$-двойки.

7.3.8 Непрекъснати степени

Мотивиран от въпрос на Пур-Ел и Лемп от изчислителния анализ, Милър [Mil04] въвежда една степенна структура, която обхваща сложността на елементи от изчислими метрични пространства, такива като $\mathcal{C}[0,1]$ и $[0,1]^\omega$. Тази структура естествено се влага в номерационните степени и областта от стойности на това влагане е строго между класа на тоталните номерационни степени и класа на всички номерационни степени.

Като пример да разгледаме метричното пространство $\mathcal{C}[0,1]$ на непрекъснатите функции в интервала $[0,1]$ със стандартната метрика

$$d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Изчислимо представяне на едно метрично пространство $\mathcal{M}$ се състои от фиксирана гъста редица $Q^{\mathcal{M}} = \{q_n\}_{n<\omega}$, за която метриката е изчислима като функция върху индекси. За изчислима презентация на $\mathcal{C}[0,1]$ можем да фиксираме, например, съответна номерация на полигоналните функции, имащи сегменти с рационални краища. *Име* n_f за една непрекъсната функция f е код (като елемент на ω^ω), който дава начин да апроксимираме f. По специално, едно име n_f трябва да кодира функция, приемаща рационално число $\varepsilon > 0$ и даваща индекс $n_f(\varepsilon)$, така че $d(f, q_{n_f(\varepsilon)}) < \varepsilon$. За $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$, казваме, че f е *сводима* до g, ако всяко име на g изчислява име на f. По същия начин, можем да сравним сложността на елементите от произволно метрично пространство. Тази сводимост поражда степенната структура на *непрекъснатите степени*. Всяка непрекъсната степен съдържа елемент от $\mathcal{C}[0,1]$.

За да разберем влагането на непрекъснатите степени в номерационните степени, е по-лесно да се фокусираме над едно друго изчислимо метрично пространство: *Хилбертовия куб* в $[0,1]^\omega$, заедно с метриката

$$d(\alpha,\beta) = \sum_{n\in\omega} 2^{-n}|\alpha(n) - \beta(n)|.$$

Едно гъсто множество, показващо, че $[0,1]^\omega$ е изчислимо, е например, една разумна номерация на редиците от рационални числа с краен съпорт, т.е. с краен брой ненулеви елементи. Както в случая с $\mathcal{C}[0,1]$, всяка непрекъсната степен съдържа елемент от $[0,1]^\omega$.

Милър описва начин да съпоставим на редицата $\alpha \in [0,1]^\omega$ едно множество A_α, такова че $\mathcal{E}_{A_\alpha}$ (дефинирано в Секция 7.3.5) е множеството от всички Тюрингови степени, които изчисляват имената на α. Това поражда едно влагане на непрекъснатите степени в номерационните степени.

Дефиниция 7.3.13 (Милър [Mil04])**.** За $\alpha \in [0,1]^\omega$, нека

$$A_\alpha = \bigoplus_{i<\omega} (\{q \in \mathbb{Q} \mid q <_{\mathbb{Q}} \alpha(i)\} \oplus \{q \in \mathbb{Q} \mid q >_{\mathbb{Q}} \alpha(i)\}).$$

Не е трудно да се види, че A_α притежава исканите свойства: Изчисляването на име за α е точно толкова сложно, колкото да номерираме A_α. Казваме, че номерационната степен на A_α е *непрекъсната*. Като показва, че има нетотална непрекъсната номерционна степен, Милър доказва, че има непрекъснати функции, които нямат име с най-малка Тюрингова степен, което отговаря на въпроса на Пур-Ел и Лемп.

Да забележим, че ако α няма никакви рационални записи, тогава A_α е тотално множество. Ако, от друга страна, α има рационални записи, то всеки компонент на A_α е неравномерно еквивалентен на тотално множество. Съществуването на нетотални непрекъснати степени показва, че тази неравномерност е важна. Въпреки това, ние успяхме да покажем, че всички непрекъснати степени са кототални.

Твърдение 7.3.14. Всяка непрекъсната степен е кототална.

7.3.9 Множества с добри апроксимации.

Лахлан и Шор [LS92] въвеждат следното общо понятие за апроксимация на множество.

Дефиниция 7.3.15. Нека A е множество от естествени числа. Една равномерна изчислима редица от крайни множества $\{A_s\}_{s<\omega}$ (зададена с каноничните им индекси) е *добра апроксимация на* A, ако

- за всяко n, има стъпка s, такава че $A \upharpoonright n \subseteq A_s \subseteq A$; и
- за всяко n, има стъпка s, такава че за всяко $t > s$, ако $A_t \subseteq A$, то $A \upharpoonright n \subseteq A_t$.

Тази дефиниция може да се счита за обобщение на понятието на Купър за Σ^0_2-апроксимация с безкрайно много стъпки, използвана за да се покаже гъстотата на Σ^0_2-номерационните степени [Coo84]. Лахлан и Шор [LS92] въвеждат йерархия на n-р.н. множества. Едно множество е 1-р.н., ако е р.н., и е $(n+1)$-р.н., ако е джойн на n-р.н. множество X и множество Y, р.н. в X. Не е трудно да се покаже, че номерационните степени на 2-р.н. множества са точно Σ^0_2-номерационните степени. Лахлан и Шор доказват, че всяко множество, което е n-р.н., има добра апроксимация и след това показват, че номерационните степени на n-р.н. множества са гъсти. Харис [Har10] доказва, че множествата, които имат добри апроксимации, имат винаги кототални номерационни степени.

Твърдение 7.3.16 (Харис [Har10, Твърдение 4.1])**.** Ако A има добра апроксимация, то $K_A \leq_e \overline{K_A}$.

В частност, получаваме, че номерационните степени на n-р.н. множества са кототални. Съвсем наскоро Милър и М. Соскова [MS18] доказаха, че кототалните номерационни степени са точно номерационните степени на множества с добри апроксимации и те са гъсти.

7.4 Скип оператор

В предната секция видяхме много примери на кототални множества и номерационни степени. В тази секция изучаваме свойствата на скип оператора, като даваме много примери на степени, които не са кототални. Да припомним, че *скип* на множеството $A \subseteq \mathbb{N}$ е $A^{\Diamond} = \overline{K_A}$. Както видяхме, скипът ни дава лесен начин да определим дали една степен е кототална. За удобство ще припомним резултата:

Твърдение 7.2.1. *Множеството $A \subseteq \mathbb{N}$ има кототална степен, ако и само ако $A \leq_e A^{\Diamond}$.*

Скипът е не само средство за изучаване на кототалността, но е естествен оператор. Както дискутирахме в началото на тази глава, номерационният скок няма някои от хубавите свойства на Тюринговия скок. Например, добре известно е, че $A \leq_T B$, ако и само ако $K_A \leq_1 K_B$, където K_A означава множеството на стоп-проблема релативно A. Аналогично свойство не е в сила за номерационния скок. Вярно е, че от $A \leq_e B$ следва $K_A \oplus \overline{K}_A \leq_1 K_B \oplus \overline{K}_B$, но обратната импликация не е вярна винаги. Скипът, от друга страна, дава влагане на номерационните степени в 1-степените.

Твърдение 7.4.1. $A \leq_e B$, ако и само ако $A^{\Diamond} \leq_1 B^{\Diamond}$.

Това показва, че можем да дефинираме скип оператора на степени.

Дефиниция 7.4.2. *Скип* на номерационната степен $\mathbf{a}$ е $\mathbf{a}^{\Diamond} = d_e(A^{\Diamond})$, за всеки член $A \in \mathbf{a}$.

7.4.1 Обръщане на скипа

От Твърдение 7.2.1 следва, че една номерационна степен $\mathbf{a}$ е кототална, ако и само, ако $\mathbf{a} \leq \mathbf{a}^{\Diamond}$ т.т.к. $\mathbf{a}^{\Diamond} = \mathbf{a}'$. Дефиницията на номерационния скок оператор ограничава областта на стойностите до тоталните номерационни степени и по монотонността до тоталните номерационни степени в конуса над $\mathbf{0}_e'$. Като пренесем Фридберговата теорема за обръщане на скока през стандартното влагане в номерационните степени, виждаме, че всяка тотална номерационна степен над $\mathbf{0}_e'$ е в областта от стойности на скок оператора. Областта от стойности на скип оператора е също ограничена по монотонността на номерационните степени над $\mathbf{0}_e^\Diamond = \mathbf{0}_e'$. Показваме, че това е единственото ограничение на областта от стойности на скип оператора, давайки така една нова аналогия между скипа и Тюринговия скок. Да припомним, че $\overline{K}$—допълнението на множеството на стоп-проблема, е представител на степента $\mathbf{0}_e'$.

Теорема 7.4.3. За всяко множество $S \geq_e \overline{K}$ има множество A, такова че $A^\Diamond \equiv_e S$. (Всъщност, също имаме $S \equiv_e \overline{A} \equiv_e \overline{A} \oplus \overline{K}$ и $\overline{S} \leq_e A \oplus \overline{K}$.)

По дадено множество $S \geq_e \overline{K}$, построяваме множество A, такова че $S \equiv_e \overline{A} \leq_e A^\Diamond \leq_e \overline{A} \oplus \overline{K}$, използвайки метод на приоритета.

Теорема 7.4.6. Нека $n \geq 2$. За всяко Π_n^0-множество $S \geq_e \overline{K}$ има Σ_n^0-множество A, такова че $A^\Diamond \equiv_e S$. Освен това, за всяко Σ_n^0-множество $S \geq_e \overline{K}$ има Π_n^0-множество A, такова че $A^\Diamond \equiv_e S$.

От Дефиниция 2.3.9 знаем, че една номерационна степен $\mathbf{a}$ е *квазиминимална*, ако е ненулева и единствената тотална номерационна степен, ограничена от $\mathbf{a}$, е $\mathbf{0}_e$.

Макевой [McE85] доказва, че номерационният скок, ограничен до квазиминимални степени, има същата област от стойности като неограничения скок оператор. Съвсем подобно свойство показваме със Сосков [SS13] за спектрите на структури, т.е. всеки елемент на скок спектъра е скок на квазиминимална степен относно спектъра. Тук показваме, че скипът има същото свойство.

Следствие 7.4.8. За всяко множество $S \geq_e \overline{K}$ има множество A от квазиминимална степен, такова че $A^\Diamond \equiv_e S$.

7.4.2 Други свойства на скип оператора и примери

Ще изследваме възможното поведение на скип оператора.

Дефиниция 7.4.9. Фиксираме $A \subseteq \mathbb{N}$. Дефинираме индуктивно $A^{\langle n \rangle}$, *n-тия скип на A*.

- $A^{\langle 0 \rangle} = A$,
- $A^{\langle n+1 \rangle} = (A^{\langle n \rangle})^\Diamond$.

n--тият скип на $d_e(A)$ е $d_e(A)^{\langle n \rangle} = d_e(A^{\langle n \rangle})$.

Ако $\mathbf{a}$ е кототална номерационна степен, тогава всяка итерация на скипа на $\mathbf{a}$ се съгласува със съответната итерация на скока на $\mathbf{a}$, т.е. за всяко $n < \omega$, имаме че $\mathbf{a}^{\langle n \rangle} = \mathbf{a}^{(n)}$. Теорема 7.4.3 показва, че има нетотални номерационни степени, например инвърт (обръщането) на нетотална номерационна степен. Естествено е да попитаме: какво можем да кажем

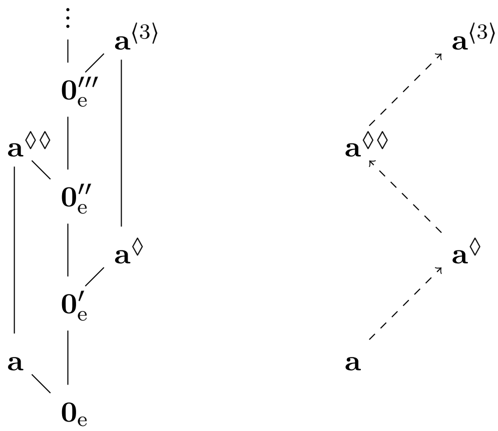

Figure 7.2: Итерация на скип от дадена степен: зиг-заг

за редицата $\{\mathbf{a}^{\langle n\rangle}\}_{n\in\omega}$ в общия случай. Веднага се вижда, въпреки, че скипът на A не е задължително да е над A, че неговият двоен скип винаги е: За всяко множество A, знаем, че $\overline{A} \leq_1 A^{\Diamond}$. Прилагайки това два пъти, получаваме $A \leq_1 \overline{A^{\Diamond}} \leq_1 A^{\Diamond\Diamond}$, така $A \leq_e A^{\Diamond\Diamond}$. Следователно $\mathbf{a}^{\langle n\rangle} \leq \mathbf{a}^{\langle n+2\rangle}$, за всяко n. В допълнение, от монотонността имаме че: за всяко n $\mathbf{0}_e^{(n)} \leq \mathbf{a}^{\langle n\rangle}$. Ако $\mathbf{a}^{\langle n\rangle}$ не е кототална за всяко естествено число n, тогава имаме формата на *зиг-заг* поведение на скипа, илюстрирано на Фигура 7.2. Ние търсим примери на степени, на които скипът има общо поведение.

Скип на генерични множества

Започваме с класа на номерационните степени, които съдържат 1-генерично множество. Дефиниция 2.3.8 дава релативизирана форма на 1-генеричност, подходяща в контекста на номерационните степени. Нека припомним, че използваме означението "релативно относно $\langle X\rangle$" да означим "релативно относно номерационната степен на X".

От Дефиниция 2.3.10 знаем, че една номерационна степен $\mathbf{a}$ е *строго квазиминимално покритие* на $\mathbf{b}$, ако $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ и всяка тотална номерационна степен $\mathbf{x}$, ограничена от $\mathbf{a}$, е под $\mathbf{b}$.

Показахме в Твърдение 2.3.11 следните свойства на 1-генеричното относно $\langle X\rangle$ множество G:

1. $d_e(G \oplus X)$ е строго квазиминимално покритие на $d_e(X)$.

2. $\overline{G}$ е 1-генерично относно $\langle X\rangle$.

Знаем от Следствие 2.2.8, че Тюринговият скок на 1-генерично множество G има хубава характеризация : $K_G \equiv_T G \oplus K$. Това свойство се релативизира: ако G е 1-генерично относно X, тогава $K_{G\oplus X} \equiv_T G \oplus K_X$. Подобно свойство е вярно за скипа на 1-генерично множество G относно $\langle X\rangle$.

Твърдение 7.4.10. Ако G е 1-генерично относно $\langle X\rangle$, то $(G \oplus X)^\Diamond \equiv_e \overline{G} \oplus X^\Diamond$.

Сега можем лесно да видим пример на множество G, чиито итериран скип формира зиг-заг. Нека G да бъде множество, което е аритметично генерично, т.е. G е 1-генерично относно $\langle \varnothing^{(n)}\rangle$ за всяко естествено число n. Да забележим, че $\overline{G}$ има същото свойство. Тогава с индукция, използвайки горната характеризация, можем да покажем, че за всяко $n < \omega$:

- Ако n е нечетно, то $G^{\langle n\rangle} \equiv_e \overline{G} \oplus \varnothing^{(n)}$ и $(\overline{G})^{\langle n\rangle} \equiv_e G \oplus \varnothing^{(n)}$.
- Ако n е четно, то $G^{\langle n\rangle} \equiv_e G \oplus \varnothing^{(n)}$ и $(\overline{G})^{\langle n\rangle} \equiv_e \overline{G} \oplus \varnothing^{(n)}$.

Всички итерации на скипа на двете множества G и $\overline{G}$ не са тотални, тъй като техните степени са квазиминимални покрития на съответните итерации на скока на $\mathbf{0}_e$. Следователно, те също нямат кототална степен, тъй като по Твърдение 7.2.1 множествата H от кототални степени имат тотални скипове: $K_H \equiv_e H \le_e H^\Diamond = \overline{K_H}$. Това дава пример на двоен зиг-заг като на Фигура 7.3. Трябва да се отбележи, че само редукциите, отбелязани на диаграмата, са в сила. Например, $G \not\le_e G^{\langle 3\rangle}$; иначе $G^{\langle 3\rangle} \equiv_e G \oplus G^{\langle 3\rangle} \equiv_e G \oplus \overline{G} \oplus \varnothing^{\langle 3\rangle}$ ще е тотално.

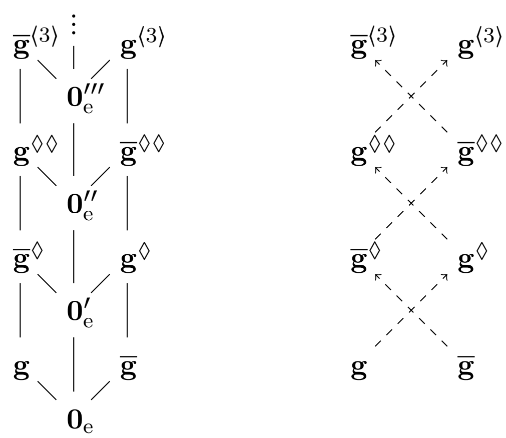

Figure 7.3: Итерирани скипове на степените на аритметични генерични множества и техните допълнения: двоен зиг-заг

Скипове на нетривиални $\mathcal{K}$-двойки.

Калимулин [Kal03] релативизира понятието $\mathcal{K}$-двойка, по подобен начин, както релативизирахме 1-генеричността.

Дефиниция 7.4.11. Една двойка от множества от естествени числа $\{A, B\}$ образува *$\mathcal{K}$-двойка, относно* $\langle X\rangle$, ако има множество $W \leq_{\mathrm{e}} X$, такова че $A \times B \subseteq W$ и $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq \overline{W}$. Двойката $\{A, B\}$ е *нетривиална $\mathcal{K}$-двойка относно* $\langle X\rangle$, ако допълнително $A \nleq_{\mathrm{e}} X$ и $B \nleq_{\mathrm{e}} X$.

Да забележим, че ако една двойка от множества $\{A, B\}$ образува $\mathcal{K}$-двойка, то $\{A, B\}$ образува нетривиална $\mathcal{K}$-двойка относно всяко $\langle X\rangle$, за което $A, B \nleq_{\mathrm{e}} X$. Ще отбележим някои свойства на релативизираните $\mathcal{K}$-двойки:.

Твърдение 7.4.12 (Калимулин [Kal03])**.** Нека $A, B, X \subseteq \mathbb{N}$ и да допуснем, че $\{A, B\}$ образува нетривиална $\mathcal{K}$-двойка относно $\langle X\rangle$.

1. Ако $C \leq_{\mathrm{e}} B$, то $\{A, C\}$ образува $\mathcal{K}$-двойка относно $\langle X\rangle$.
2. $A \leq_{\mathrm{e}} \overline{B} \oplus X$.
3. $\overline{A} \leq_{\mathrm{e}} B \oplus X^{\Diamond}$.
4. $d_{\mathrm{e}}(A \oplus X)$ и $d_{\mathrm{e}}(B \oplus X)$ са строги квазиминимални покрития на $d_{\mathrm{e}}(X)$.
5. За всяко $Z \subseteq \mathbb{N}$, степените $d_{\mathrm{e}}(A \oplus X \oplus Z)$ и $d_{\mathrm{e}}(B \oplus X \oplus Z)$ имат най-голяма долна граница и тя е $d_{\mathrm{e}}(X \oplus Z)$.

Забележете, че (1), (2) and (3) са симетрично изпълнени, ако сменим A и B.

Скипът на нетривиална $\mathcal{K}$-двойка, относно $\langle X\rangle$ има следните свойства:

Твърдение 7.4.13. Ако $\{A, B\}$ образува нетривиална $\mathcal{K}$-двойка относно $\langle X\rangle$, то
$$(A \oplus X)^{\Diamond} \leq_{\mathrm{e}} B \oplus X^{\Diamond} \quad \text{и} \quad (B \oplus X)^{\Diamond} \leq_{\mathrm{e}} A \oplus X^{\Diamond}.$$
Оракулът X е от кототална степен, ако и само ако, за всяка нетривиална $\mathcal{K}$-двойка $\{A, B\}$ относно $\langle X\rangle$,
$$(A \oplus X)^{\Diamond} \equiv_{\mathrm{e}} B \oplus X^{\Diamond} \quad \text{и} \quad (B \oplus X)^{\Diamond} \equiv_{\mathrm{e}} A \oplus X^{\Diamond}.$$

Ако $\{A, B\}$ е нетривиална $\mathcal{K}$-двойка и двете множества A и B не са аритметични, то $\{A, B\}$ е нетривиална $\mathcal{K}$-двойка, относно $\langle \varnothing^{(n)}\rangle$ за всяко естествено число n. Тъй като всяко множество $\varnothing^{(n)}$ е от (ко)тотална номерационна степен, то от Твърдение 7.4.13 следва, че итерираните скипове на A и B също образуват двоен зиг-заг: За всяко $n < \omega$,

- ако n е нечетно, то $A^{\langle n\rangle} \equiv_{\mathrm{e}} B \oplus \varnothing^{(n)}$ и $B^{\langle n\rangle} \equiv_{\mathrm{e}} A \oplus \varnothing^{(n)}$, и
- ако n е четно, то $A^{\langle n\rangle} \equiv_{\mathrm{e}} A \oplus \varnothing^{(n)}$ и $B^{\langle n\rangle} \equiv_{\mathrm{e}} B \oplus \varnothing^{(n)}$.

По-нататък, по Твърдение 7.4.12, за всяко естествено число n $\{d_{\mathrm{e}}(A)^{\langle n\rangle}, d_{\mathrm{e}}(B)^{\langle n\rangle}\}$ образуват минимална двойка от квазиминимални степени над $\mathbf{0}_{\mathrm{e}}^{(n)}$.

Една двойка от номерационни степени $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ образува $\mathcal{K}$-*двойка* (относно $\mathbf{x}$), ако има представители $A \in \mathbf{a}$ и $B \in \mathbf{b}$, които образуват $\mathcal{K}$-двойка (относно $\mathbf{x}$). Ние използваме характеризацията на скипа на $\mathcal{K}$-двойки, заедно със следната теорема на Ганчев и Скорби [GS16], за да дадем примери на степени, чиито итерирани скипове се държат съвсем различно.

Теорема 7.4.14 (Ганчев, Сорби [GS16])**.** За всяка номерационна степен $\mathbf{x} > \mathbf{0}_{\mathrm{e}}$ има степен $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ такава, че $\mathbf{a}$ е половина от нетривиална $\mathcal{K}$-двойка и такава, че $\mathbf{a}' = \mathbf{x}'$.

Използвайки този резултат, конструираме пример за номерационна степен, такава че всички итерации на нейния скип са тотални номерационни степени, но несъответстващи на итерациите на скока ѝ, с една итерация:

$$\mathbf{b}^{\Diamond} < \mathbf{b}' = \mathbf{b}^{\Diamond\Diamond} < \mathbf{b}'' = \mathbf{b}^{\langle 3\rangle} < \cdots < \mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{b}^{\langle n+1\rangle} < \cdots.$$

Завършваме тази дискусия с някои коментари относно определимостта на скип оператора. Калимулин [Kal03] доказва, че релацията "$\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ образуват $\mathcal{K}$-двойка, относно $\mathbf{x}$" е определима от първи ред с параметър $\mathbf{x}$. Използвайки този резултат, той показва, че номерационният скок-оператор е определим с формула от първи ред. Комбинирайки тези резултати с характеризацията на скип оператора за нетривиални $\mathcal{K}$-двойки, веднага получаваме следния резултат.

Следствие 7.4.15. Релацията

$$SK = \{(\mathbf{a},\mathbf{a}^{\Diamond}) \mid \mathbf{a} \text{ е половината от } \mathcal{K}\text{-двойка}\}$$

е определима от първи ред в $\mathcal{D}_{\mathrm{e}}$.

Остава отворен въпросът дали скип операторът е определим от първи ред в $\mathcal{D}_{\mathrm{e}}$.

Цикъл на 2 скипа

Както видяхме, скипът може да има *зиг-заг* поведение. Ще видим сега, че друг екстремен случай може да се появи: Двойният скип $\mathbf{a}^{\Diamond\Diamond}$ на една номерационна степен $\mathbf{a}$ може да е равен на самата $\mathbf{a}$. Използваме следната теорема на Кнастер-Тарски.

Теорема 7.4.16 (Кнастер-Тарски, теорема за неподвижната точка)**.** Нека L е изчислима решетка и нека $f\colon L \to L$ е монотонна, т.е. за всяко $x, y \in L$ имаме, че от $x \leq y$ следва че $f(x) \leq f(y)$. Тогава f има неподвижна точка. Всъщност, неподвижните точки на f образуват пълна решетка.

Прилагаме теоремата на Кнастер-Тарски за функция над 2^ω, като гледаме в решетката на множеството от всички подмножества на $\mathbb{N}$, наредени с релацията включване.

Теорема 7.4.17. Има множество A, такова, че $A^{\Diamond\Diamond} = A$.

Нека $f\colon 2^\omega \to 2^\omega$ е двоен скип оператор, т.е. $f(A) = A^{\Diamond\Diamond}$. Да забележим, че ако $A \subseteq B$, то $K_A \subseteq K_B$ и $A^{\Diamond} \supseteq B^{\Diamond}$. Прилагайки два пъти, получаваме $A^{\Diamond\Diamond} \subseteq B^{\Diamond\Diamond}$, така f е монотонна. Следователно, от теоремата на Кнастер-Тарски за неподвижната точка, има A, такова че $A^{\Diamond\Diamond} = A$.

Забележете, че имаме не само, че A и $A^{\Diamond\Diamond}$ са номерационно еквивалентни, но те са равни като множества. Но ние се интересуваме главно от факта, че номерационната степен $\mathbf{a}$ на A удовлетворява $\mathbf{a}^{\Diamond\Diamond} = \mathbf{a}$. Ако имаме такава степен $\mathbf{a}$, тогава казваме, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}^{\Diamond}$ образуват *скип 2-цикъл*.

Показваме, че степените със скип 2-цикъл са изчислително много сложни, а именно, те изчисляват хипераритметичните множества.

Твърдение 7.4.18. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}^{\Diamond}$ образуват 2-цикъл. Тогава $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$, за всяка тотална хипераритметична степен $\mathbf{b}$.

Естествено е да се интересуваме дали скип n-цикли (собствени) съществуват за всяко друго естествено число $n \geq 1$. Оказва се, че това не е изпълнено.

Твърдение 7.4.19. Нека $n \in \omega$, различно от 0 такова, че $\mathbf{a}^{\langle n\rangle} = \mathbf{a}$. Тогава $\mathbf{a}^{\Diamond\Diamond} = \mathbf{a}$.

Множеството A, което получихме в Теорема 7.4.17 ни дава възможност да построим пример на двойка множества A и $B = A^{\Diamond} = \overline{K_A}$, които илюстрират, че номерационният скок няма толкова добро поведение като Тюринговия.

Твърдение 7.4.20. От $A'_{\mathrm{e}} \equiv_1 B'_{\mathrm{e}}$ не следва, че $A \equiv_{\mathrm{e}} B$.

7.5 Разделящи свойства за кототалността

7.5.1 Степени, които не са слабо кототални

Първо показваме, че свойството *слаба кототалност* е нетривиално, т.е. има примери на номерационни степени, които не са слабо кототални. Представяме три различни примера в тази секция. Първо да забележим, че достатъчно генеричните множества не са слабо кототални.

Твърдение 7.5.1. Ако $\mathbf{a}$ е 2-генерична номерационна степен, тогава $\mathbf{a}$ не е слабо кототална.

Може да получим такива примери като използваме и $\mathcal{K}$-двойки.

Твърдение 7.5.2. Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \not\leq_e \mathbf{0}'_e$ образуват нетривиална $\mathcal{K}$-двойка. Тогава $\mathbf{a}$ не е слабо кототална.

За нашия пример за степен, която не е слабо кототална, да припомним от Теорема 7.4.17, че има степен $\mathbf{a}$, такава че $\mathbf{a}^{\Diamond\Diamond} = \mathbf{a}$. Такава степен не е слабо кототална.

Твърдение 7.5.3. Нека $\mathbf{a}$ е такава, че $\mathbf{a}^{\Diamond\Diamond} = \mathbf{a}$. Тогава $\mathbf{a}$ не е слабо кототална.

7.5.2 Слабо кототални степени, които не са кототални

Следващото твърдение разграничава коactive кототалните от слабо кототалните степени като използва обръщането на скока от Теорема 7.4.3.

Твърдение 7.5.4. Има степен $\mathbf{a}$, която е слабо кототална, но е кототална.

Нека $B \geq_e \overline{K}$ е тотално множество и $S = K_B$. Тъй като $S \equiv_e B$, *степента* на S е тотална, но S не е тотално *като множество*. Прилагаме Теорема 7.4.3, за да получим A, такова че $A^{\Diamond} \equiv_e S$ и $\overline{S} \leq_e A \oplus \overline{K}$.

Тогава A е слабо кототална, тъй като $A \equiv_e K_A$ и $\overline{K_A} = A^{\Diamond} \equiv_e S$, което има тотална степен. Нека $\mathbf{a}$ е степента на A. Твърдим, че $\mathbf{a}$ не е кототална. По твърдение 7.2.1, е достатъчно да покажем, че $A \not\leq_e A^{\Diamond}$. Ако допуснем, че $A \leq_e A^{\Diamond}$, тъй като $A^{\Diamond} \geq_e \overline{K}$ винаги е в сила, то

$$S \equiv_e A^{\Diamond} \geq_e A \oplus \overline{K} \geq_e \overline{S},$$

така S ще е тотално, което е противоречие.

Това доказателство, комбинирно с Теорема 7.4.6, дава обещаната Π^0_2 степен, която не е кототална. Такава степен може да се получи и с използване на теоремата на Бадило и Харис [BH12], доказвайки съществуването на Π^0_2-номерационна степен, съдържаща само съществени Π^0_2-множества. Тъй като всички Π^0_2 номерационни степени са слабо кототални, това дава по-конкретен разделящ резултат.

Алтернативно разделяне на слабо кототалните от кототалните се дава със следващото твърдение.

Твърдение 7.5.5. Ако $\mathbf{b} \nleq \mathbf{0}'_e$, но образуват нетривиална $\mathcal{K}$-двойка с $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'_e$, то $\mathbf{b}$ образува минимална двойка с $\mathbf{b}^{\Diamond}$.

Нека допуснем, че има ненулева степен $\mathbf{c}$, такава че $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}$ и $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}^{\Diamond}$. Фактът, че $\mathbf{c} \leq \mathbf{b}$ ни дава, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ образуват $\mathcal{K}$-двойка по Твърдение 7.4.12(1). Използвайки това, Твърдение 7.4.12(2) и Твърдение 7.4.13 два пъти, имаме

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{a}^{\Diamond} = \mathbf{c} \oplus \mathbf{0}'_e \leq \mathbf{b}^{\Diamond} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{0}'_e = \mathbf{0}'_e.$$

Така $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}'_e$, което е противоречие.

Следствие 7.5.6. Ако **b** е като в предишното твърдение, то **b** е слабо кототална, но не е кототална.

Единственото разделяне, което ни остана да покажем е между кототалните и граф-кототалните степени. В следващата секция го показваме.

7.6 Кототална степен, която не е граф-кототална

Теорема 7.6.1. Има кототална степен, която не е граф-кототална.

Фиксираме един неориентиран граф $\mathcal{G} = (\omega^{<\omega}, E)$, в който релацията ребро е зададена с $E(a, b)$, ако и само ако $a^- = b$ или $a = b^-$ (т.е. a е непосредствен наследник на b или непосредствен предшественик на b). Строим допълнение на максимално независимо множество за графа $\mathcal{G}$. Да припомним, че това е подмножество $A \subseteq \omega^{<\omega}$ със свойството, че всеки елемент $a \in \omega^{<\omega}$ е или извън A, или е свързан с ребро с елемент извън A, но не и двете.

Другото условие за множеството A е: то не е номерационно еквивалентно на граф-кототално множество. Конструираме A с тези свойства, като използваме конструкция, базирана на метод на приоритета с безкрайни нарушения, в рамката на $0'''$-приоритетна конструкция над $0'$.

Разглеждаме безкрайна редица от изисквания, които заедно осигуряват нашата цел. Използваме дърво на стратегиите. Стратегиите на дървото наследяват стандартната подредба на възлите: Използваме $\alpha \leq \beta$ за означаване, че α е префикс на β и $\alpha <_L \beta$ за "α е отляво на β" в дървото. Всяка стратегия е свързана с едно от изискванията. На всяка стъпка строим краен път през дървото, като активираме стратегиите по него и нарушаваме всички стратегии, които са отдясно. Активираните стратегии предприемат действия, за да се удовлетворят техните изисквания. Нарушените стратегии се *инициализират* — те трябва да започнат отново, както и ако не са активирани преди. Идеята е, че има *истински път*, найляв безкраен път от възли, посетени на безкрайно много стъпки, така че всяка стратегия по този път успява да удовлетвори изискванията, които са свързани с нея. За по-детайлно обяснение на метода на приоритета и метода с дървета на стратегиите виж Соар [Soa87]. Нашият аргумент се различава от стандартния аргумент с безкрайни нарушения с две неща: Има някои стратегии α, които умишлено нарушават други стратегии β с $\alpha < \beta$, и това води нарушения по истинския път. Също имаме стратегии β, които карат стратегии $\alpha < \beta$ да се върнат в предишно състояние в конструкцията на α, макар и за всяка α, всяко състояние в конструкцията на α, ще може само се накара да се върне от крайно много $\beta > \alpha$. Накрая, използваме понятието *момент* да посочим подстъпките в конструкцията. Предполагаме, че тези действия, които предприемат стратегиите, като инициализация и нарушаване, имат непосредствен ефект през моментите в конструкцията, а не накрая на стъпката.

Множеството $A \subseteq \omega^{<\omega}$, което конструираме, удовлетворява следните условия, за всички $a \in \omega^{<\omega}$ и всички номерационни оператори Φ и Ψ.

Условия:

общи:$(\forall x, y \in \omega^{<\omega} \setminus A)[\neg\, xEy]$

$\mathcal{N}_a$:$a \notin A$ or $(\exists x)[xEa \wedge x \notin A]$

$\mathcal{R}_{\Phi,\Psi}$:$A = \Psi(\Phi(A)) \implies \Phi(A) \neq \overline{G_f}$ за всяка тотална функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Нашите общи условия, и $\mathcal{N}_a$-условията, и $\mathcal{R}_{\Phi,\Psi}$-условията осигуряват, че A е от кототална (виж Секция 7.3.3), но не е от граф-кототална номерационна степен.

7.7 Открити проблеми

В тази секция показваме откритите проблеми, които възникнаха по време на изследванията, като някои от тях вече сме коментирали.

Определимост

Както споменахме, Калимулин [Kal03] показва, че номерационният скок е определим от първи ред. Дали това е вярно и за скипа?

Въпрос 7.7.1. Дали скипът е определим от първи ред в номерационните степени?

Дискутирахме няколко понятия за кототалност. Кои от тях са определими?

Въпрос 7.7.2. Кои понятия за кототалност са определими от първи ред в номерационните степени?

При положителен отговор на първия въпрос, ще получим по Твърдение 7.2.1, че кототалните степени са определими.

Аритметичен зиг-заг

В Секция 7.4.2 показахме, че скипът може да има поведение във форма на *зиг-заг*: Има степени $\mathbf{a}$, за които за никое $n \in \omega$, n-скипът на $\mathbf{a}$ не е тотален. Но примерите, които построихме, не са аритметични. Ние предполагаме, че това не е съвпадение.

Хипотеза 2. Ако $\mathbf{a}$ е аритметична степен, тогава $\mathbf{a}^{\langle n\rangle}$ е тотална за някое $n \in \omega$.

Граф-кототални степени

В Теорема 7.6.1 конструирахме една кототална Δ^0_3-степен, която не е граф-кототална. От друга страна, в Твърдение 7.3.1 доказахме, че Σ^0_2-степените са граф-кототални. Това остава открит следният въпрос :

Въпрос 7.7.3. Дали всяка Π^0_2 кототална номерационна степен е граф-кототална?

Не знаем по-просто доказателство за съществуване на една кототална номерационна степен, която не е граф-кототална. Един по-информативен резултат за разделяне може да бъде изведен при позитивен отговор на следния въпрос:

Въпрос 7.7.4. Има ли непрекъсната номерационна степен, която не е граф-кототална?

Скип кототалност

Нека наречем една степен $\mathbf{a}$ *скип-кототална*, ако $\mathbf{a}^\Diamond$ е тотална степен. Да забележим, че всяка скип кототална степен $\mathbf{a}$ е слабо кототална, а също всяка кототална степен е скип кототална. Освен това, да забележим, че в доказателството на Твърдение 7.5.4 и Следствие 7.5.6, на практика конструирахме степен $\mathbf{a}$, която е скип кототална, но не е кототална. Дори алтернативният пример на слабо кототална степен, даден от Бадило и Харис [BH12] — степента, която е изцяло композирана от собствени Π^0_2-множества — е също скип кототална степен.

Хипотеза 3. Всяка слабо кототална степен $\mathbf{a}$ е скип кототална.

Както споменахме, всяка Π^0_2-степен е слабо кототална. Ето защо едно доказателство на нашата хипотеза би показало по специално, че скипът на всяка Π^0_2-степен е тотална, което също е открит въпрос.

Глава 8

Библиография

[ACG+20] R. Alvir, W. Calvert, G. Goodman, V. Harizanov, J. Knight, A. Morozov, R. Miller, A. Soskova, and R. Weisshaar. Interpreting a field in its heisenberg group. Submitted, 2020.

[AGK+19] Uri Andrews, Hristo A. Ganchev, Rutger Kuyper, Steffen Lempp, Joseph S. Miller, Alexandra A. Soskova, and Mariya I. Soskova. On cototality and the skip operator in the enumeration degrees. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 372(3):1631–1670, 2019.

[Ahm89] Seema Ahmad. *Some results on the structure of the* Σ_2 *enumeration degrees.* PhD thesis, Simon Fraser University, 1989.

[AK00] C. J. Ash and J. Knight. *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy*, volume 144 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000.

[AKMS] R Alvir, J. Knight, R. Miller, and A Soskova. Interpreting an algebraic closed field C into $SL_2(C)$. draft.

[AKMS89] Chris Ash, Julia Knight, Mark Manasse, and Theodore Slaman. Generic copies of countable structures. *Ann. Pure Appl. Logic*, 42(3):195–205, 1989.

[Bal06] V. Baleva. The jump operation for structure degrees. *Arch. Math. Logic*, 45(3):249–265, 2006.

[BGV19] Nikolay Bazhenov, Hristo Ganchev, and Stefan Vatev. Effective embeddings for pairs of structures. In Florin Manea, Barnaby Martin, Daniël Paulusma, and Giuseppe Primiero, editors, *Computing with Foresight and Industry*, pages 84–95, Cham, 2019. Springer International Publishing.

[BH12] Liliana Badillo and Charles M. Harris. An application of 1-genericity in the Π^0_2 enumeration degrees. In *Theory and applications of models of computation*, volume 7287 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 604–620. Springer, Heidelberg, 2012.

[Boo59] William W. Boone. The word problem. *Ann. of Math. (2)*, 70:207–265, 1959.

[Cas69] John W. Case. *Enumeration reducibility and partial degrees.* Ph.D. Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1969.

[Cas71] John W. Case. Enumeration reducibility and partial degrees. *Ann. Math. Logic*, 2(4):419–439, 1970/1971.

[CCKM04] U. Calvert, D. Cummins, Julia F. Knight, and S. Miller. Comparison of classes of finite structures. *Algebra Logika*, 43(6):666–701, 759, 2004.

[CDS00] Richard J. Coles, Rod G. Downey, and Theodore A. Slaman. Every set has a least jump enumeration. *J. London Math. Soc. (2)*, 62(3):641–649, 2000.

[CFH+18] W. Calvert, A. Frolov, V. Harizanov, J. Knight, C. McCoy, A. Soskova, and S. Vatev. Strong jump inversion. *J. Logic Comput.*, 28(7):1499–1522, 2018.

[CGL+16] Mingzhong Cai, Hristo A. Ganchev, Steffen Lempp, Joseph S. Miller, and Mariya I. Soskova. Defining totality in the enumeration degrees. *J. Amer. Math. Soc.*, 29(4):1051–1067, 2016.

[Chi90] John Chisholm. Effective model theory vs. recursive model theory. *J. Symbolic Logic*, 55(3):1168–1191, 1990.

[Coo84] S. B. Cooper. Partial degrees and the density problem. II. The enumeration degrees of the Σ_2 sets are dense. *J. Symbolic Logic*, 49(2):503–513, 1984.

[Coo90] S. Barry Cooper. Enumeration reducibility, nondeterministic computations and relative computability of partial functions. In *Recursion theory week (Oberwolfach, 1989)*, volume 1432 of *Lecture Notes in Math.*, pages 57–110. Springer, Berlin, 1990.

[Coo04] S. Barry Cooper. *Computability theory.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[Cop88] Kate Copestake. 1-genericity in the enumeration degrees. *J. Symbolic Logic*, 53(3):878–887, 1988.

[DH15] R. D. Dimitrov and V. Harizanov, Valentina. Orbits of maximal vector spaces. *Algebra Logika*, 54(6):680–732, 783–784, 2015.

[DHM+19] Rumen Dimitrov, Valentina Harizanov, Andrey Morozov, Paul Shafer, Alexandra Soskova, and Stefan Vatev. Cohesive powers of linear orders. In Florin Manea, Barnaby Martin, Daniël Paulusma, and Giuseppe Primiero, editors, *Computing with Foresight and Industry*, pages 168–180, Cham, 2019. Springer International Publishing.

[DHM+20] R. Dimitrov, V. Harizanov, A. Morozov, P. Shafer, A. Soskova, and S. Vatev. On cohesive powers of linear orders. Submitted., 2020.

[DHMM14] Rumen Dimitrov, Valentina Harizanov, Russell Miller, and K. J. Mourad. Isomorphisms on non-standard fields and Ash's conjecture. In *Language, life, limits*, volume 8493 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 143–152. Springer, Cham, 2014.

[Dim08] Rumen Dimitrov. A class of Σ_3^0 modular lattices embeddable as principal filters in $L^*(V_\infty)$. *Arch. Math. Logic*, 47(2):111–132, 2008.

[Dim09] Rumen Dimitrov. Cohesive powers of computable structures. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, 99:193–201, 2009.

[DJ94] Rod Downey and Carl G. Jockusch. Every low Boolean algebra is isomorphic to a recursive one. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(3):871–880, 1994.

[DK92] Rodney Downey and Julia F. Knight. Orderings with αth jump degree $\mathbf{0}^{(\alpha)}$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114(2):545–552, 1992.

[EPS11] Yuri L. Ershov, Vadim G. Puzarenko, and Alexey I. Stukachev. HF-computability. In *Computability in context*, pages 169–242. Imp. Coll. Press, London, 2011.

[Ers85] Yu. L. Ershov. Σ-definability in admissible sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 285(4):792–795, 1985.

[FR59] Richard M. Friedberg and Hartley Rogers, Jr. Reducibility and completeness for sets of integers. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 5:117–125, 1959.

[Fri57] Richard Friedberg. A criterion for completeness of degrees of unsolvability. *J. Symbolic Logic*, 22(2):159–160, 06 1957.

[Fro06] A. N. Frolov. Δ_2^0-copies of linear orderings. *Algebra Logika*, 45(3):354–370, 376, 2006.

[Fro10] A. N. Frolov. Linear orderings of low degree. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 51(5):1147–1162, 2010.

[Fro12] Andrey N. Frolov. Low linear orderings. *J. Logic Comput.*, 22(4):745–754, 2012.

[FS56] A. Fröhlich and J. C. Shepherdson. Effective procedures in field theory. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 248:407–432, 1956.

[FS89] Harvey Friedman and Lee Stanley. A Borel reducibility theory for classes of countable structures. *J. Symbolic Logic*, 54(3):894–914, 1989.

[FST59] S. Feferman, D. S. Scott, and S. Tennenbaum. Models of arithmetic through function rings. *Notices Amer. Math. Soc*, 173(6), 1959.

[GHK+05] Sergey Goncharov, Valentina Harizanov, Julia Knight, Charles McCoy, Russell Miller, and Reed Solomon. Enumerations in computable structure theory. *Ann. Pure Appl. Logic*, 136(3):219–246, 2005.

[GK02] S. S. Goncharov and B. Kh. Khusainov. Complexity of categorical theories with computable models. *Dokl. Akad. Nauk*, 385(3):299–301, 2002.

[GKV18] Hristo A. Ganchev, Iskander Sh. Kalimullin, and Stefan V. Vatev. Computable embedding of classes of algebraic structures with congruence relation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta*, 160(4):731–737, 2018.

[GS12] Hristo A. Ganchev and Mariya I. Soskova. Interpreting true arithmetic in the local structure of the enumeration degrees. *J. Symbolic Logic*, 77(4):1184–1194, 2012.

[GS15] Hristo A. Ganchev and Mariya I. Soskova. Definability via Kalimullin pairs in the structure of the enumeration degrees. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367:4873–4893, 2015.

[GS16] Hristo Ganchev and Andrea Sorbi. Initial segments of the Σ_2^0 enumeration degrees. *J. Symb. Log.*, 81(1):316–325, 2016.

[GS18] Hristo A. Ganchev and Mariya I. Soskova. The jump hierarchy in the enumeration degrees. *Computability*, 7(2-3):179–188, 2018.

[Gut71] Lance Gutteridge. *Some results on enumeration reducibility.* Ph.D. Dissertation, Simon Fraser University, 1971.

[Har68] Joseph Harrison. Recursive pseudo-well-orderings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 131:526–543, 1968.

[Har10] Charles M. Harris. Goodness in the enumeration and singleton degrees. *Arch. Math. Logic*, 49(6):673–691, 2010.

[Hir75] J. Hirschfeld. Models of arithmetic and recursive functions. *Israel J. Math.*, 20(2):111–126, 1975.

[HKSS02] Denis R. Hirschfeldt, Bakhadyr Khoussainov, Richard A. Shore, and Arkadii M. Slinko. Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures. *Ann. Pure Appl. Logic*, 115(1-3):71–113, 2002.

[HM12] Kenneth Harris and Antonio Montalbán. On the n-back-and-forth types of Boolean algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(2):827–866, 2012.

[Hod93] Wilfrid Hodges. *Model theory*, volume 42 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[HT] Matthew Harrison-Trainor. The tree of tuples of a structure. The Journal of Symbolic Logic, 1-27. doi:10.1017/jsl.2019.92.

[HTMM18] Matthew Harrison-Trainor, Russell Miller, and Antonio Montalbán. Borel functors and infinitary interpretations. *J. Symb. Log.*, 83(4):1434–1456, 2018.

[HTMMM17] Matthew Harrison-Trainor, Alexander Melnikov, Russell Miller, and Antonio Montalbán. Computable functors and effective interpretability. *J. Symb. Log.*, 82(1):77–97, 2017.

[HW75] Joram Hirschfeld and William H. Wheeler. *Forcing, arithmetic, division rings.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 454. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[Jea15] Emmanuel Jeandel. Enumeration in closure spaces with applications to algebra. *CoRR*, abs/1505.07578, 2015.

[JS91] Carl G. Jockusch, Jr. and Robert I. Soare. Degrees of orderings not isomorphic to recursive linear orderings. *Ann. Pure Appl. Logic*, 52(1-2):39–64, 1991. International Symposium on Mathematical Logic and its Applications (Nagoya, 1988).

[Kal03] Iskander Sh. Kalimullin. Definability of the jump operator in the enumeration degrees. *J. Math. Log.*, 3(2):257–267, 2003.

[Kal09a] I. Sh. Kalimullin. Relations between algebraic reducibilities of algebraic systems. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 6:71–72, 2009.

[Kal09b] Iskander Kalimullin. Enumeration degrees and enumerability of families. *J. Logic Comput.*, 19(1):151–158, 2009.

[Kal12] Iskander Kalimullin. Algorithmic reducibilities of algebraic structures. *J. Logic Comput.*, 22(4):831–843, 2012.

[Kap69] Irving Kaplansky. *Infinite abelian groups.* Revised edition. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1969.

[KAV19] J.$\tilde{F}$. Knight, Soskova A., and S Vatev. Coding in graphs and linear orderings. To appear in Journal of Symbolic Logic, DOI: https://doi.org/10.1017/jsl.2019.91, 2019.

[Kay91] Richard Kaye. *Models of Peano arithmetic*, volume 15 of *Oxford Logic Guides.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991. Oxford Science Publications.

[Kei71] H. Jerome Keisler. *Model theory for infinitary logic. Logic with countable conjunctions and finite quantifiers.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1971. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 62.

[KMVB07] Julia F. Knight, Sara Miller, and M. Vanden Boom. Turing computable embeddings. *J. Symbolic Logic*, 72(3):901–918, 2007.

[Kni86] Julia F. Knight. Degrees coded in jumps of orderings. *J. Symbolic Logic*, 51(4):1034–1042, 1986.

[Kni94] Julia F. Knight. Nonarithmetical $\aleph_0$-categorical theories with recursive models. *J. Symbolic Logic*, 59(1):106–112, 1994.

[Kni98] J. F. Knight. Degrees of models. In *Handbook of recursive mathematics, Vol. 1*, volume 138 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 289–309. North-Holland, Amsterdam, 1998.

[KP54] S. C. Kleene and Emil L. Post. The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability. *Ann. of Math. (2)*, 59:379–407, 1954.

[KS00] Julia F. Knight and Michael Stob. Computable Boolean algebras. *J. Symbolic Logic*, 65(4):1605–1623, 2000.

[Kuz58] Alexander V. Kuznetsov. Algorithms as operations in algebraic systems. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 14:240–241, 1958.

[Lav63] I. S. Lavrov. Effective inseparability of the set of identically true formulae and finitely refutable formulae for certain elementary theories. *Algebra i Logika*, 2:5–18, 1963.

[LE65] E. G. K. Lopez-Escobar. An interpolation theorem for denumerably long formulas. *Fund. Math.*, 57:253–272, 1965.

[Ler70] Manuel Lerman. Recursive functions modulo CO $-$ r-maximal sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 148:429–444, 1970.

[LS79] Manuel Lerman and James H. Schmerl. Theories with recursive models. *J. Symbolic Logic*, 44(1):59–76, 1979.

[LS92] Alistair H. Lachlan and Richard A. Shore. The n-rea enumeration degrees are dense. *Arch. Math. Logic*, 31(4):277–285, 1992.

[Mal60] A. I. Mal'tsev. Some correspondences between rings and groups. *Mat. Sb. (N.S.)*, 50 (92):257–266, 1960.

[Mal61] A. I. Mal'tsev. Constructive algebras. I. *Uspehi Mat. Nauk*, 16(3 (99)):3–60, 1961.

[Mal62] A. I. Mal'tsev. On recursive Abelian groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 146:1009–1012, 1962.

[Mar89] David Marker. Non Σ_n axiomatizable almost strongly minimal theories. *J. Symbolic Logic*, 54(3):921–927, 1989.

[Mar02] David Marker. *Model theory*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002. An introduction.

[Mat70] Ju. V. Matijasevič. The Diophantineness of enumerable sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 191:279–282, 1970.

[Mat93] Yuri V. Matiyasevich. *Hilbert's tenth problem*. Foundations of Computing Series. MIT Press, Cambridge, MA, 1993. Translated from the 1993 Russian original by the author, With a foreword by Martin Davis.

[McC18] Ethan McCarthy. Cototal enumeration degrees and their applications to effective mathematics. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(8):3541–3552, 2018.

[McE85] Kevin McEvoy. Jumps of quasi-minimal enumeration degrees. *J. Symbolic Logic*, 50:839–848, 1985.

[Med55] Yu. T. Medvedev. Degrees of difficulty of the mass problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 104:501–504, 1955.

[Mek81] Alan H. Mekler. Stability of nilpotent groups of class 2 and prime exponent. *J. Symbolic Logic*, 46(4):781–788, 1981.

[Mil78] Terrence S. Millar. Foundations of recursive model theory. *Ann. Math. Logic*, 13(1):45–72, 1978.

[Mil04] Joseph S. Miller. Degrees of unsolvability of continuous functions. *J. Symbolic Logic*, 69(2):555–584, 2004.

[MK08] Andrei S. Morozov and Margarita V. Korovina. On Σ-definability without equality over the real numbers. *MLQ Math. Log. Q.*, 54(5):535–544, 2008.

[MM17] David Marker and Russell Miller. Turing degree spectra of differentially closed fields. *J. Symb. Log.*, 82(1):1–25, 2017.

[MN77] G. Metakides and A. Nerode. Recursively enumerable vector spaces. *Ann. Math. Logic*, 11(2):147–171, 1977.

[MN79] G. Metakides and A. Nerode. Effective content of field theory. *Ann. Math. Logic*, 17(3):289–320, 1979.

[Mon] Antonio Montalbán. Computable structure theory: Within the arithmetic. To appear in ASL book series *Perspectives in Logic*.

[Mon09] Antonio Montalbán. Notes on the jump of a structure. In *Mathematical theory and computational practice*, volume 5635 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 372–378. Springer, Berlin, 2009.

[Mon12] Antonio Montalbán. Rice sequences of relations. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 370(1971):3464–3487, 2012.

[Mon14] Antonio Montalbán. Computability theoretic classifications for classes of structures. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II*, pages 79–101. Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

[Mor76] Michael Morley. Decidable models. *Israel J. Math.*, 25(3-4):233–240, 1976.

[Mor04] A. S. Morozov. On the relation of Σ-reducibility between admissible sets. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 45(3):634–652, 2004.

[Mos69] Yiannis N. Moschovakis. Abstract first order computability. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 138:427–464, 1969.

[MPSS18] Russell Miller, Bjorn Poonen, Hans Schoutens, and Alexandra Shlapentokh. A computable functor from graphs to fields. *J. Symb. Log.*, 83(1):326–348, 2018.

[MS18] Joseph S. Miller and Mariya I. Soskova. Density of the cototal enumeration degrees. *Ann. Pure Appl. Logic*, 169(5):450–462, 2018.

[Myh61] John Myhill. Note on degrees of partial functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12:519–521, 1961.

[Nie96] A. Nies. Undecidable fragments of elementary theories. *Algebra Universalis*, 35(1):8–33, 1996.

[Nov55] P. S. Novikov. *Ob algoritmičeskoĭ nerazrešimosti problemy toždestva slov v teorii grupp.* Trudy Mat. Inst. im. Steklov. no. 44. Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1955.

[Odi99] P. G. Odifreddi. *Classical recursion theory. Vol. II*, volume 143 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1999.

[Pan00] Andrey V. Pankratov. Some properties of e-degrees of cototal sets (Russian). In International conference "Logic and applications", Proceedings, Novosibirsk, 2000.

[Plo72] G.D. Plotkin. A set-theoretical definition of application. Memorandum MIP-R-95, School of Artificial Intelligence, University of Edinburgh, 1972.

[Poi01] Bruno Poizat. *Stable groups*, volume 87 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1987 French original by Moses Gabriel Klein.

[Puz09] V. G. Puzarenko. On a certain reducibility on admissible sets. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 50(2):415–429, 2009.

[Rab60] Michael O. Rabin. Computable algebra, general theory and theory of computable fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:341–360, 1960.

[Ric81] Linda Jean Richter. Degrees of structures. *J. Symbolic Logic*, 46(4):723–731, 1981.

[Rog67] Hartley Rogers, Jr. *Theory of recursive functions and effective computability.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

[Ros82] Joseph G. Rosenstein. *Linear orderings*, volume 98 of *Pure and Applied Mathematics.* Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1982.

[Sac10] Gerald E. Sacks. *Saturated model theory.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, second edition, 2010.

[San78] Luis E. Sanchis. Hyperenumeration reducibility. *Notre Dame J. Formal Logic*, 19(3):405–415, 1978.

[Sel71] Alan L. Selman. Arithmetical reducibilities I. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 17:335–350, 1971.

[Sko34] Th Skolem. Über die nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen. *Fundamenta Mathematicae*, 23(1):150–161, 1934.

[Sla98] Theodore A. Slaman. Relative to any nonrecursive set. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(7):2117–2122, 1998.

[Soa74] Robert I. Soare. Automorphisms of the lattice of recursively enumerable sets. I. Maximal sets. *Ann. of Math. (2)*, 100:80–120, 1974.

[Soa87] Robert I. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1987. A study of computable functions and computably generated sets.

[Sol05] Boris Ya. Solon. Total and co-total enumeration degrees (Russian). *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 9:60–68, 2005.

[Sol06] Boris Ya. Solon. Co-total enumeration degrees. In Arnold Beckmann, Ulrich Berger, Benedikt Löwe, and John V. Tucker, editors, *CiE*, volume 3988 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 538–545. Springer, 2006.

[Sor88] Andrea Sorbi. On quasiminimal e-degrees and total e-degrees. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102(4):1005–1008, 1988.

[Sos00] I. N. Soskov. A jump inversion theorem for the enumeration jump. *Arch. Math. Logic*, 39(6):417–437, 2000.

[Sos04] Ivan N. Soskov. Degree spectra and co-spectra of structures. *Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform.*, 96:45–68, 2004.

[Sos07] Alexandra A. Soskova. A jump inversion theorem for the degree spectra. In S. Barry Cooper, Benedikt Löwe, and Andrea Sorbi, editors, *Computation and Logic in the Real World*, pages 716–726, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer Berlin Heidelberg.

[Sos13] Ivan N. Soskov. A note on ω-jump inversion of degree spectra of structures. In Paola Bonizzoni, Vasco Brattka, and Benedikt Löwe, editors, *The Nature of Computation. Logic, Algorithms, Applications—9th Conference on Computability in Europe, CiE 2013, Milan, Italy, July 1–5, 2013. Proceedings*, volume 7921 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 365–370. Springer, 2013.

[SS99] Richard A. Shore and Theodore A. Slaman. Defining the Turing jump. *Math. Res. Lett.*, 6:711–722, 1999.

[SS07] Alexandra A. Soskova and Ivan N. Soskov. Jump spectra of abstract structures. In *Proceeding of the 6th Panhellenic Logic Symposium, Volos, Greece, Proceeding of the 6th Panhellenic Logic Symposium, Volos, Greece,*, pages 114–117, 2007.

[SS09a] Alexandra A. Soskova and Ivan N. Soskov. A jump inversion theorem for the degree spectra. *J. Logic Comput.*, 19(1):199–215, 2009.

[SS09b] Alexandra A. Soskova and Ivan N. Soskov. Some applications of the jump inversion theorem. In C. Drossos, P. Peppas, and C. Tsinakis, editors, *Proceedings of the 7th Panhellenic Logic Symposium*, pages 157–161, 2009.

[SS12] Mariya I. Soskova and Ivan N. Soskov. Embedding countable partial orderings in the enumeration degrees and the ω-enumeration degrees. *J. Logic Comput.*, 22(4):927–952, 2012.

[SS13] Alexandra A. Soskova and Ivan N. Soskov. Quasi-minimal degrees for degree spectra. *J. Logic Comput.*, 23(6):1319–1334, 2013.

[SS17] Alexandra A. Soskova and Mariya I. Soskova. Enumeration reducibility and computable structure theory. In Adam Day, Michael Fellows, Noam Greenberg, Bakhadyr Khoussainov, Alexander Melnikov, and Frances Rosamond, editors, *Computability and Complexity: Essays Dedicated to Rodney G. Downey on the Occasion of His 60th Birthday*, pages 271–301. Springer International Publishing, Cham, 2017.

[SS18] Theodore A. Slaman and Mariya I. Soskova. The Δ_2^0 Turing degrees: automorphisms and definability. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(2):1351–1375, 2018.

[Stu09] A. I. Stukachev. A jump inversion theorem for semilattices of Σ-degrees. *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 6:182–190, 2009.

[Stu10] A. I. Stukachev. A jump inversion theorem for the semilattices of Sigma-degrees [translation of mr2586684]. *Siberian Adv. Math.*, 20(1):68–74, 2010.

[Stu13] Alexey Stukachev. Effective model theory: an approach via Σ-definability. In *Effective mathematics of the uncountable*, volume 41 of *Lect. Notes Log.*, pages 164–197. Assoc. Symbol. Logic, La Jolla, CA, 2013.

[SW86] Theodore A. Slaman and W. Hugh Woodin. Definability in the Turing degrees. *Illinois J. Math.*, 30(2):320–334, 1986.

[SW05] Theodore A. Slaman and W. Hugh Woodin. Definability in degree structures. Preprint, 2005.

[Tur37] A. M. Turing. On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem. A Correction. *Proc. London Math. Soc.*, S2-43(6):544–546, 1937.

[Tur39] A. M. Turing. Systems of Logic Based on Ordinals. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 45(3):161–228, 1939.

[TW16] Simon Thomas and Jay Williams. The bi-embeddability relation for finitely generated groups II. *Arch. Math. Logic*, 55(3-4):385–396, 2016.

[Vat13] Stefan Vatev. Another jump inversion theorem for structures. In Paola Bonizzoni, Vasco Brattka, and Benedikt Löwe, editors, *The Nature of Computation. Logic, Algorithms, Applications*, pages 414–423, Berlin, Heidelberg, 2013. Springer Berlin Heidelberg.

[Vat14] Stefan V. Vatev. *Effective properties of structures in the hyperarithmetical hierarchy.* PhD thesis, Sofia University St. Kliment Ohridski, 2014.

[Vat15] Stefan V. Vatev. On the notion of jump structure. *God. Sofiĭ. Univ. "Sv. Kliment Okhridski." Fac. Mat. Inform.*, 102:171–206, 2015.

[vdW30] Bartel L. van der Waerden. Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen. *Math. Ann.*, 102(1):738–739, 1930.

[Weh98] Stephan Wehner. Enumerations, countable structures and Turing degrees. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(7):2131–2139, 1998.