РЕЦЕНЗИЯ

от доц. д-р Теменужка Пеневa Пенева – ПУ „Паисий Хилендарски“

на дисертационния труд на *ас. Живко Христов Петров*
„Върху някои диофантови уравнения и неравенства“,
представен за присъждане на образователната и научна степен „Доктор“
по област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика,
докторска програма „Математически анализ“

1. Общо описание на процедурата и представените материали

Със заповед № РД 38-255/30.05.2019 г. на Ректора на Софийския университет „Св. Климент Охридски“ (СУ), съгласно Решение на Факултетния съвет на Факултета по математика и информатика (Протокол № 6/21.05.2019 г.), съм определена за член на научното жури по процедура за защита на дисертационен труд на тема *„Върху някои диофантови уравнения и неравенства“* за придобиване на образователната и научна степен „Доктор“ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление 4.5. Математика; докторска програма „Математически анализ“. Автор на дисертационния труд е *ас. Живко Христов Петров* — докторант в задочна форма на обучение към катедра „Математически анализ“ на Факултета по математика и информатика (ФМИ) при СУ, с научен ръководител проф. д.м.н. Дойчин Толев.

Във връзка с процедурата ми бяха предоставени: *на хартиен носител* – дисертационен труд и автореферат на дисертационния труд; *на електронен носител* – по-горе изброените плюс 3 броя публикации по темата на дисертационния труд и автобиография на докторанта.

2. Кратки биографични данни за докторанта

Живко Петров завършва средното си образование през 2008 г. в ПМГ „Гео Милев“ – гр. Стара Загора, профил „Математика и информатика с английийски език“. През 2012 г. получава бакалавърска степен в специалност „Компютърни науки“ на ФМИ при СУ, а през 2014 г. завършва магистратура по „Динамични системи и теория на числата“ в същия факултет. От 01.02.2016 г. е зачислен като докторант в задочна форма на обучение към катедра „Математически анализ“ на ФМИ при СУ с научен ръководител проф. д.м.н. Дойчин Толев.

Още като студент в IV курс Живко Петров става хоноруван асистент в катедра „Математически анализ“ на ФМИ при СУ, а през 2014 г. е назначен и за асистент в същата катедра.

3. Актуалност на тематиката

Диофантовите уравнения и неравенства вероятно са сред най-популярните примери за математически проблеми, които са много лесни за формулиране, но трудни за решаване и чието решение понякога може да отнеме стотици години.

Такива проблеми са например известните бинарна и тернарна хипотези на Голдбах, формулирани още през 1742 г. Тернарната хипотеза, която гласи, че всяко нечетно число, по-голямо или равно на 7, е сума на три прости числа, бе напълно доказана едва през 2014 г. А бинарната хипотеза, в която се твърди, че всяко четно число, по-голямо или равно на 4, може да се представи като сума на две прости числа, остава нерешена и до днес. Такава съдба има и друг, известен още от древността проблем – проблемът за простите числа близнаци. Той гласи, че съществуват безброй много прости числа p, за които $p+2$ също е просто число. Все пак има доказани резултати, които в известен смисъл могат да се разглеждат като приближения на горните нерешени хипотези. Например през 1973 г. Чен доказва с помощта на методите на решетото, че всяко достатъчно голямо четно число може да се представи като сума на едно просто число и едно почти просто число от ред 2, както и че съществуват безброй много прости числа p, такива че $p+2$ е почти просто число от ред 2. Както обикновено, казваме, че едно число е почти просто от ред r, ако има не повече от r прости делителя, броени с техните кратности; множеството от всички почти прости числа от ред r означаваме с $\mathcal{P}_r$.

Следващите два проблема също имат дълга история. През 1770 г. Лагранж успява да докаже, че всяко естествено число може да се представи като сума на четири квадрата на цели числа – проблем, който за първи път е формулиран от Клод Баше през 1621 г., но е бил известен още на Диофант. Също през 1770 г. Варинг разглежда обобщение на теоремата за четирите квадрата. Той предполага, че за всяко цяло число $k \geq 2$ съществува естествено число $n = n(k)$, такова че всяко естествено число N може да се представи във вида

$$N = x_1^k + \cdots + x_n^k, \tag{1}$$

където $x_1, \ldots, x_n$ са естествени числа. Пълно доказателство на това твърдение е намерено едва през 1909 г. от Хилберт. Задачата, в която се търсят решения на уравнението (1), но в прости числа, е известна като проблем на Варинг-Голдбах и е разгледана за първи път от Виноградов и Хуа през 40-те години на XX век.

През последните години методите на решетото дадоха нов тласък в изучаването на класически проблеми от теорията на числата, които все още не могат да бъдат решени в прости числа. Например хипотезата, че всяко достатъчно голямо число $N \equiv 4 \pmod{24}$ може да се представи като сума на четири квадрата на прости числа, е все още недоказана, но през 2017 г. Цан и Жао показват, че всяко всяко такова число може се представи във вида $N = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, където всяко $x_i \in \mathcal{P}_4$.

При други проблеми пък започват да се налагат допълнителни ограничения върху някои от променливите и по този начин се стига и до комбинации на проблемите. Ще спомена само няколко важни резултата. През 2009 г. Жоу установява, че за всяко $k \geq 3$ съществуват безброй много аритметични прогресии от прости числа $p_1, \ldots, p_k$, такива че $p_1 + 2, \ldots, p_k + 2 \in \mathcal{P}_2$. Също през 2009 г. Цай и Лу доказват, че ако $N \equiv 5 \pmod{24}$ е достатъчно голямо естествено число, то съществуват безброй много решения на уравнението $p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2 = N$ в прости числа p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, за които $p_1+2,\ p_2+2 \in \mathcal{P}_2$, $p_3+2,\ p_4+2 \in \mathcal{P}_4$, $p_5+2 \in \mathcal{P}_5$. През 2015 г. Матомаки и Шао показват, че за всяко достатъчно голямо число $N \equiv 3 \pmod{6}$ съществуват безброй много тройки прости числа p_1, p_2, p_3, които са решения на уравнението $p_1+p_2+p_3 = N$ и за които $p_1 + 2,\ p_2 + 2,\ p_3 + 2 \in \mathcal{P}_2$.

Както се вижда от изложените примери, а и от дискусията в следващата точка, тематиката на дисертационния труд, поставените в него проблеми и избраните за решаването им методи са много актуални и по тях работят интензивно много математици.

4. Съдържателен анализ на дисертационния труд и приноси на докторанта

Дисертационният труд на Живко Петров е изложен на 93 страници и се състои от пет глави и библиография. Библиографията включва 88 заглавия (64 на английски, 12 на руски, 4 на френски, 2 на немски, 1 на италиански и 5 на български език), като всички те са подходящо цитирани в текста. От тези 88 заглавия, 77 са публикации в научни списания или доклади от научни конференции, а от тях 30 са публикувани след 2000 г. Всичко това показва, че дисертантът е запознат отлично с изследванията на разглежданите проблеми и е навлязъл дълбоко в тематиката.

Това впечатление се засилва още повече и от **Глава 1**. Тя е уводна и както обикновено първият й параграф съдържа дефиниции и означения за най-използваните понятия. Във втори параграф обаче е направен много подробен и добре организиран исторически преглед на възникването и изучаването на редица важни задачи от теорията на числата, който ни показва какво е мотивирало докторанта да изследва проблемите, предмет на тази дисертация. В края на параграфа ясно са формулирани основните резултати на дисертационния труд и са дискутирани някои от методите, използвани при тяхното получаване.

Глава 2 е помощна и има за цел да представи някои спомагателни резултати от областта на математическия анализ и теорията на числата, които са използвани при доказателството на основните теореми. Голям брой от твърденията са известни и техните доказателства са пропуснати, като са посочени източници, в които те могат да бъдат намерени, или от които следват почти директно. За новите помощни твърдения са приведени и доказателства.

Основните приноси на дисертацията са включени в следващите три глави, като всяка от тях се основава на една от представените публикации. Изложението в тези глави има ясна и логична вътрешна структура, която подпомага читателя в разбирането на доказателствата: 1) формулировка на основната теорема; 2) начало на доказателството, в което са въведени още специфични означения и понятия, направена е аналитична интерпретация на проблема и са поставени някои подзадачи; 4) доказателство на поставените подзадачи; 5) завършване на доказателството. В глава 5 е добавен и още един параграф с леми, неоходими за доказателството на основните теореми.

Глава 3 е посветена на едно диофантово уравнение, което може да се разглежда като модерна интерпретация на уравнението (1) от проблема на Варинг в случая, когато $n = 2$ и степента k е нецяло число, по-голямо от 1.

През 1974 г. Дезуйе доказва, че ако $1 < c < 4/3$, то за всяко достатъчно голямо естествено число N уравнението

$$[m_1^c] + [m_2^c] = N$$

има решение в естествени числа m_1 и m_2 ($[t]$ означава цялата част на t). По-късно интервалът за c е удължаван неколкократно, като най-добрият резултат към момента, $1 < c < 3/2$, е получен от Конягин през 2003 г.

Естествен е въпросът дали аналогичен резултат ще бъде в сила, ако m_1 и m_2 се ограничат до множеството на простите числа. Засега този проблем е извън възможностите на съвременните методи и вероятно трудността му е съизмерима с тази на бинарната хипотеза на Голдбах. Въпреки това, през 2017 г. Кумчев доказва, че ако $1 < c < 17/16$, то за всяко достатъчно голямо естествено число N уравнението

$$[p^c] + [m^c] = N \tag{2}$$

има решение за просто число p и естествено число m.

В дискутираната глава на дисертацията докторантът успява да наложи и допълнително мултипликативно условие върху числото m. Той доказва (Теорема 3.1.1), че ако $1 < c < 29/28$, то за всяко достатъчно голямо N уравнението (2) има решение за просто число p и почти просто число m с не повече от $\left[\frac{52}{29-28c}\right] + 1$ прости делителя. Ще отбележим, че числото $\left[\frac{52}{29-28c}\right] + 1$ е равно на 53, ако c е близко до 1, и е голямо, ако c е близко до 29/28.

Доказателството започва с използване на метода на линейното решето (Лема 2.4.1), което води до оценка на експоненциална сума, съдържаща в експонентата си $[p^c]$. След това докторантът прилага лемата на Виноградов (Лема 2.5.3) с подходящи параметри и конструира гладките функции $g_z(t)$ в (3.33). Техният оригинален избор позволява гореспоменатата експоненциална сума да бъде записана като линейна комбинация от подобни суми, които обаче имат в експонентата си гладка функция. За оценка на тези нови суми е използвано тъждеството на Вон, което води до експоненциални суми от първи и втори тип. Техниката за оценяване на тези суми може и да се смята за „стандартна“, но тя поставя много технически предизвикателства и изисква прецизни аргументи, за да се стигне до успешно прилагане на теоремата на Ван-дер-Корпут (Лема 2.2.5) с $k = 2$ или $k = 3$. Именно оценките на сумите от втори тип (по-специално на сумата $\Omega_{4,4}$) определят горната граница 29/28 на интервала за c, в който е валидна теоремата, както и броя на делителите на числото m в (2).

Резултатите са публикувани в [70].

В **Глава 4** е разгледано друго диофантово уравнение, което се явява аналог на проблема на Варинг-Голдбах в случая, когато $n = 3$ и k е нецяло число, по-голямо от 1. Доказано е (Теорема 4.1.1), че ако $1 < c < 17/16$, то за всяко достатъчно голямо естествено число N, уравнението

$$[p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] = N \tag{3}$$

има решение в прости числа p_1, p_2, p_3, такива че всяко от числата p_1+2, p_2+2, p_3+2 има не повече от $\left[\frac{95}{17-16c}\right]$ прости делителя, броени с техните кратности. Очевидно $\left[\frac{95}{17-16c}\right]$ е равно на 95, когато c е близко до 1, и е голямо, когато c е близко до 17/16.

Съществуването на решения на уравнението (3) в прости числа за първи път е доказано от Толев и Лапорта през 1995 г., при условие че $1 < c < 17/16$. През 2017 г. Толев разглежда и аналогичния проблем за диофантовото неравенство

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < (\log N)^{-E} \tag{4}$$

и доказва, че ако $1 < c < 15/14$ и $E > 0$ е произволно голяма константа, то за всяко достатъчно голямо реално число N, горното неравенство има решения в прости числа p_1, p_2, p_3, такива че всяко от числата p_1+2, p_2+2, p_3+2 е почти просто с най-много $\left[\frac{369}{180-168c}\right]$ прости делителя.

В доказателството на своята теорема докторантът комбинира идеи от доказателствата на горните два резултата, като успешно преодолява затрудненията, произлизащи от хибридния характер на проблема. В началото е приложен методът на векторното решето, позволяващ отсяване на вектори, всички компоненти на които са почти прости числа. Следва методът на Девънпорт-Хайлброн, който се явява опростен вариант на кръговия метод на Харди-Литлууд, защото при него се стига до оценяване на интеграли само по една голяма и две малки дъги. Тук намират приложение две важни твърдения от статията на Толев (2017), формулирани в настоящата глава като Лема 4.2.1 (асимптотична формула за величината $\overline{L}(\alpha)$, използвана за отделяне на главния член в интегралите по голямата дъга) и Лема 4.2.4 (оценка на експоненциалните суми, които възникват при интегралите върху малките дъги). Самостоятелен интерес представляват оценките на интегралите в Лема 4.2.2 и Лема 4.2.3.

Резултатите са публикувани в [69].

Глава 5 е посветена на друг аналог на проблема на Варинг-Голдбах – съществуването на решения в прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ на диофантовото неравенство

$$|p_1^c + p_2^c + \cdots + p_n^c - N| < \varepsilon, \tag{5}$$

когато $c > 1$ е нецяло число, N е достатъчно голямо реално число и $\varepsilon > 0$ е фиксирано произволно малко число. Този проблем за първи път е разгледан през 1952 г. от Пятецкий-Шапиро, който намира оценка за величината $H(c)$, дефинирана като най-малкото число n, такова че неравенството (5) има решение за всички достатъчно големи N. Приблизително по същото време Пятецкий-Шапиро задава въпроса дали съществуват безброй много прости числа в редицата

$$\mathcal{N}_\gamma = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n = [m^{1/\gamma}] \text{ за някое } m \in \mathbb{N}\}.$$

Той доказва, че ако с $\pi_\gamma(N)$ означим броя на простите числа $p \leq N$, които са от вида $\mathcal{N}_\gamma$ (тях наричаме прости числа на Пятецкий-Шапиро с индекс γ), то е в сила асимптотичната формула $\pi_\gamma(N) \sim N^\gamma / \log N$, при условие че $11/12 < \gamma < 1$. През годините многократно е разширяван интервалът за γ, в който $\pi_\gamma(N) \to \infty$. Най-добрият такъв резултат към момента, $205/243 < \gamma < 1$, е получен през 2001 г. от Риват и Уу. Освен това много математици започват да търсят решения на класически адитивни задачи в прости числа на Пятецкий-Шапиро. Например през 1992 г. Балог и Фридлендър доказват, че ако $20/21 < \gamma < 1$, то за всички достатъчно големи нечетни числа N уравнението $p_1 + p_2 + p_3 = N$ има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{N}_\gamma$.

В разглежданата глава на дисертацията основно място заема Теорема 5.1.1. Тя гласи, че ако $c > 5$ е нецяло число, $1 - \rho < \gamma < 1$, където $\rho = (8c^2 + 12c + 12)^{-1}$, $n \geq 4c \log c + \frac{4}{3}c + 10$ и N е достатъчно голямо реално число, то неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + \cdots + p_n^c - N| < (\log N)^{-1} \tag{6}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathcal{N}_\gamma$.

Следващите три теореми са посветени на варианти на неравенството (6), съответно с $n = 3$, 4 и 2, при условие че γ и c са близки до 1.

Теорема 5.1.2 гласи, че ако $\gamma < 1 < c$ и $15(c-1) + 28(1-\gamma) < 1$, то при достатъчно големи реални числа N неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < (\log N)^{-1}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{N}_\gamma$.

В Теорема 5.1.3 се твърди, че ако $\gamma < 1 < c$ и $8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1$, то при достатъчно големи реални числа N неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c + p_4^c - N| < (\log N)^{-1}$$

има решение в прости числа p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \mathcal{N}_\gamma$.

И накрая, в Теорема 5.1.4 имаме, че ако $\gamma < 1 < c$ и $8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1$, а за големи числа Z с $\mathcal{E}(Z)$ е означено множеството от числата $N \in (Z/2, Z]$, за които неравенството

$$|p_1^c + p_2^c - N| < (\log N)^{-1}$$

няма решение в прости числа p_1, $p_2 \in \mathcal{N}_\gamma$, то лебеговата мярка на множеството $\mathcal{E}(Z)$ е $O(Z \exp(-(\log Z)^{1/4}))$.

Преди да коментирам доказателствата на теоремите, трябва да подчертая, че те зависят до голяма степен от получените оценки на експоненциални суми във втори параграф на главата. Този параграф може да се разглежда като бързо въведение в методите за оценка на експоненциални суми. Използвани са разнообразни средства – тъждеството на Вон, тъждеството на Хийт-Браун, методът на Ван-дер-Корпут. (Неслучайно докторантът и неговият съавтор подчертават в [59], че е възможно подобрение на получените резултати при по-внимателно оценяване на експоненциалните суми, макар и не достатъчно голямо, че да си заслужава усилията.)

Доказателството на Теорема 5.1.1 започва с приложение на варианта на Девънпорт-Хайлброн на кръговия метод, с чиято помощ се броят решенията на неравенството (6) в прости числа на Пятецкий-Шапиро, лежащи в подходящи интервали с намаляваща дължина. Резултат на Брудерн и Кумчев (2001) от анализа на Фурие е използван, за да се конструира ядрото $K(x)$ и проблемът да се интерпретира аналитично като оценка отдолу на интеграла за $R(N)$ в (5.36). Този интеграл се представя като сума на 5 интеграла, съответно върху една голяма дъга, две малки дъги и два безкрайни интервала (тривиална област), като неизбежно тяхната оценка се свежда до някоя от лемите за оценка на експенциални суми във втори параграф. Интерес представлява фактът, че при интеграла по малките дъги се стига до оценяване броя на решенията в естествени числа на други диофантови неравенства, които обаче имат по-малко на брой променливи.

Доказателствата на Теореми 5.1.2 и 5.1.3 са аналогични на това на Теорема 5.1.1. Теорема 5.1.4 е доказана, като се следва схемата на доказателството на Теорема 5.1.3, но е използвано равенството на Планшерел (Лема 2.1.3) и някои поточкови оценки са заменени от усреднени оценки за квадрати на експоненциални суми.

Резултатите са публикувани в [59].

5. Преценка на публикациите по дисертационния труд

Публикациите по темата на дисертационния труд са три на брой – една от тях е самостоятелна и е публикувана в Годишника на СУ през 2017 г., а другите две са съвместни и са публикувани в реномирани международни издания. Статията, на която е съавтор научният ръководител Дойчин Толев, е публикувана през 2017 г. в Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (IF 0.623/Q3, SJR 0.43/Q2), а статията със съавтор Ангел Кумчев от Towson University, САЩ, е публикувана през 2018 г. в Monatshefte für Mathematik (IF 0.807/Q2, SJR 0.701/Q2). Приемам, че приносът на авторите в съвместните статии е равностоен.

Тъй като всички публикации са в рецензирани списания, то с тях се удовлетворяват изискванията на *Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности във ФМИ на СУ* за поне две публикации в рецензирани издания, поне едно от които да бъде списание.

Считам, че представените публикации съдържат оригинални резултати със значителна научна стойност и са на много високо научно ниво. Тяхната важност и актуалност се потвърждава и от факта, че статията *On an equation involving fractional powers with one prime and one almost prime variables*, Proc. Steklov Inst. Math., 298 (2017), Suppl. 1, 38–56, със съавтор Дойчин Толев, вече е цитирана в публикация в реномираното списание Acta Arithmetica (IF 0.476/Q4, SJR 0.68/Q2). Не са забелязани цитирания на останалите две статии, но като се има предвид, че са публикувани съвсем наскоро, може да се очаква, че в бъдеще и те ще привлекат вниманието на математиците, работещи в тази област.

В периода 2016–2018 г. Живко Петров изнася доклади на 7 научни форума, като един от тях е престижната европейска конференция по теория на числата Journées Arithmétiques (Франция).

6. Критични бележки и препоръки

Нямам съществени критични бележки. Неизбежните неточности от редакционен характер са малобройни и се преодоляват без усилие.

7. Автореферат

Авторефератът, заедно с библиографията, се състои от 20 страници и пълно и точно отразява съдържанието и приносите на дисертацията. Включва история и възникване на разглежданите проблеми; кратко описание на структурата на дисертацията и ясна формулировка на доказаните нови резултати; списък на публикациите във връзка с дисертацията; списък на забелязаните цитирания; списък на научните форуми, на които са докладвани резултатите от дисертацията; библиография.

Заключение

След подробното ми запознаване с дисертационния труд на Живко Петров, аз съм убедена в задълбочените му теоретични знания, в способността му да формулира нови проблеми и да прави самостоятелни научни изследвания. Оценката ми за дисертационния труд, автореферата, научните публикации и приносите на докторанта е положителна. Представеният дисертационен труд е съобразен с изискванията, условията и критериите, установени според *Закона за развитие на академичния състав в Република България* и *Правилника за прилагането му*, както и *Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности на СУ и на ФМИ на СУ*.

Горните съображения ми дават основание да предложа на почитаемото Научно жури да присъди на Живко Христов Петров образователната и научна степен „доктор“ в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма „Математически анализ“.

26.06.2019 г. Рецензент: ....

(доц. д-р Т. Пенева)