

ДОКТОРСКА ПРОГРАМА "АЛГЕБРА, ТОПОЛОГИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ"
професионално направление 4.5 Математика

КОНСПЕКТ

за кандидат-докторантски изпит

ЧАСТ АЛГЕБРА

1. Съществуване на Жорданова нормална форма на линеен оператор в крайномерно пространство. Лема на Фитинг. ([1] § 18, [2] § 16)
2. Единственост на Жордановата нормална форма. Теорема на Хамилтън-Кейли. ([1] § 19)
3. Билинейни и квадратични форми. Положително дефинитни квадратични форми. ([1] § 25, § 26, [2] § 21, § 22)
4. Китайска теорема за остатъците. Директно произведение на пръстени. Структура на мултипликативната група \mathbb{Z}_n^* на пръстен от остатъци \mathbb{Z}_n . ([3], §1, [4] § 3)
5. Символ на Лъожандър. Критерий на Ойлер. Закон за реципрочност на квадратичните остатъци. ([5], [6] гл. VII, § 11, §12)
6. Действие на група върху множество. Теорема на Силов. ([7] §20, § 21, [8] § 10)
7. Пермутационни групи - транзитивност и примитивност. Нормални подгрупи на A_n и S_n . ([3] §2, [8] зад. 1.32, 1.33, [7] § 5, [10] гл.7, § 3.3, стр. 285-286)
8. Линейни представяния на групи. Унитарност на линейните представяния на крайна група над полето на комплексните числа. Теорема на Машке за пълната приводимост на представянията на крайна група. ([10] гл. 8, §1-§2)
9. Циклотомични полиноми. Теорема на Ведербърн за крайните тела. ([7] § 19, §24)
10. Евклидови пръстени и области на главни идеали. ([11] гл. 6, §28-§30)
11. Модули, подмодули и фактор-модули. Теорема за хомоморфизмите на модули. ([10] гл. 9, § 3.1, [11] гл. 10, § 47-§48)
12. Структурна теорема за крайно породените абелеви групи. ([11] гл. 3, § 14)
13. Ньотерови пръстени и модули. Теорема на Хилберт за базиса. ([4] § 6 до Твърдение 6.5 включително, § 7)

14. Локализация на комутативен пръстен с единица относно мултипликативно затворено подмножество. ([4] § 4)
15. Радикал на идеал. Теорема на Хилберт за нулите. ([4] §2, част 1, § 8-§ 9)
16. Алгебрични разширения на числови полета. Теорема за примитивния елемент. Еквивалентност на понятията просто алгебрично разширение, крайно породено алгебрично разширение и крайно алгебрично разширение. ([7] § 22, §23, [8] §4)
17. Алгебрична затвореност на полето на комплексните числа. Съществуване и единственост на алгебрична обвивка на поле. ([7], §17, [12], гл. V, § 2)
18. Нормални разширения. ([3] §5)
19. Група на Галоа на крайно разширение на полета. ([3] § 6)
20. Съответствие на Галоа. ([3] §7)
21. Крайни полета - съществуване и единственост на крайни полета, мултипликативна група. Група от автоморфизми (автоморфизъм на Фробениус). ([7] §25)

ЧАСТ ТОПОЛОГИЯ

1. Лема на Куратовски-Цорн. Равномощни множества. Теорема на Кантор за мощността на експонентата. Ординални и кардинални числа. Канторово множество. Мощност на реалната права. Центрирани системи. Филтри и ултрафилтри.
2. Дефиниция на топологично пространство (= тп (понякога под "тп" ще разбираме и "топологични пространства")). Отворени множества и околност на точка. Дискретни и антидискретни пространства. Дефиниция на решетка, пълна решетка и пълна верига. Пространство на Серпински.
3. База на тп. Въвеждане на топология чрез аксиоматично зададена база. Тегло на тп. Теорема на Александров-Урисон за бази. Права на Зоргенфрей. Линейно наредени пространства.
4. Предбаза на тп. Въвеждане на топология чрез аксиоматично зададена предбаза. Сравнение на топологии. Теорема: фамилията от всички топологии в дадено множество е пълна решетка.
5. Локални бази и базисни системи от околности в тп. Характер на точка в тп и характер на тп. Въвеждане на топология чрез аксиоматично зададена базисна система от околности. Равнина на Немицки.
6. Затворени множества. Въвеждане на топология чрез аксиоматично задаване на затворените множества. Кофинитна топология. Затворена обвивка. Въвеждане на топология с помощта на оператор на Чех или оператор на Куратовски.

7. Вътрешност на подмножество на топ – елементарни свойства. Въвеждане на топология чрез аксиоматично зададен оператор на вътрешност. Контур на подмножество на топ. Точки на съгъстяване и изолирани точки. Навсякъде гъсти, когъсти и никъде не гъсти подмножества на топ. Гъстота на топ. F_σ и G_δ подмножества на топ.
8. Непрекъснати изображения между топологични пространства – основни свойства и характеристики. Топологии, породени от множество от функции – елементарни свойства. Отворени и затворени изображения. Хомеоморфизми.
9. T_i -пространства, $i = 0, 1, 2, 3, 3.5, 4, 5, 6$. Лема на Урисон.
10. Сходимост в топологични пространства.
11. Суми и произведения на топологични пространства. Декартово и диагонално произведение на (непрекъснати) изображения.
12. Теорема за диагоналното изображение. Теорема на Тихонов за влагане в тихонов кубове.
13. Фактор-пространства. Залепване по подпространство. Примери: лист на Мьобиус, проективната равнина, бутилката на Клайн.
14. Компактни пространства – основни свойства. Теорема на Тихонов за произведения на компактни пространства. Характеризация на компактните подмножества на \mathbb{R}^n . Теорема на Вайерщрас.
15. Теорема на Тайманов. Теорема на Александров за непрекъснатите образи на канторовото множество. Теорема на Пеано.
16. Компактни разширения - общи свойства. Стоун-Чеховско компактно разширение.
17. Локално компактни пространства – общи свойства. Александровско компактно разширение.
18. Свързани пространства. Компоненти на свързаност и квазикомпоненти. Локално свързани, линейно свързани, локално линейно свързани пространства. Описание на свързаните подмножества на \mathbb{R} . Теорема за междинните стойности. Теорема на Жордан (без д-во). Топологична класификация на компактните двумерни повърхнини (без д-во).
19. Метрични и метризуеми пространства. Теорема: метризуемите пространства са T_6 -пространства. Теорема на Урисон за метризуемост на пространствата с изброима база.

Литература

- [1] Сидеров Пл., Записки по алгебра - Линейна алгебра, Веди, София, 2001.
- [2] Божилов А., Кошлуков Пл., Задачи по алгебра - линейна алгебра, Веди, София, 1995.
- [3] Попов А., Сидеров Пл., Чакърян К., Ръководство по висша алгебра - теория на Галоа, Веди, София, 2010.
- [4] Коцев Б., Сидеров Пл., Записки по алгебра - комутативна алгебра, Изд. Веди, София, 2007.
- [5] Коцев Б., Лекции по алгебрични числа в сайта на катедра Алгебра, 2006-2007 уч. г.
- [6] Генов Г., Миховски Ст., Т. Моллов, Алгебра с теория на числата, Наука и Изкуство, София, 1991.
- [7] Сидеров Пл., Чакърян К., Записки по алгебра - групи, пръстени, полиноми, Изд. Веди, София, 2002.
- [8] Божилов А., Сидеров Пл., Чакърян К., Задачи по алгебра - групи, пръстени, полиноми, изд. Веди, София, 2002.
- [9] Каргаполов М., Мерзляков Ю., Основы теории групп, Москва, Наука, 1982.
- [10] Кострикин А., Въведение в алгебрата, Наука и Изкуство, София, 1981.
- [11] Генов Г., Миховски Ст., Т. Моллов, Алгебра, Пловдив, Университетско издателство "Паисий Хилендарски", 2006.
- [12] Lang, Algebra, Graduate Texts in Mathematics, 211, Springer, 2002.
- [13] Р. Енгелкинг, Общая топология, Мир, Москва, 1986.
- [14] К. Куратовски, Увод в теорията на множествата и топологията, Наука и изкуство, София, 1979.
- [15] У. Маси, Дж. Столинс, Алгебраическая топология, "Мир", Москва, 1977.

София 27.5.2016 г.

Ръководител на катедра Алгебра:
доц. д-р М. Стоянова