

## СТАНОВИЩЕ

от доц. д-р Лозко Милев,  
Факултет по математика и информатика,  
СУ „Св. Климент Охридски“

за дисертационния труд на Ана Александрова Авджиева  
„Някои асимптотически оптимални квадратурни формули“  
за присъждане на образователната и научна степен „Доктор“  
по научна специалност „Изчислителна математика“

Дисертацията е с обем 83 страници и се състои от увод, пет глави и списък на цитираната литература включващ 33 заглавия.

Задачи за построяване на квадратурни формули, които са оптимални за дадени класове от функции са изследвани за първи път от Николски и Сард в средата на миналия век. При този подход възлите и коефициентите се определят от условието квадратурната формула да има минимална грешка в зададен клас от функции. Важни резултати в това направление са получени от Моторний, Лигун, Женсикбаев, Боянов и др. За непериодичните класове на Соболев  $W_p^r$  е доказано съществуването и единствеността на оптималните квадратурни формули, но явният им вид е неизвестен с изключение на някои частни случаи. Това мотивира интереса към изследване на асимптотически оптимални квадратурни формули, които са обект на дисертацията на Ана Авджиева.

В Увода (представен като Глава 1) са въведени основни понятия като грешка на квадратурна формула в клас от функции, оптимална квадратурна формула, асимптотически оптимална квадратурна формула и техни аналози за дефинитни квадратурни формули. Дадена е подробна справка за получени от други автори резултати по темата и систематизирано е изложено съдържанието на дисертацията.

Във втора глава се съдържат предварителни сведения, които се използват в следващите глави, например: ядра на Пеано, полиноми и моносплайни на Бернули, сумационни формули на Ойлер-Маклорен, константи на грешките на оптималните квадратурни формули в някои периодични класове на Соболев и др.

Глава 3 е посветена на числено пресмятане на Гаусовите квадратурни формули за пространства от кубични сплайни с равноотдалечени възли. Като частен случай от резултати на Кьолер и Николов следва, че тези квадратурни формули са асимптотически оптимални в класа  $W_\infty^4$ . При предположение за разположението на възлите на квадратурната формула спрямо възлите на сплайн-функциите е изведена нелинейна система от кубични уравнения за намиране на възлите и коефициентите на Гаусовата

квадратурна формула с  $n$  възела  $Q_n^G$ . Разработен е алгоритъм за числено решаване на системата по метода на стрелбата и са пресметнати възлите и коефициентите на  $Q_n^G$  при  $3 \leq n \leq 16$ .

В Глава 4 са намерени асимптотически оптимални квадратурни формули в Соболевите класове  $W_p^3$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  и  $W_p^4$ ,  $p = 1, 2, \infty$ . За извеждането им е използван следният оригинален подход: за основа е взета дадена сумационна формула на Ойлер-Маклорен, след което производните на подинтегралната функция в краищата на интервала са заместени с подходящи формули за числено диференциране. Възлите на последните са разположени в малки околности на краищата, което осигурява близостта на съответните ядра на Пеано до оптималните ядра за периодичния случай. Предимство на получените квадратурни формули, освен тяхната асимптотическа оптималност, е явния вид на възлите и коефициентите, които са рационални числа. Фактически, повечето от възлите са тези на съставните квадратурни формули на трапеците или правоъгълниците, към които са добавени няколко възела. В случаите  $p = 1, 2, \infty$  са пресметнати константите на грешките. Изложението е сполучливо онагледено с множество от таблици и графики.

В пета глава са построени единадесет редици от асимптотически оптимални дефинитни квадратурни формули от четвърти ред, вкл. шест отрицателно дефинитни и пет положително дефинитни. Значимостта на дефинитните формули от ред  $r$  е свързана с факта, че те осигуряват едностранни оценки за интеграла, когато подинтегралната функция е  $r$ -изпъкнала или  $r$ -вдлъбната. Като следствие, формули от този вид могат да се използват за получаване на апостериорни оценки на грешката и условия за прекратяване на изчисленията в програми за числено интегриране. За извеждане на формулите е използвана техниката от Глава 4, водеща до явни рационални стойности на възлите и коефициентите. Обоснована е дефинитността и са пресметнати константите на грешките, с което се доказва асимптотическата им оптималност.

Предмет на изследване в шеста глава е монотонността на остатъците и апостериорни оценки на грешката. Особен интерес представлява основният резултат (Теорема 5). В теоремата се разглежда произволна двойка  $(Q', Q'')$  от положително (отрицателно) дефинитни квадратурни формули от ред  $r$  и се дава достатъчно условие  $Q'[f]$  да бъде по-добро приближение за интеграла в сравнение с  $Q''[f]$ , при условие, че подинтегралната функция  $f$  е изпъкнала (вдлъбната) от ред  $r$ . Доказани са и апостериорни оценки на грешката за двете формули. По-нататък, сред получените в Глава 5 асимптотически оптимални дефинитни квадратурни формули са намерени двойки, които удовлетворяват условията на Теорема 5. При това са изчислени най-добрите константи за прилагане на достатъчното условие. В заключение са извършени числени експерименти с 4-изпъкнали функции, с които е показана ефективността на апостериорните оценки на грешката от Теорема 5.

Резултатите от дисертацията се основават на четири статии. Две от тях са публикувани в трудовете на международните конференции BGSIAM'12 и MIE 2014, проведени в София. Третата е в Годишника на СУ „Св. Кл. Охридски“, а четвъртата е приета за печат в реномираното списание Journal of Computational and Applied Mathematics (JCAM), издавано от Elsevier, с импакт-фактор 1.328 за 2015 г. Четирите статии са в съавторство с Г. Николов. Приемам, че приносът на Ана Авджиева е равностоен с този на нейния съавтор. Работата [2] от списъка на литературата е цитирана в статия, публикувана в JCAM през 2016 г. Някои от резултатите в дисертационния труд са докладвани от А. Авджиева на три международни конференции в България.

Авторефератът от 25 страници правилно отразява съдържанието на дисертацията.

### **Заклучение.**

Дисертационният труд „Някои асимптотически оптимални квадратурни формули“ на Ана Александрова Авджиева удовлетворява изцяло изискванията на ЗРАСРБ и на Правилника на ФМИ на СУ „Св. Кл. Охридски“ за придобиване на образователната и научна степен „Доктор“. Дисертантът се е запознал с една класическа и актуална област на математиката като численото интегриране. Получени са разнообразни асимптотически оптимални квадратурни формули и е илюстрирана тяхната приложимост. Проявени са задълбочени знания и умения и са преодолените значителни технически трудности.

**Въз основа на изложеното по-горе убедено предлагам на уважаемото Научно жури да присъди на Ана Александрова Авджиева образователната и научна степен „Доктор“ по научната специалност „Изчислителна математика“.**

София,  
24.09.2016 г.

Изготвил становището:

(доц. д-р Лозко Милев)