

СТАНОВИЩЕ

върху дисертационния труд за придобиване на образователна и научна степен „доктор” в професионално направление 4.5. Математика, докторска програма „Математически анализ”

Автор на дисертационния труд: ас. Живко Христов Петров от катедра „Математически анализ” към Факултета по математика и информатика на СУ „Свети Климент Охридски”.

Тема на дисертационния труд: „Върху някои диофантови уравнения и неравенства”.

Член на научното жури: акад. проф. дмн Веселин Стоянов Дренски от ИМИ към БАН.

Дисертационният труд е в областта на аналитичната теория на числата, която е класическа област от теорията на числата, но използва техники от математическия анализ. Трудът е изложен на 93 „стандартни” ТЕХ-страници. Състои се от увод, 5 глави и списък от 88 заглавия на използваната литература.

Актуалност на разработвания проблем. Ще отбележим някои от крайъгълните камъни на аналитичната теория на числата. Може да се счита, че теорията води началото си от Ойлер, който през 1748 г. използва производящи функции за намиране на броя на решенията в неотрицателни цели числа на линейни уравнения с неотрицателни коефициенти. По-късно, през 1818 г. в своето шесто (от осем) доказателство на закона за взаимност на квадратичните остатъци Гаус използва суми от корени на единицата, които са аналог над крайно поле на гама-функцията. Същинската аналитична теория на числата води началото си от Дирихле, който през 1837 г. доказва своята прочута теорема за съществуването на безбройно много прости числа в безкрайни аритметични прогресии. За тази цел той въвежда т.н. L -функции и използва методи на анализа. По-късно, през 1848 – 1850 г. Чебишев, в опита си да докаже асимптотичния закон за разпределението на простите числа и също с аналитични методи, доказва постулата на Бертран за съществуването на прости числа между n и $2n$. Следващата важна стъпка е прочутата статия на Риман от 1859 г. (и негова единствена статия по теория на числата), в която той въвежда ζ -функцията, показва нейната важност за разпределението на простите числа и формулира редица хипотези, една от които е добре известната хипотеза на Риман. През 1896 г. Адамар и Вале-Пусен доразвиват идеите на Риман и с методи на комплексния анализ доказват теоремата за разпределението на простите числа. Ще отбележим и кръговия метод на Харди и Литълуд, разработен в серия от статии върху проблема на Варинг през 1919-1925 г. През 1934 г. Виноградов разработва метода на тригонометричните суми, с който решава редица важни задачи от теорията на числата. В частност, през 1937 г. той доказва за достатъчно големи числа тернарния вариант на хипотезата на Голдбах. В по-ново време, след 1950 г. аналитичните методи се комбинират с класическия комбинаторен метод на решетото, който е въведен от Ератостен през трети век преди Христа. Непосредствено свързани с темата на дисертацията са три от най-известните проблеми в теорията на числата:

- Хипотеза на Голдбах (възникнала през 1742 г. в резултат на неговата кореспонденция в Ойлер), че всяко четно число, по-голямо от 2, може да се представи като сума на две прости числа. Тернарният вариант на хипотезата твърди, че всяко нечетно число, по-голямо от 5, може да се представи като сума на три прости числа. След серия от

подобрения на оценките в теоремата на Виноградов, последната стъпка в доказателството на хипотезата е направена с компютър.

- Хипотеза за съществуването на безбройно много прости числа-близнаци, т.е. двойки от прости числа от вида $(p, p + 2)$.
- Проблем на Варинг от 1770 година: За всяко цяло число $k \geq 2$ съществува число n такава, че за всяко естествено число N уравнението

$$x_1^k + \dots + x_n^k = N$$

има решение. (Решението на проблема на Варинг е дадено от Хилберт, също с аналитични методи, през 1909 г.)

Тези три класически задачи и техни комбинации имат редица варианти и аналози. Например, активно се изучава аналог на проблема на Варинг, като се предполага, че степенният показател е произволно реално число $c > 1$, а разликата $\Delta = x_1^c + \dots + x_n^c - N$ е произволно малка. Търси се доказателство за съществуване на решения на това неравенство, когато неизвестните са прости числа, а оценката за грешката Δ се дава в термините на N . Освен това, вместо с прости числа, се работи с числа, които се разлагат в произведение на малко на брой прости множители. При това, по естествен начин се намесват варианти на метода на решетото. В представената дисертация се прави интересна комбинация между трите формулирани по-горе класически проблеми. Считам, че задачите, разглеждани в дисертацията, са интересни и актуални, което се потвърждава и от продължаващата от десетилетия изследователска активност в областта.

2. Степен на познаване на състоянието на проблемите и творческа интерпретация на литературата. Дисертантът познава много добре състоянието на проблемите. Списъкът от 88 литературни източника започва от 1900 г., 17 от източниците са публикувани преди 1950 г., а 19 – след 2010 г. „Образователната” страна на степента „доктор” изисква кандидатът да докаже, че е навлязъл в областта. Считам, че Живко Петров е навлязъл успешно в съвременна и в същото време класическа област на математиката, а от изложението на материала в дисертацията може да се получи ясна представа за историята и съвременното състояние на разглежданите проблеми и на методите за тяхното изследване. Специално искам да отбележа, че дисертантът е усвоил богат арсенал от методи на теорията на числата и математическия анализ, които е приложил на практика за получаване на резултатите в неговата дисертация.

3. Научни приноси. В дисертацията се решават три задачи от аналитичната теория на числата. След първите две уводни глави в трета глава се доказва, че за всяко реално c между 1 и $29/28$ всяко достатъчно голямо цяло число N може да се представи във вида $[p^c] + [m^c]$, където p е просто, а m е произведение от прости множители, броят на които е ограничен в термините на c . Този резултат е получен съвместно с научния ръководител проф. дмн Дойчин Толев. В четвърта глава се доказва, че за c между 1 и $17/16$ всяко достатъчно голямо цяло число N може да се представи във вида $[p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c]$, където p_1, p_2 и p_3 са прости числа, а числата $p_1 + 2, p_2 + 2$ и $p_3 + 2$ са с брой на простите делители, отново ограничен в термините на c . Този резултат е получен самостоятелно от дисертанта. Последната пета глава на дисертацията се базира на съвместна статия с проф. Ангел Кумчев, български математик, работещ в САЩ. В нея се доказва съществуване на решения на неравенства от вида $|p_1^c + \dots + p_s^c - N| < (\log N)^{-1}$, където

p_i са прости числа на Пятецки-Шапиро. (Това са простите числа от вида $p = \left[m^{\frac{1}{v}} \right]$. Те са въведени от Пятецки-Шапиро през 1953 г.) Убеден съм, че получените в дисертацията резултати напълно удовлетворяват „научната“ страна на степента „доктор“.

4. Преценка на публикациите по дисертационния труд. Бройката и качеството на публикациите удовлетворяват изискванията, предявявани във ФМИ на СУ. По темата на дисертацията са публикувани три статии в списания, излезли през 2017 и 2018 г. Две от тях са съвместни – с научния ръководител в Трудовете на „Стеклоквата“ и с проф. Кумчев в Monatshefte fuer Mathematik, а третата самостоятелна статия е в Годишника на Софийския университет. Приемам, че в съвместните статии е налице равноправно участие на съавторите. Статията с научния ръководител е цитирана веднъж от уважаван чуждестранен математик. Освен това, резултатите от дисертацията са докладвани на редица семинари и конференции у нас и в чужбина.

5. Мнения, препоръки и бележки. Нямам съществени критични бележки и препоръки по дисертацията.

6. Авторефератът и справката за приносите (която се съдържа в увода на дисертацията и в описанието на резултатите в автореферата) са написани достатъчно подробно и дават ясна и адекватна представа за съдържанието и основните резултати на дисертацията.

Заключение. Представеният дисертационен труд е в класическа, но продължаваща да бъде актуална област на математиката. Той е на много високо образователно и научно ниво и удовлетворява всички изисквания, поставени пред един дисертационен труд в областта на математиката и нейните приложения. Препоръчвам на почитаемото Научно жури да присъди на ас. Живко Христов Петров образователната и научна степен „доктор“ в професионално направление 4.5. Математика, докторска програма „Математически анализ“.

София, 26 юни 2019 г.

Изготвил становището:

(акад. дмн В. Дренски)