РЕЦЕНЗИЯ

от доц. д-р Румен Костадинов Улучев
Висше транспортно училище „Тодор Каблешков“ – София

По дисертация за присъждане на: образователна и научна степен „доктор“

Област на висшето образование: 4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: 4.5. Математика

Научна специалност: Комплексен анализ

Автор на дисертационния труд: Александър Василев Александров

Тема на дисертационния труд: „Екстремални свойства на някои класически ортогонални полиноми в комплексната равнина“

Научни ръководители: Проф. д.м.н. Борислав Боянов и проф. д.м.н. Гено Николов

1. Общи данни за дисертанта.

Александър Александров завършва средно образование в СОУ „Св. Седмочисленици“, гр. Търговище, през 1996 г. Същата година е приет за студент във Факултета по математика и информатика на Софийския университет „Св. Климент Охридски“. Дипломира се през 2001 г. като магистър по математика, специализация „Комплексен анализ“.

През 2003 г. е избран за асистент към катедрата по „Комплексен анализ и топология“ при ФМИ на СУ „Св. Кл. Охридски“, където и досега води упражнения по комплексен и реален анализ.

Задочната му докторантура започва под ръководството на акад. Борислав Боянов. Впоследствие функциите на научен ръководител са поети от проф. Гено Николов.

2. Анализ на научните постижения в дисертационния труд.

Представеният от ас. Александров дисертационен труд „Екстремални свойства на някои класически ортогонални полиноми в комплексната равнина“ е от 74 страници. Той се състои от увод, четири глави и библиография с цитирани 28 литературни източника.

Намирането на оценки за алгебричните полиноми и техните производни е стара класическа задача с широко приложение в теория на апроксимациите. Смята се, че една от първите публикации в това направление е на Менделеев от 1887 г., поставил задачата за оценяване на коефициентите на полином $p(x)$ от втора степен, $|p(x)| \leq M$, M – положителна константа, $x \in [a, b]$. Всъщност, Менделеев е намерил оценки за $p(0)$, $p'(0)$ и $p''(0)$. През 1889 г. А. Марков разглежда по-общо задачата за полиноми от n-та степен и при оценката на $p'(x)$ в $[-1, 1]$ се появяват като екстремални полиномите на Чебишов от първи род $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Значително по-силно твърдение е доказано от двамата братя А. и В. Маркови. Ако π_n е множеството на алгебричните полиноми от степен най-много n с комплексни коефициенти и $\|\circ\|$ е равномерната норма на непрекъснатите в интервала $[-1,1]$ функции, то за $p \in \pi_n$, $\|p\| \le 1$, е изпълнено

$$\|p^{(k)}\| \le \|T_n^{(k)}\| \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

с равенство само при $p = \gamma T_n$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$.

През 1941 г. Дафин и Шефер усилват това твърдение, заменяйки условието $\|p\| \le 1$ с по-слабото

$$|p(x)| \le 1 \quad \text{само за} \;\; x = \eta_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{n}, \;\; \nu = 0, 1, \ldots, n, \tag{2}$$

които са точно екстремалните точки на T_n в $[-1,1]$.

Установявайки, че полиномите на Чебишов притежават т.нар. End-Point Domination Property (EPDP):

$$|T_n(x+iy)| \le |T_n(1+iy)| \qquad x \in [-1,1], \;\; y \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

за полиномите p от π_n с реални коефициенти Дафин и Шефер доказват при условието (2) по-силното неравенство

$$|p^{(k)}(x+iy)| \le |T_n^{(k)}(1+iy)| \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \;\; x \in [-1,1], \;\; y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Всъщност, неравенство от вида (4) е валидно и при доста по-общи условия (виж Теорема D на Дафин е Шефер).

И така, за доказването на неравенства от типа на Дафин и Шефер (4), е необходимо да се докаже EPDP за съответните полиноми, явяващи се екстремални, както и съответни теореми за сравняване – аналози на (1).

Оригинален метод за доказване на EPDP за класове от полиноми е предложен от Патрик, като за полиномите $p \in \pi_n$ е използвано представянето чрез формулата на Йенсен:

$$|p(x+iy)|^2 = \sum_{k=0}^{n} L_k(p;x)\, y^{2k}, \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

където

$$L_0(p;x) = p^2(x), \qquad L_k(p;x) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k-j} \frac{f^{(j)}(x) f^{(2k-j)}(x)}{j!\,(2k-j)!}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

В дисертацията на Александър Александров са разгледани и решени някои задачи за неравенства от типа на Дафин и Шефер, в които екстремални се явават именно класическите ортогонални полиноми на Ермит $H_n(x)$, на Гегенбауер $P_n^{(\lambda)}(x)$ или на Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Уводната Глава 0 на дисертацията съдържа кратки исторически бележки и препратки за разглежданите задачи. Ретроспективно са представени известните до момента резултати. Отбелязан е приносът на българската математическа школа при изследванията върху неравенства от тип на Дафин и Шефер. Дадени са необходимите основни означения и дефиниции. Ясно са поставени задачите, които се решават в отделните глави. Формулирани са основните доказани резултати, както и най-важните помощни твърдения.

В Глава 1 за пълнота на изложението и за илюстрация на подхода, който се следва по-нататък са приведени доказателства на някои от резултатите на Дафин и Шефер: $|p^{(k)}(x)| \leq |T_n^{(k)}(x)|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, при условието (2); неравенството (4).

Също тук е изведена формулата на Йенсен (5) и е описан един метод на Сонин-Пойа за изследване поведението на функцията $L_0(p; x)$ в случая, когато p е полином на Якоби от степен n. Методът на Сонин-Пойа се базира на факта, че ортогоналните полиноми на Якоби удовлетворяват линейно хомогенно диференциално уравнение от втори ред.

Пак за пълнота на изложението са приложени доказателства на две твърдения на В. Марков, касаещи унаследяването на свойството преплитане на нули на два полинома от техните производни.

Основният резултат в Глава 2 е Теорема 2.1 – неравенство от типа на Дафин и Шефер с екстремални полиномите на Ермит H_n, аналог на (4). При предположенията $p \in \pi_n^r$, $|p(x)| \leq |H_n(x)|$ в нулите на H_{n+1} и ако η е най-голямата нула на H_{n+1}, то

$$|p^{(k)}(x+iy)| \leq |H_n^{(k)}(\eta+iy)| \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in [-\eta, \eta], \quad y \in \mathbb{R},$$

с равенство само при $p = \pm H_n$.

Доказателството на Теорема 2.1 е твърде комплицирано и използва целият арсенал от средства, въведени в Глава 1.

В хода на доказателството се минава през Теорема 2.2 – аналог на (3), която гласи, че функциите $L_k(H_n; x)$ са строго намаляващи в $(-\infty; 0]$ и строго растящи в $[0; \infty)$.

Глави 3 и 4 са посветени на хипотезата на Патрик и усилената хипотеза на Патрик за някои класове от ортогонални полиноми. За доказване на свойството EPDP (оттам и получаване на неравенства от типа на Дафин и Шефер), Патрик изказва хипотезата, че за полиномите на Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}$, $\alpha \geq \beta > -1$, и $k = 1, 2, \ldots, n$ е изпълнено

$$L_k(P_n^{(\alpha,\beta)}; x) \leq L_k(P_n^{(\alpha,\beta)}; 1), \qquad x \in [0, 1].$$

Усилен вариант на тази хипотеза е предложен от Г. Николов във вида: функциите $L_k(P_n^{(\alpha,\beta)}; x)$ са строго намаляващи в $(-\infty; 0]$ и строго растящи в $[0; -\infty)$.

Ултрасферичните ортогонални полиноми (полиноми на Гегенбауер) $P_n^{(\lambda)}$ са частен случай на полиномите на Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}$ при $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$. Естествено е, първо да се опитаме да докажем някое твърдение в частен случай, а след това да опитаме и по-общия. В този ред на мисли, през 2005 г. Г. Николов доказва в една своя работа хипотезата на Патрик за ултрасферичните полиноми.

Следващата стъпка е описана в Глава 3 на дисертацията, където за полиномите на Гегенбауер е доказана усилената хипотеза на Патрик. Централният резултат е формулиран в Теорема 3.1 и гласи, че за $\lambda > -1/2$ и $n \geq 2$ функциите $L_k(P_n^{(\lambda)}; x)$ са строго намаляващи в $(-\infty; 0]$ и строго растящи в $[0; -\infty)$.

Доказателството е с индукция по индекса k, но индукционната стъпка не е никак проста. За целта са доказани три спомагателни леми – Леми 3.5, 3.6 и 3.7, използвани са формулата на Йенсен, линейното хомогенно диференциално уравнение, което удовлетворяват полиномите на Гегенбауер, и други помощни техники.

Последната глава от дисертационния труд на А. Александров е на основата на публикацията [2], написана съвместно с Г. Николов, Х. Дитерт и В. Пилвейн. В Глава 4 за полиномите на Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}$ са доказани хипотезата на Патрик (Теорема 4.1), усилената хипотеза на Патрик (Теорема 4.2), а също и свойството EPDP (Следствие 4.1):

$$|P_n^{(\alpha,\beta)}(x+iy)| \le |P_n^{(\alpha,\beta)}(1+iy)|, \qquad x \in [0,1], \quad y \in \mathbb{R},$$

при $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \ge \max\{-1/2, \beta\}$.

За отбелязване е, че в хода доказателството на Теорема 4.1 е използвано оригинално обобщение на метода на Сонин-Пойа за всички коефициентни функции $L_k(p;x)$ от формулата на Йенсен, докато стандартно този метод се прилага само за $L_0(p;x)$.

В резюме, научните приноси на дисертацията са както следва:

- доказано е ново неравенство от типа на Дафин и Шефер, в което екстремални са ортогоналните полиноми на Ермит;
- доказана е усилената хипотеза на Патрик за ултрасферичните полиноми;
- доказана е хипотезата на Патрик и свойството EPDP за ортогоналните полиноми на Якоби;
- с предложено ново обобщение на метода на Сонин-Пойа за оценяване на коефициентните функции във формулата на Йенсен е доказана усилената хипотеза на Патрик за ортогоналните полиноми на Якоби.

3. Общо описание на публикациите по дисертацията.

Публикациите по дисертационния труд са три на брой, а именно [1], [2] и [22], съгласно номерацията в библиографията на дисертацията и на автореферата.

Резултатите в тези три статии съставляват по същество дисертацията на Александър Александров и са описани подробно в т. 2 по-горе. Изложението в дисертацията се придържа към представянето на резултатите и доказателствата им в публикациите, поради което тук няма да влизаме в детайли.

В [1] за полиномите от π_n с реални коефициенти е доказано неравенство от типа на Дафин и Шефер, в което екстремален е полиномът на Ермит от степен n. Статията е отпечатана в тома с доклади от Международната конференция *Конструктивна теория на функциите 2010, Созопол.*

Трудът [22] е посветен на изследване поведението на ултрасферичните ортогонални полиноми в комплексната равнина. Тук е доказана усилената хипотеза на Патрик. Публикуван е в международното списание на издателството Springer *Results in Mathematics*, имащо импакт-фактор 0,508 за 2012 г.

Хипотезата на Патрик и на усилената хипотеза на Патрик за ортогоналните полиноми на Якоби са доказани в [2]. Тази публикация е отпечатана в реномираното международно списание на издателството Elsevier *Journal of Mathematical Analysis and Applications* с импакт-фактор 1,2 за 2015 г.

И трите публикации по дисертацията споменати по-горе, са в съавторство на А. Александров с научния му ръководител Г. Николов, а [2] е съвместно дело с още двама чуждестранни изследователи – Хелга Дитерт и Вероника Пилвейн. Не са представени допълнителни сведения за приноса на всеки от авторите в посочените статии. Поради това считаме, че авторите са с равностоен принос в тези публикации.

Не са ми известни цитирания от други автори на резултатите от [1], [2] и [22].

Някои от получените резултати са докладвани от А. Александров на международните конференции по апроксимации *Constructive Theory of Functions 2010, Sozopol* и *Jaen Conference on Approximation Theory 2012, Jaen (Spain).*

4. Критични бележки и препоръки.

Цялата дисертация е написана с голяма акуратност. Може би включването на някои чертежи и графики би направило изложението малко по-атрактивно и доказателствата по-нагледни.

Ще отбележа, че у мен възникна един въпрос относто формулата на Йенсен при така дефинираните коефициентни функции (6). На стр. 5, 28, 46, 54 и 56 от дисертацията формулата на Йенсен е написана или приложена с множители $(2k)!$ в знаменателите. Отново на стр. 54, 56, на стр. 63, както и в статиите [1], [2], [22], при същите коефициентни функции L_k в (6), формулата на Йенсен е във вида (5), т.е. без $(2k)!$ в знаменателите. Коя от двете формули е коректна?

5. Оценка на автореферата.

Представеният автореферат следва изложението в глави 1–4 на дисертационния труд, като в тази си част е идентичен с уводната Глава 0 на дисертацията.

Посочени са научните публикации по темата на дисертацията (3 на брой) и международните конференции на които са докладвани някои от резултатите.

В авторската справка са изредени научните приноси на дисертацията.

Поместена е пълна библиография на използваната литиратура.

Авторефератът е написан изключително ясно и прецизно. Считам, че той дава пълна представа за дисертационния труд и научната работа върху него от дисертанта.

6. Заключение.

Представеният от ас. Александър Александров труд „Екстремални свойства на някои класически ортогонални полиноми в комплексната равнина“ има необходимите качества за придобиване на образователна и научна степен „доктор“ в съответствие със *ЗРАСРБ*, неговия *Правилник* и *Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности на СУ* и на *ФМИ*.

От него е видно, че дисертантът притежава задълбочени теоретични познания за ортогоналните полиноми (на Чебишов, на Ермит, на Гегенбауер, на Якоби) и техните свойства върху реалната права и по-общо, в комплексната равнина. Получил е нови резултати отнасящи се за неравенства от типа на Дафин и Шефер, в които споменатите полиноми са екстремални. В хода на доказателствата дисертантът е преодолял значителни трудности, като е проявил съобразителност, находчивост и много добра техника. Научните приноси на дисертацията са безспорни и са посочени по-горе.

В заключение, оценявам положително представения дисертационен труд „Екстремални свойства на някои класически ортогонални полиноми в комплексната равнина“ и предлагам на Научното жури да присъди на Александър Василев Александров образователната и научна степен „доктор“ в област на висшето образование *4. Природни науки, математика и информатика*, професионално направление *4.5. Математика* и научна специалност *Комплексен анализ.*

08 април 2016 г. Рецензент:...

София /Доц. д-р Румен Улучев/