Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

Живко Христов Петров

Върху някои диофантови уравнения и неравенства

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертация за присъждане на образователна и научна степен „доктор“ по професионално направление 4.5 „Математика“, докторска програма „Математически анализ“

Научен ръководител
проф. д.м.н. Дойчин Толев

София, 2019

Дисертацията съдържа 93 страници и се състои от 5 глави и Литература. Цитирани са 88 заглавия.

Дисертантът работи като асистент към катедра „Математически Анализ“ на ФМИ, СУ „Св. Кл. Охридски“.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... от ...... часа в аудитория....... на ФМИ, СУ „Св. Кл. Охридски“, бул. „Дж. Баучер“ 5, 1164 София.

Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в катедрената зала (211) на катедра „Математически Анализ“ на ФМИ, СУ.

История и възникване на разглежданите задачи в дисертационния труд

През 1742 г. в кореспонденция между Голдбах и Ойлер възникват следните хипотези:

Хипотеза 1. *(Бинарна хипотеза) Всяко четно число по-голямо от* 2 *може да се представи като сума на две прости числа.*

Хипотеза 2. *(Тернарна хипотеза) Всяко нечетно число по-голямо от* 5 *може да се представи като сума на три прости числа.*

Бинарната хипотеза към настоящия момент не е доказана (или опровергана). Въпреки това има установени голям брой резултати, които в известен смисъл се приближават към нея. Например през 1919 г. Брун [21] доказва следната

Теорема 3. *Всяко достатъчно голямо четно число може да се представи като сума от две почти прости числа*[1] *от ред 9.*

Най-добрият резултат в тази насока е получен през 1973 г. от Чен [29]. Той доказва

Теорема 4. *Всяко достатъчно голямо четно число може да се представи като сума от едно просто и едно почти просто число от ред* 2.

В доказателствата на теоремите си Брун и Чен използват методи на решетото. Тези методи се състоят в това, от дадена редица от естествени числа да се „отсяват“ елементи със зададени свойства (например почти прости числа). Още в древността Ератостен е използвал решето за намиране на простите числа, ненадминаващи дадена константа. През миналия век много математици успяват да намерят по-усъвършенствани методи на решето (1919 г. Брун [21], 1950 г. Селберг [71], [72] и други). През 1977 г. Иваниец [53] създава векторното решето. Това е метод, с помощта на който от дадена редица от крайномерни вектори с целочислени координати се отсяват вектори, координатите на които са почти прости числа от зададен ред. След това този метод е прилаган от много автори към различни задачи от теория на числата (виж например [22], [23], [44], [73], [74]).

От друга страна, тернарната хипотеза вече е доказана. През 1937 г. И. М. Виноградов [4] доказва, че съществува константа N_0, такава че всяко нечетно число $N \geq N_0$ може да се представи като сума на три прости числа. Чрез метода на Виноградов може да се изчисли ефективно константата N_0, но тя е много голяма. Впоследствие стойността на N_0 е намалявана многократно и последната стъпка е направена от Хелфгот [47] през 2014 г. Той използва нови методи и с тяхна помощ установява, че N_0 може да се вземе равна на 10^{27}. За числата по-малки от 10^{27}, проверката се извършва с компютър, с което тернарната хипотеза на Голдбах вече е напълно доказана.

Друг известен проблем в теория на числата е хипотезата за простите числа близнаци:

[1] Казваме, че естественото число n е почти просто от ред r, ако n има не повече от r на брой прости множители, броени с техните кратности. Множеството от почти простите числа от ред r означаваме с $\mathcal{P}_r$.

Хипотеза 5. *Ако p_n е $n-$тото просто число, то $p_{n+1}-p_n = 2$ за безбройно много n.*

Тази хипотеза не е доказана, но има редица резултати, приближаващи се до нея. Например Чен [29] доказва следната

Теорема 6. *Съществуват безбройно много прости числа p, такива че $p+2$ е почти просто от ред 2.*

През 2013 г. Джанг [85] установява, че съществуват безбройно много съседни прости числа, такива че разликата им се ограничава от константа. Джанг доказва следната

Теорема 7. *Съществува константа $c > 0$, такава че $p_{n+1} - p_n \leq c$ за безбройно много n.*

В работата си Джанг показва, че такава константа е $c = 7.10^7$. Следват поредица от подобрения на този резултат, които оптимизират работата на Джанг. Значителен напредък в това направление е направен от Мейнард [65] и Тао (в неговия блог[2]) през 2013 г. Независимо един от друг, те доказват горното твърдение при $c = 600$, като при това методът им до голяма степен е елементарен.

Теорема 8. *(Мейнард-Тао) Съществуват безбройно много n, такива че*

$$p_{n+1} - p_n \leq 600.$$

Чрез метода на Мейнард и Тао може да се докаже не само съществуването на безбройно много двойки прости числа в интервали с ограничена дължина, но и при произволно $m \in \mathbb{N}$ съществуването на безбройно много m-орки от прости числа в интервали с ограничена дължина. По-конкретно, те доказват следната

Теорема 9. *(Мейнард-Тао) Нека е дадено произволно $m \in \mathbb{N}$. Съществува константа $C > 0$, такава че за безбройно много $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$p_{n+m} - p_n < Cm^3e^{4m}.$$

Доказателството на този резултат е дадено в статията [65] на Мейнард.

Подробно доказателство на тази теорема може да се намери също в Глава 22 от [17].

През 2014 г. колективът от математици *Polymath* публикува статия [68], в която са изложени резултати, подобряващи тези на Мейнард-Тао. Те доказват

Теорема 10. *(Polymath) Съществуват безбройно много $n \in \mathbb{N}$, такива че*

$$p_{n+1} - p_n \leq 246.$$

Теорема 11. *(Polymath) Нека е дадено произволно $m \in \mathbb{N}$. Съществува константа $C > 0$, такава че за безбройно много $n \in \mathbb{N}$ имаме*

$$p_{n+m} - p_n < Cme^{\left(4-\frac{52}{283}\right)m}.$$

[2] Виж страницата http://terrytao.wordpress.com/

През 1770 г. Лагранж доказва, че за всяко естествено число N, уравнението

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N \tag{1}$$

има решение в цели числа.

През 1834 г. Якоби намира точна формула за броя на решенията на уравнението (1) в цели числа. По-точно, той доказва, че този брой е равен на

$$8 \sum_{\substack{d|N \\ d \not\equiv 0 \pmod 4}} d.$$

През 1770 г. Варинг разглежда обобщение на теоремата на Лагранж за четирите квадрата. Той изказва хипотезата, че за всяко цяло $k \geq 2$ може да се намери $n = n(k)$, такова че за всяко естествено число N, уравнението

$$x_1^k + \cdots + x_n^k = N \tag{2}$$

има решение в неотрицателни цели числа $x_1, \ldots, x_n$.

Пълно доказателство на това твърдение е намерено едва през 1909 г. от Хилберт [48]. По-късно Харди и Литлууд в поредица от статии „Partitio Numerorum“ от 1919–1925 г.([36] - [41]) предлагат нов метод за доказване на разрешимост на диофантови уравнения. Техният метод е известен като кръгов метод и е наречен по-късно метод на Харди-Литлууд (подробно описание на метода може да се намери например в монографията на Вон [79]). Чрез техния метод те намират по-просто решение на задачата на Варинг. През 1943 г. Линник [63] намира и елементарно решение на проблема на Варинг.

Интересен е въпросът за оценяването на функцията $G(k)$, която е дефинирана като най-малкото n, такова че уравнението (2) има решение в естествени числа при достатъчно големи N. Тази функция е въведена от Харди и Литлууд, които получават оценката

$$G(k) \leq (k-2)2^{k-1} + 5.$$

През 1959 г. И. М. Виноградов [3], чрез направените от него подобрения на кръговия метод, успява да докаже, че

$$G(k) \leq 2k(\log k + O(\log\log k)).$$

През 1992 г. тази горна граница е подобрена от Вули [81], който доказва, че

$$G(k) \leq k(\log k + \log\log k + O(1)).$$

Тази оценка е най-добрата известна при големи стойности на k. Известни са също оценки на $G(k)$ при малки стойности на k. Например $G(3) \leq 7$ (Линник [62]), $G(4) = 16$ (Девънпорт [30]) и други.

През 40-те години на миналия век И. М. Виноградов [78] и Хуа [50] изучават проблема на Варинг с прости числа.

Въвеждаме следните означения. Нека $k \in \mathbb{N}$ и p е просто число[3]. Нека с $\theta = \theta(k,p)$ означим цялото неотрицателно число, такова че $p^\theta | k$ и $p^{\theta+1} \nmid k$. Дефинираме

$$\mu = \mu(k,p) = \begin{cases} \theta + 2 & \text{ако } p = 2,\ 2|k, \\ \theta + 1 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

и

$$K(k) = \prod_{(p-1)|k} p^\mu.$$

С $H(k)$ означаваме най-малкото естествено число n, такова че за всяко достатъчно голямо естествено число N, сравнимо с n по модул $K(k)$, уравнението

$$p_1^k + \cdots + p_n^k = N$$

има решение в прости числа $p_1, \ldots, p_n$. През 1938 г. Хуа [50] доказва, че

$$H(k) \leq 2^k + 1.$$

По-късно през 1965 г. Хуа [49] подобрява резултата и доказва, че за големи стойности на k е изпълнено

$$H(k) \leq k(4 \log k + 2 \log\log k + O(1)).$$

Използвайки неотдавнашни подобрения на теоремата на И. М. Виноградов за средните стойности (виж [82], [83]), Кумчев и Вули [59] доказват, че за големи стойности на k е изпълнено

$$H(k) \leq (4k-2)\log k - (2\log 2 - 1)k - 3.$$

Както при проблемите на Голдбах, при проблема на Варинг-Голдбах също може да се търси разрешимост в почти прости числа. Например Брюдерн и Фуври [22] доказват, че за всяко достатъчно голямо естествено число $N \equiv 4 \pmod{24}$ уравнението (1) има решение в числа $x_i \in \mathcal{P}_{34}$. Хийт-Браун и Толев [44] доказват, че при същите ограничения, уравнението (1) има решение при x_1 - просто и $x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{P}_{101}$. През 2010 г. Цай [26] подобрява резултата и доказва разрешимост при x_1 - просто и $x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{P}_{42}$.

Естествено възниква въпросът дали може да се разглежда аналог на проблема на Варинг, когато степента k в уравнението (2) е нецяло число.

Възможни са два варианта: В първия разглеждаме неравенството

$$|x_1^c + \cdots + x_n^c - N| < \varepsilon,$$

където $c > 1$ е нецяло число, $\varepsilon > 0$ е произволно малко и N е достатъчно голямо реално число. Сегал [14], [15] и други математици през 30-те години на миналия век установяват, че ако n е достатъчно голямо число, което зависи от c, то горното неравенство е разрешимо в естествени числа $x_1, \ldots, x_n$.

Другата възможност е да се разгледа уравнението

$$[x_1^c] + \cdots + [x_n^c] = N,$$

[3]Навсякъде в текста с буквата p означаваме просто число.

където $c > 1$ е нецяло число, N е достатъчно голямо естествено число и $[t]$ означава цялата част на t. През 70-те години на миналия век Дезуйе [31], Архипов и Житков [1] и други изследват горното уравнение и установяват, че ако n е достатъчно голямо число, което зависи от c, то горното уравнение притежава решение в естествени числа $x_1, \ldots, x_n$. Също така Дезуйе [32], Гриценко [5] и Конягин [9] разглеждат случая $n = 2$, т. е.

$$[x_1^c] + [x_2^c] = N. \tag{3}$$

През 1974 г. Дезуйе [32] доказва, че ако $1 < c < \frac{4}{3}$, то за всяко достатъчно голямо естествено число N, уравнението (3) има решение в естествени числа x_1 и x_2. По-късно резултатът е подобряван неколкократно, като най-силният резултат е получен от Конягин [9], който доказва, че уравнението (3) има решение в естествени числа x_1 и x_2 за $1 < c < \frac{3}{2}$ и N достатъчно голямо естествено число.

Както при аналогичните задачи свързани с проблема на Варинг, могат да се разгледат и аналози на проблема на Варинг-Голдбах.

През 1952 г. Пятецкий-Шапиро [11] разглежда неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + \cdots + p_n^c - N| < \varepsilon, \tag{4}$$

където $c > 1$, $c \notin \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ е фиксирано. Нека с $H(c)$ означим най-малкото n, такова че неравенството (4) има решение в прости числа за достатъчно голямо реално N. Пятецкий-Шапиро доказва, че

$$\limsup_{c \to \infty} \frac{H(c)}{c \log c} \leq 4.$$

Той също така установява, че $H(c) \leq 5$ при $1 < c < \frac{3}{2}$.

През 1992 г., Толев [75] доказва, че ако $1 < c < \frac{15}{14}$ и N е достатъчно голямо, то диофантовото неравенство

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < N^{1-15/(14c)} \log^9 N \tag{5}$$

има решение в прости числа p_1, p_2, p_3.

Направени са няколко подобрения на този резултат. Например, Кумчев [56], използвайки решетото на Харман [42], [43], доказва, че неравенство от вида (5) има решение в прости числа при $1 < c < \frac{61}{55}$. През 2014 г. Бейкър и Вайнгартнар [19] разширяват интервала за c до $1 < c < \frac{10}{9}$. Най-добрият резултат от този вид в момента принадлежи на Цай [25], който доказва резултата за $1 < c < \frac{43}{36}$.

През 1999 г. Лапорта разглежда неравенството (4) при $n = 2$ и доказва, че ако $1 < c < \frac{15}{14}$, Z е голямо реално число и $\varepsilon = Z^{1-15/(14c)} \log^8 Z$, то (4) има решение за $N \in (Z, 2Z] \setminus \mathcal{B}$, където $\mathcal{B}$ е подмножество на $(Z, 2Z]$ с лебегова мярка $\ll Z \exp\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{\log Z}{c}\right)^{1/5}\right)$ (което означава, че за почти всички $N \in (Z, 2Z]$ неравенството има решение в прости числа). Този резултат е подобрен от Кумчев и Лапорта [58] и по-късно от Цао и Жай [28].

Нека сега да разгледаме уравнението

$$[p_1^c] + \cdots + [p_n^c] = N,$$

където $c > 1$ е нецяло число, N е достатъчно голямо естествено число. Търсим решения в прости числа $p_1, \dots, p_n$.

През 1995 г., Лапорта и Толев [10] разглеждат уравнението

$$[p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] = N, \tag{6}$$

където $c \in \mathbb{R}$, $c > 1$ и $N \in \mathbb{N}$. Те показват, че ако $1 < c < \frac{17}{16}$ и N е достатъчно голямо цяло число, то уравнението (6) има решение в прости числа p_1, p_2, p_3.

Кумчев [55] доказва, че ако $1 < c < \frac{16}{15}$, то за всяко достатъчно голямо естествено число N уравнението

$$[p^c] + [m^c] = N \tag{7}$$

има решение за просто p и естествено число m.

От друга страна, от теоремата на Чен (Теорема 4) знаем, че всяко достатъчно голямо четно число може да се представи като сума от едно просто и едно почти просто число с не повече от два прости делителя. Имайки предвид този резултат, може да се предположи, че съществува константа c_0, такава че ако $1 < c < c_0$, то за всяко достатъчно голямо N уравнението (7) има решение за просто p и почти просто m с не повече от два прости делителя. Тази хипотеза не е доказана, но в дисертацията се изследва задача от този вид (виж Теорема 12).

Интерес в теория на числата представлява и решаването на адитивни задачи в редки множества. Множество от прости числа S се нарича рядко, ако

$$\sum_{\substack{p \le X \\ p \in S}} 1 = o(\pi(X)) \quad \text{при } X \to \infty,$$

където $\pi(X) = \sum_{p \le X} 1$.

Интересен пример за рядко множество от прости числа през 1953 г. дава Пятецкий-Шапиро [12]. Той разглежда редицата

$$\mathcal{N}_\gamma = \left\{ n \in \mathbb{N} : n = \left[m^{1/\gamma} \right] \text{ за някое } m \in \mathbb{N} \right\}, \tag{8}$$

и доказва, че при $11/12 < \gamma < 1$ е в сила следната асимптотична формула

$$\pi_\gamma(N) := \sum_{\substack{p \le N \\ p \in \mathcal{N}_\gamma}} 1 = \frac{N^\gamma}{\log N} \left(1 + O\left((\log N)^{-1} \right) \right).$$

Простите числа $p \in \mathcal{N}_\gamma$ наричаме прости числа на Пятецкий-Шапиро с индекс γ.

Долната граница за γ в резултата на Пятецкий-Шапиро е подобрявана многократно, като в настоящия момент най-силният резултат е за $205/243 < \gamma < 1$ и е получен от Риват и Ву [70] през 2001 г.

През 1986 г. Вирзинг [80], мотивиран от работа на Ердьош и Натансон [33], разглежда въпроса дали може да се намери рядко подмножество S на простите числа, такова че всяко достатъчно голямо нечетно естествено число да може да се представи като сума от три прости числа от S. Вирзинг доказва, че съществува такова множество със свойството

$$\sum_{\substack{p \le X \\ p \in S}} 1 \ll (X \log X)^{\frac{1}{3}}.$$

Този резултат се основава на вероятностен метод и множеството S не може да бъде явно конструирано.

Възниква въпросът дали различни адитивни задачи, свързани с прости числа, могат да бъдат решени в прости числа от редки множества. Получени са множество резултати, в които рядкото множество са простите числа на Пятецкий-Шапиро (виж например [18], [20], [54], [57], [61], [66], [84]). Един от най-интересните резултати от този вид е получен през 1992 г. от Балог и Фридлендър [20]. Те доказват, че ако $\frac{20}{21} < \gamma < 1$ и N е достатъчно голямо, то уравнението

$$p_1 + p_2 + p_3 = N \tag{9}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{N}_\gamma$.

Диофантови неравенства с прости числа от вида на Пятецкий-Шапиро са изследвани в настоящата дисертация – виж Теореми 15 – 18.

Друга възможност е да се разглеждат проблемите на Голдбах с допълнителни условия за някои от променливите. През 2000 г. Пенева [67] разглежда уравнението (9), където p_1, p_2, p_3 са прости числа и доказва, че ако N е достатъчно голямо и $N \equiv 3 \pmod 6$, то уравнението (9) има решение в прости числа, такива че

$$p_1 + 2 \in \mathcal{P}_5, \quad p_2 + 2 \in \mathcal{P}_5, \quad p_3 + 2 \in \mathcal{P}_8.$$

Този резултат е подобрен от Толев [73], Цай и Лу [27], а през 2015 г. Матомаки и Шао [64] успяват да докажат, че при същите условия за N уравнението (9) има решение в прости числа, удовлетворяващи

$$p_1 + 2 \in \mathcal{P}_2, \quad p_2 + 2 \in \mathcal{P}_2, \quad p_3 + 2 \in \mathcal{P}_2.$$

През 2017 г. Толев [76] доказва, че ако N е достатъчно голямо реално число, $E > 0$ е произволно голяма константа и $1 < c < \frac{15}{14}$, то неравенството

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < (\log N)^{-E}$$

има решение в прости числа p_1, p_2, p_3, такива че всяко от числата p_1+2, p_2+2, p_3+2 има не повече от $\left[\frac{369}{180-168c}\right]$ прости делители, броени с техните кратности.

Задача от този тип се разглежда и в настоящата дисертация (виж Теорема 13).

Съдържание на дисертацията

Дисертацията се състои от 5 глави.

Глава 1. Тази глава е уводна. В нея се дава кратко описание на историята и възникването на разглежданите задачи. В първия параграф са дефинирани основни означения. Във втория параграф са дадени исторически бележки и описание на задачите, предмет на настоящата дисертация.

Глава 2. В тази глава са формулирани основни леми, които са използвани при доказателствата на разгледаните проблеми. В първия параграф са дадени известни леми от анализа и теория на числата. Във втория са дадени леми за експоненциални суми и интеграли. В третия параграф са дадени леми за суми по прости числа. В четвъртия параграф са формулирани основни леми от теория на решетото. В последния пети параграф са дадени други необходими леми за доказване на основните резултати.

Глава 3. В глава 3 доказваме следния резултат:

Теорема 12. *Нека* $1 < c < \frac{29}{28}$. *Тогава всяко достатъчно голямо естествено число* N *може да се представи във вида*

$$[p^c] + [m^c] = N, \tag{10}$$

където p *е просто и* m *е почти просто с не повече от* $\left[\frac{52}{29-28c}\right] + 1$ *прости делители.*

В първия параграф формулираме резултата. Във втория параграф излагаме доказателството на теоремата. В параграф 2.1 дефинираме сумата

$$\Gamma = \sum_{\substack{P<p\le 2P,\, m\in\mathbb{N} \\ [p^c]+[m^c]=N \\ (m,B_z)=1}} \log p,$$

където

$$1 < c < \frac{29}{28}, \qquad \gamma = \frac{1}{c}, \qquad P = 10^{-9}N^{\gamma}, \qquad z = N^{\alpha}, \qquad B_z = \prod_{p<z} p$$

и където α е подходяща положителна константа. Показваме, че ако $\Gamma > 0$, то уравнението (10) има решение с просто p и почти просто m с не повече от $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]$ прости делителя. Доказваме, че

$$\Gamma \ge \Gamma_0 + \Sigma_0 - \Sigma_1,$$

където

$$\Gamma_0 \gg \frac{N^{2\gamma-1}}{\log N}$$

и

$$\Sigma_j = \sum_{d|B_z} \lambda(d) \sum_{P<p\le 2P} (\log p)\, \rho\left(-\frac{1}{d}(N + j - [p^c])^{\gamma}\right), \quad j = 0, 1,$$

Тук $\rho(t) = \frac{1}{2} - \{t\}$, а $\lambda(d)$ са функциите от решетото на Розер от ниво $D = N^{\delta}$, където $\delta > 0$ е подходяща константа. За тези функции знаем, че

$$|\lambda(d)| \le 1 \quad \text{за всяко } d\,; \qquad \lambda(d) = 0 \quad \text{ако} \quad d > D \quad \text{или} \quad \mu(d) = 0.$$

В параграф 2.2 разглеждаме сумите Σ_j. Свеждаме оценяването на тези суми към оценяване на суми от вида

$$W(v) = \sum_{P<p\le 2P} (\log p)\, e(v(N + j - [p^c])^{\gamma}).$$

Поради наличието на израза $[p^c]$ в експонентите в горната сума, директната оценка е трудна, затова ние ги разделяме на части в зависимост от стойността на дробната част на p^c. Така се появяват суми от вида

$$U = U(T, r, v) = \sum_{P<p\le 2P} (\log p)\, e(rp^c + v(T - p^c)^{\gamma}),$$

за които използваме тъждеството на Вон и намираме

$$U = U_1 - U_2 - U_3 - U_4 + O\left(P^{\frac{1}{2}}\right), \tag{11}$$

където

$$U_1 = \sum_{m \le P^{\frac{1}{3}}} \mu(m) \sum_{\frac{P}{m} < l \le \frac{2P}{m}} (\log l)\, e(r(ml)^c + v(T - (ml)^c)^\gamma),$$

$$U_2 = \sum_{m \le P^{\frac{1}{3}}} c(m) \sum_{\frac{P}{m} < l \le \frac{2P}{m}} e(r(ml)^c + v(T - (ml)^c)^\gamma),$$

$$U_3 = \sum_{P^{\frac{1}{3}} < m \le P^{\frac{2}{3}}} c(m) \sum_{\frac{P}{m} < l \le \frac{2P}{m}} e(r(ml)^c + v(T - (ml)^c)^\gamma),$$

$$U_4 = \sum\sum_{\substack{P < ml \le 2P \\ m > P^{\frac{1}{3}},\ l > P^{\frac{1}{3}}}} a(m)\, \Lambda(l)\, e(r(ml)^c + v(T - (ml)^c)^\gamma).$$

Тук $\tau(n)$ е броят на положителните делители на числото n, $\Lambda(n)$ е функцията на Манголд, $\mu(n)$ е функцията на Мьобиус, а за функциите $c(m)$ и $a(m)$ са изпълнени неравенствата

$$|c(m)| \le \log m \qquad \text{и} \qquad |a(m)| \le \tau(m).$$

Намираме

$$|\Sigma_1| + |\Sigma_2| \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{i=1}^{4} \Omega_i,$$

където

$$\Omega_i = \sum_{d \le D} \sum_{h \le H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \le R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U_i|.$$

В параграфи 2.3 и 2.4 доказваме, че

$$\Omega_i \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} \qquad \text{за} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{12}$$

и завършваме доказателството на Теорема 12.

Глава 4. В тази глава доказваме следната

Теорема 13. *Нека $1 < c < \frac{17}{16}$. Тогава за всяко достатъчно голямо естествено число N, уравнението*

$$[p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] = N \tag{13}$$

има решение в прости числа p_1, p_2, p_3, такива че всяко от числата $p_1 + 2$, $p_2 + 2$, $p_3 + 2$ има не повече от $\left[\frac{95}{17-16c}\right]$ прости делителя, броени с техните кратности.

За доказателството на тази теорема комбинираме идеи от работите на Лапорта и Толев [10] и на Толев [76]. Първо използваме вариант на векторното решето. След това прилагаме метода на Девънпорт–Хейлброн, който е вариант на кръговия метод на Харди–Литлууд.

В първия параграф от глава 4 формулираме твърдението. Във втория параграф доказваме теоремата. В параграф 2.1 разглеждаме сумата

$$\Gamma = \sum_{\substack{\mu X < p_1, p_2, p_3 \le X \\ [p_1^c] + [p_2^c] + [p_3^c] = N \\ (p_i + 2, P(z)) = 1,\ i = 1,2,3}} (\log p_1)(\log p_2)(\log p_3),$$

където

$$X = N^{\frac{1}{c}}, \qquad z = X^{\eta}, \qquad P(z) = \prod_{2<p<z} p,$$

а μ и η са подходящи положителни константи. Достатъчно е да установим, че при достатъчно големи X имаме $\Gamma > 0$, което доказва Теорема 13. За тази цел доказваме, че $\Gamma \geq 3(\Gamma_1' + \Gamma_1'') - 2(\Gamma_4' + \Gamma_4'')$, където

$$\Gamma_1' = \int\limits_{|\alpha|<\Delta} e(-N\alpha)L^-(\alpha)L^+(\alpha)^2 d\alpha,$$

$$\Gamma_4' = \int\limits_{|\alpha|<\Delta} e(-N\alpha)L^+(\alpha)^3 d\alpha,$$

$$\Gamma_1'' = \int\limits_{\Delta<|\alpha|<\frac{1}{2}} e(-N\alpha)L^-(\alpha)L^+(\alpha)^2 d\alpha,$$

$$\Gamma_4'' = \int\limits_{\Delta<|\alpha|<\frac{1}{2}} e(-N\alpha)L^+(\alpha)^3 d\alpha$$

и

$$L^{\pm}(\alpha) = \sum_{d|P(z)} \lambda^{\pm}(d) \sum_{\substack{\mu X<p\leq X \\ p+2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, d)}} (\log p) e(\alpha[p^c]),$$

а $\lambda^{\pm}(d)$ са функциите на Розер от ниво $D = X^{\delta}$ и $\delta > 0$ е подходяща константа.

В параграф 2.2 разглеждаме интегралите Γ_1' и Γ_4'. За $L^{\pm}(\alpha)$ използваме Лема 10 от [76], която гласи следното:

Лема 14. *Нека δ, ξ и μ са положителни реални числа, зависещи от c, такива че $\xi + 3\delta < \frac{12}{25}$, $2 < \frac{\delta}{\eta} < 3$ и $\mu < 1$. Нека също така $D = X^{\delta}$ и $\Delta = X^{\xi-c}$. Тогава ако*

$$I(\alpha) = \int\limits_{\mu X}^{X} e(\alpha t^c) dt,$$

то при $|\alpha| < \Delta$ за $L^{\pm}(\alpha)$, са изпълнени следните асимптотични формули

$$L^{\pm}(\alpha) = \sum_{d\leq D} \frac{\lambda(d)}{\varphi(d)} I(\alpha) + O(X(\log X)^{-A}),$$

където A е произволно голяма константа.

Нека

$$\mathcal{N}^{\pm} = \sum_{d|P(z)} \lambda^{\pm}(d) \frac{\omega(d)}{d}, \qquad B_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e(-N\alpha) I(\alpha)^3 d\alpha.$$

Доказваме, че са в сила следните асимптотични формули

$$\Gamma_1' = \mathcal{N}^-(\mathcal{N}^+)^2 B_1 + O(X^{3-c}(\log X)^{-4}),$$
$$\Gamma_4' = (\mathcal{N}^+)^3 B_1 + O(X^{3-c}(\log X)^{-4}).$$

В параграф 2.3 разглеждаме интегралите Γ_1'' и Γ_4'' и доказваме, че при

$$\xi = \frac{16c-5}{32}, \qquad \delta = \frac{17-16c}{32}$$

са изпълнени оценките $\Gamma_1'' \ll X^{3-c-\varepsilon}$ и $\Gamma_4'' \ll X^{3-c-\varepsilon}$. Стигаме до заключението, че

$$\Gamma \gg X^{3-c}(\log X)^{-3}.$$

Следователно $\Gamma > 0$ и оттук следва и верността на Теорема 13.

Глава 5. В тази глава доказваме следните твърдения:

Теорема 15. *Нека $c > 5$, $c \notin \mathbb{N}$ и $1-\rho < \gamma < 1$, където $\rho = (8c^2+12c+12)^{-1}$. Тогава ако $s \geq 4c\log c + \frac{4}{3}c + 10$ и N е достатъчно голямо, то неравенството*

$$|p_1^c + p_2^c + \cdots + p_s^c - N| < (\log N)^{-1} \tag{14}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_s \in \mathcal{N}_\gamma$, където $\mathcal{N}_\gamma$ е дефинирано в (8).

Теорема 16. *Нека $\gamma < 1 < c$ и $15(c-1) + 28(1-\gamma) < 1$. Тогава при достатъчно големи N, неравенството*

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c - N| < (\log N)^{-1}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{N}_\gamma$.

Теорема 17. *Нека $\gamma < 1 < c$ и $8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1$. Тогава при N достатъчно голямо, неравенството*

$$|p_1^c + p_2^c + p_3^c + p_4^c - N| < (\log N)^{-1}$$

има решение в прости числа $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{N}_\gamma$.

Теорема 18. *Нека $\gamma < 1 < c$ и $8(c-1) + 21(1-\gamma) < 1$. Тогава при големи Z, нека с $\mathcal{E}(Z)$ означим множеството от тези $N \in (Z/2, Z]$, за които неравенството*

$$|p_1^c + p_2^c - N| < (\log N)^{-1}$$

няма решение в прости числа $p_1, p_2 \in \mathcal{N}_\gamma$. Тогава, ако $|\mathcal{E}(Z)|$ означава лебеговата мярка на $\mathcal{E}(Z)$, то

$$|\mathcal{E}(Z)| \ll Z \exp\left(-\left(\frac{\log\left(\frac{2Z}{3}\right)}{c}\right)^{\frac{1}{4}}\right).$$

В първия параграф формулираме резултатите. Във втория параграф въвеждаме означения и доказваме помощни леми. В третия параграф доказваме Теорема 15. В параграф 3.1 въвеждаме параметрите $s = 2t + 2u + 1$, където $t = t(c), u = u(c) \in \mathbb{N}$ и за големи N, полагаме

$$X = N^{1/c}, \quad X_0 = (3u)^{-1}X, \quad X_1 = X, \quad X_j = \tfrac{1}{2}X_{j-1}^{1-1/c} \quad (2 \leq j \leq t).$$

Използваме варианта на кръговият метод на Девънпорт и Хейлброн за да броим решенията на (14) в прости числа $p_1, \dots, p_s$, удовлетворяващи условията

$$p_1, \dots, p_{2u+1} \in \mathcal{N}_\gamma(X_0), \qquad p_{2u+2j}, p_{2u+2j+1} \in \mathcal{N}_\gamma(X_j)\ (1 \le j \le t). \tag{15}$$

Разглеждаме следната сума

$$R(N) = \sum_{\substack{p_1,\dots,p_s \\ (15)}} \left\{ \prod_{j=1}^{s} (\log p_j) \right\} K((\log N)(p_1^c + \cdots + p_s^c - N)),$$

където $K(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ е фиксирано ядро такова, че

$$\widehat{K}(t) \ge 0, \qquad \tfrac{1}{4}\mathbf{1}_I(4x) \le K(x) \le \mathbf{1}_I(x).$$

(тук $\mathbf{1}_I(x)$ е 1 ако $x \in [-1, 1]$ и 0 в противен случай). От формулата на Фурие за обръщане имаме

$$R(N) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\theta) e(-N\theta) \widehat{K}((\log N)\theta) d\theta,$$

където

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{S}(\theta; X_0)^{2u+1} S(\theta; X_1)^2 \cdots S(\theta; X_t)^2,$$
$$S(\theta; X) = \sum_{\substack{X/2 < p \le X \\ p \in \mathcal{N}_\gamma}} (\log p) e(\theta p^c).$$

Разделяме интегрирането в $R(N)$ на части:

$$\begin{aligned} \text{Тривиален регион:} \quad & |\theta| \ge X^\delta. \\ \text{Малки дъги:} \quad & \mathfrak{m} = \left\{\theta : X^{\gamma - c - \delta} \le |\theta| \le X^\delta\right\}. \\ \text{Голяма дъга:} \quad & \mathfrak{M} = (-X^{\gamma - c - \delta}, X^{\gamma - c - \delta}), \end{aligned}$$

където $\delta = \delta(c, \gamma) > 0$ е достатъчно малко фиксирано число. Означаваме $T = (\log N)^{-1}(X_1^2 \cdots X_t^2 X^{2u+1})^\gamma X^{-c}$. В параграфи 3.2, 3.3 и 3.4 доказваме съответно, че

$$\int\limits_{|\theta| \ge X^\delta} \left|\mathcal{F}(\theta)\right| \widehat{K}((\log N)\theta)\, d\theta \ll T X^{-1},$$
$$\int\limits_{\mathfrak{m}} \left|\mathcal{F}(\theta)\right| \widehat{K}((\log N)\theta)\, d\theta \ll T X^{-\delta},$$
$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \mathcal{F}(\theta) e(-N\theta) \widehat{K}((\log N)\theta)\, d\theta \gg T.$$

Оттук следва, че

$$R(N) \gg T.$$

В четвъртия параграф доказваме Теорема 16 и Теорема 17. Доказателствата на тези теореми са аналогични на доказателството на Теорема 15. В петия параграф доказваме Теорема 18, като за целта използваме равенството на Планшерел и оценки получени в доказателството на Теорема 16 и Теорема 17.

Публикации във връзка с дисертацията

1. Zh. Petrov, D. Tolev, *On an equation involving fractional powers with one prime and one almost prime variables*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 298, 24, (2017), 38–56.

2. Zh. Petrov, *On an equation involving fractional powers with prime numbers of a special type*, Annual of Sofia University, 104, (2017), 171–183.

3. A. Kumchev, Zh. Petrov, *A hybrid of two theorems of Piatetski-Shapiro*, Monatshefte für Mathematik, (2018), 1–22. https://doi.org/10.1007/s00605-018-1217-4

Цитирания
Първата статия е цитирана в

- W. Zhu, *Representation of integers as sum of fractional powers of primes and powers of 2*, Acta Arithmetica, 181, 2, (2017), 185-196.

Апробация на резултатите
Резултатите от дисертацията са докладвани от автора на дисертацията на следните научни форуми:

1. Пролетна научна сесия на катедра „Математически Анализ“ ФМИ, София, 2016, доклад на тема „Върху едно диофантово уравнение с едно просто и едно почти просто неизвестни“.

2. Отчетна сесия на секция „Алгебра и Логика“ в ИМИ БАН, София, 2016, доклад на тема „Върху едно диофантово уравнение“.

3. Пролетна научна сесия на катедра „Математически Анализ“ ФМИ, София, 2017, доклад на тема „Върху едно уравнение с прости числа от специален вид“.

4. Journees Atithmetiques, Франция, 2017, доклад на тема „On an equation involving fractional powers with one prime and one almost prime variables“.

5. Пролетна научна сесия на катедра „Математически Анализ“ ФМИ, София, 2018, доклад на тема „Едно диофантово неравенство с прости числа на Пятецкий-Шапиро“.

6. Семинар „Динамични системи и теория на числата“, ФМИ, София, 2017, 2018.

Благодарности

Благодаря на научния си ръководител - проф. д.м.н. Дойчин Толев за това, че ме въведе в тази област на математиката. Благодаря за предложените интересни задачи, както и за напътствията и подкрепата при създаването на този дисертационен труд.

Изключително съм благодарен и на проф. А. Кумчев и гл. ас. д-р Т. Тодорова.

Бих искал да изкажа и благодарността си към всички колеги от катедра „Математически Анализ“ на ФМИ, СУ.

Библиография

[1] Архипов Г. И., Житков А. Н., *Теорема Варинга с нецелым показателем*, Изв. АН СССР, Сер. Матем., 48 (1984), 1138–1150.

[2] Буриев К., *Аддитивные задачи с простыми числами*, Дис. канд. физ.-матем. наук. М. МГУ, (1989).

[3] Виноградов И. М., *К вопросу о верхней границе для* $G(n)$, Изв. АН СССР. Сер. матем., 23, (2) (1959), 637–642.

[4] Виноградов И. М., *Представление нечетного сила суммой трех простых чисел*, ДАН, 15 (1937), 291–294.

[5] Гриценко С. А., *Три аддитивные задачи*, Изв. РАН, Сер. матем., 56 (1992), 1198–1216.

[6] Илин В., Садовничи В., Сендов Б., *Математически анализ*, първа част, „Наука и изкуство“, София, 1984.

[7] Илин В., Садовничи В., Сендов Б., *Математически анализ*, втора част, „Наука и изкуство“, София, 1989.

[8] Карацуба А. А., *Основы аналитической теории чисел*, „Наука“, Москва, 1983.

[9] Конягин С. В., *Аддитивная проблема с дробными степенями*, Матем. заметки, 73 (2003), 633–636.

[10] Лапорта М. Б., Толев Д. И., *Об одном уравнении с простыми числами*, Матем. заметки, 57 (1995), 926–929.

[11] Пятетский-Шапиро И. И., *Об одном варианте проблемы Варинга-Гольдбаха*, Матем. сб., 30(72), (1) (1952), 105–120.

[12] Пятетский-Шапиро И. И., *О распреленении простых чисел в последовательностях вида* $[f(n)]$, Матем. сб., 33(75) (3), (1953), 559–566.

[13] Рудин У., *Реален и комплексен анализ*, „Наука и изкуство“, София, 1984.

[14] Сегал Б. И., *Об едной теореме, аналогичной теореме Варинга*, ДАН СССР, 2 (1933), 47–49.

[15] Сегал Б. И., *Теорема Варинга для степеней с дробными и иррациональными показателями*, Тр. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 5 (1934), 73–86.

[16] Тодорова Т., *Три задачи от Аналитичната теория на числата*, дисертация, Софийски Университет - София, (2015).

[17] Толев Д. И., *Лекции по елементарна и аналитична теория на числата*, УИ „Св. Климент Охридски“, 2016.

[18] Akbal Y., Güloğlu A., *Waring-Goldbach problem with Piatetski-Shapiro primes*, Journal of Number Theory, 185 (2018), 80–92.

[19] Baker R., Weingartner A., *A ternary diophantine inequality over primes*, Acta Arith., 162 (2014), 159–196.

[20] Balog A., Friedlander J. B., *A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro*, Pacific J. Math., 156 (1992), 45–62.

[21] Brun V., *Le crible d'Eratostène et le théorème de Goldbach*, C. R. Acad. Sci., Paris, 168 (1919), 544–546.

[22] Brüdern J., Fouvry E., *Lagrange's Four Squares Theorem with almost prime variables*, J. Reine Angew. Math., 454 (1994), 59–96.

[23] Brüdern J., Fouvry E., *Le crible a vecteurs*, Compos. Math., 102 (1996), 337–355.

[24] Brüdern J., Kumchev A, *Diophantine approximation by cubes of primes and an almost prime. II*, Illinois J. Math., 45 (1), (2001), 309–321.

[25] Cai Y., *A ternary diophantine inequality involving primes*, Inernational Journal of Number Theory 14 (2018), no. 8, 2257–2268.

[26] Cai Y., *Lagrange's four squares theorem with variables of special type*, Intern. J. Number Theory, 6 (2010), no. 8, 1801–1817.

[27] Cai Y., Lu M., *Additive problems involving primes of special type*, Acta Arith. 140, 2 (2009), 189–204.

[28] Cao X., Zhai W., *On a binary diophantine inequality*, Adv. Math. (China), 6 (2003), 706–721.

[29] Chen J. R., *On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica, 16 (1973), 157–176.

[30] Davenport H., *On Waring's problem for fourth powers*, Ann. of Math. (2), 40 (1939), 731–747.

[31] Deshouillers J. M., *Probleme de Waring avec exposants non entiers*, Bull. Soc. Math. France, 101 (1973), 285–295.

[32] Deshouillers J. M., *Un problème binaire en théorie additive*, Acta Arith., 25 (1973 – 1974), 393–403.

[33] Erdös P., Nathanson M. B., *Lagrange's Theorem and Thin Subsequences of Squares*, Contributions to Probability (J. Gani, V. K. Rohatgi, eds.), Academic Pres, New York, (1981), 3–9.

[34] Graham S. W., Kolesnik G. A., *Van der Corput's Method of Exponencial Sums*, Cambridge University Press, 1991.

[35] Greaves G., *Sieves in number theory*, Springer, 2001.

[36] Hardy G. H., Littlewood J. E., *A new solution of Waring's problem*, Quart. J. Math. Oxford, 48 (1919), 272–293.

[37] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum".I. A new solution of Waring's problem*, Göttingen Nach. r. 1920 (1920), 33–54.

[38] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum".III. On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math., 44 (1923), 1–70.

[39] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum".IV. The singular series in Waring's problem and the value of the number $G(k)$*, Math. Z., 12 (1922), 161–188.

[40] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum". V. A further contribution to the study of Goldbach's problem*, Proc. London Math. Soc. (2), 22 (1923), 45–56.

[41] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Some problems of "Partitio Numerorum". VI. Further researches in Waring's problem*, Math. Z., 23 (1925), 1–37.

[42] Harman G., *On the distribution of αp modulo one*, J. London Math. Soc. (2), 27 (1983), 9–18.

[43] Harman G., *On the distribution of αp modulo one II*, Proc. London Math. Soc. (3), 72 (1996), 241–260.

[44] Heath-Brown D. R., Tolev D. I., *Lagrange's four squares theorem with one prime and three almost-prime variables*, J. Reine Angew. Math., 558 (2003), 159–224.

[45] Heath-Brown, D. R, *A new $k-th$ derivative estimate for exponential sums via Vinogradov's mean value*, Tr. Mat. Inst. Steklova, 296 (2017), 95–110.

[46] Heath-Brown D. R., *The Pjatetski-Sapiro prime number theorem*, J. Number Theory, 16 (1983), 242–266.

[47] Helfgott H. A., *The ternary Goldbach conjecture is true*, http://arxiv.org/pdf/1312.7748.pdf

[48] Hilbert D., *Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl nter Potenzen (Waringsche Problem)*, Math. Ann., 67 (1909), 281–300.

[49] Hua L. K., *Additive Theory of Prime Numbers*, American Mathematical Society, Providence, RI, (1965).

[50] Hua L. K., *Some results in the additive prime number theory*, Quart. J. Math. Oxford, 9 (1938), 68–80.

[51] Iwaniec H., *A new form of the error term in the linear sieve*, Acta Arith., 37 (1980), 307—320.

[52] Iwaniec H., *Rosser's sieve*, Acta Arith. 36 (1980), 171—202.

[53] Iwaniec H., *On sums of two norms from cubic fields*, Journées de théorie additive des nombres, Université de Bordeaux I, (1977), 71–89.

[54] Jia C. H., *On the Piatetski-Shapiro-Vinogradov theorem*, Acta Arith., 73 (1995), 1–28.

[55] Kumchev A., *A binary additive equation involving fractional powers*, Int. J. Number Theory, 5 (2009), 281–292.

[56] Kumchev A., *A diophantine inequality involving prime powers*, Acta Arith. 89 (1999), 311–330.

[57] Kumchev A., *On the Piatetski-Shapiro-Vinogradov theorem*, J. Theor. Nombres Bordeaux, 9 (1997), 11–23.

[58] Kumchev A,. Laporta M., *On a binary diophantine inequality involving prime powers*, Millenial Conference on Number Theory, At Urbana, IL, Volume: Number Theory for the Millennium, II (2000).

[59] Kumchev A., Wooley T. D., *On the Waring-Goldbach problem for seventh and higher powers*, Monatsh. Math., 183 (2017), 303–310.

[60] Landau E., *Über die zahlentheoretische Funktion $\phi(n)$ und ihre beziehung zum Goldbachschen Satz*, Nachr. koninglichen Gesellschaft wiss, Göttingen Math.Phys. klasse, (1900), 177–186.

[61] Li H. Z., *A hybrid of theorems of Goldbach and Piatetski-Shapiro*, Acta Arith., 107 (2003), 307–326.

[62] Linnik Y. V., *On the representation of large numbers as sums of seven cubes*, Mat. Sbornik N. S., 12 (1943), 218–224.

[63] Linnik Y. V., *An elementary solution of the problem of Waring by Schnirelman's method*, Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S., 12(54): 2 (1943), 225–230.

[64] Matomäki K., Shao X., *Vinogradov's three primes theroem with almost twin primes*, Compos. Math., 153 (2017), 1220–1256.

[65] Maynard J., *Small gaps between primes*, Ann. of Math. (2), 181 (1) (2015), 383–413.

[66] Mirek M., *Roth's theorem in the Piatetski-Shapiro primes*, Rev. Mat. Iberoam., 31 (2015), 617–656.

[67] Peneva T., *On the ternary Goldbach problem with primes p_i such that $p_i + 2$ are almost-prime*, Acta Math. Hungar., 86 (2000), 305–318.

[68] Polymath, *Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes*, Research in the Mathematical Sciences, 2014, 1–12.

[69] Ricci G., *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*, Riv. Mat. Univ. Parma, 5 (1954), 3—54.

[70] Rivat J., Wu J., *Prime numbers of the form $[n^c]$*, Glasgow Math. J., 43 (2001), no. 2, 237–254.

[71] Selberg A., *Sieve methods*, Proc. Sympos. Pure Math., 20 (1971), 311–351.

[72] Selberg A., *The general sieve method and its place in prime number theory*, Proc. Internat. Congress Math., Cambridge, Mass., 1 (1950), 286–292.

[73] Tolev D. I., *Additive problems with prime numbers of special type*, Acta Arith., 96 (2000), 53–88.

[74] Tolev D. I., *Arithmetic progressions of prime-almost-prime twins*, Acta Arith., 88 (1999), 67–98.

[75] Tolev D. I., *On a diophantine inequality involving prime numbers*, Acta Arith., 61 (3) (1992), 289–306.

[76] Tolev D. I., *On a diophantine inequality with prime numbers of a special type*, Tr. Mat. Inst. Steklova, 299 (2017), 261–282.

[77] Vaaler J. D., *Some extremal problems in Fourier analysis*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 183–216.

[78] Vinogradov I. M., *Some theorems concerning the theory of primes*, Mat. Sbornik N.S., 2 (1937), 179–195.

[79] Vaughan R. C., The Hardy-Littlewood method, Cambridge Tracts in Mathematics, Second Edition, (1997).

[80] Wirsing E., *Thin subbases*, Analysis, 6 (1986), 285–308.

[81] Wooley T. D., *Large improvements in Waring's problem*, Ann. of Math. (2), 135 (1992), 131–164.

[82] Wooley T. D., *Multigrade efficient congruencing and Vinogradov's mean value theorem*, Proc. London Math. Soc. (3), 111 (2015), no. 3, 519–560.

[83] Wooley T. D., *Vinogradov's mean value theorem via efficient congruencing*, Ann. of Math. (2) 175 (2012), no. 3, 1575–1627.

[84] Zhang D. Y., Zhai W. G, *The Waring-Goldbach problem in thin sets of primes. II*, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), 48 (2005), 809–816.

[85] Zhang Y., *Bounded gaps between primes*, Annals of Mathematics, April (2013).