

СТАНОВИЩЕ

от доц. д-р Андрей Стефанов Андреев

за дисертацията на Александър Василев Александров, на тема
„Екстремални свойства на някои класически ортогонални
полиноми в комплексната равнина”,
представена за получаване на образователна и научна степен „Доктор”,
област на висше образование „Природни науки, математика и информатика”,
Професионално направление: Математика (Комплексен анализ)

Дисертацията съдържа 74 страници, разпределени в 5 глави, литература, апробация, авторска справка и два други раздела. Резултатите, представени в дисертацията, са публикувани в три съвместни статии, като научният ръководител проф. Николов е съавтор и в трите статии. Това е естествено, тъй като тематиката на дисертацията е обект на дългогодишни изследвания както от проф. Г. Николов, така и от неговия научен ръководител академик Б. Боянов. Определено личи, че дисертантът е много добре запознат с над 100 годишната история на проблемите, разгледани в дисертацията, които имат в момента твърде класическо звучене и са в основата на редица направления в Теорията на апроксимациите и Числения анализ. Ето защо смятам, че дисертантът има равностойно участие в постигнатите резултати.

Две от статиите са публикувани в реномирани издания (аз лично смятам, че и другата статия, публикувана в трудовете на Международната конференция по апроксимации, също има голяма тежест, предвид на състава и нивото на този форум) имат Импакт фактор (IF) съответно 0.508 и 1.2, и така едно от основните изисквания в **Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени...във ФМИ на СУ „Св. Кл. Охридски”** (Глава 3, Член 4) е напълно удовлетворено.

В Увода (в Съдържанието представен като Глава 0.), съдържащ 14 страници, е направена научна и историческа справка за произхода на задачата през 1889 год. и нейното развитие до наши дни. Резултатите на братята Андрей и Владимир Маркови (тук има място и името на световно известния химик Менделеев) от края на 19 век и половин век по-късно обобщението на тези резултати през 1941 год. от американските математици Дафин и Шефер слагат началото на много интересни изследвания в теоретичен и приложен аспект в математиката. За актуалността на задачата може да се съди по факта, че върху неравенството на Марков за оценка на производната на алгебричен полином p от степен n ,

$$|p'(x)| \leq \frac{2n^2}{b-a} \|p\|, x \in [a, b],$$

се гради голяма част от теорията в областта на апроксимациите. Основните резултати на Дафин и Шефер са свързани с полиномите на Чебишев, които играят значителна роля не само в математиката, но са важен инструмент в нейните приложения в числените методи, електротехниката и др. Казано накратко, дисертантът и научния му ръководител са доказали редица твърдения, подобни на тези на Дафин и Шефер, свързани с полиномите на Чебишев, на за други ортогонални полиноми, като Ермит, Гегенбауер, Якоби.

В Глава 1, на 18 страници подробно са представени редица означения, доказани са отново резултатите на Дафин и Шефер, както и редица мощни твърдения (леми и следствия), които се използват при доказателствата в Глави 2-4. Въпреки, че са известни, някои от тях, като една от лемите на Марков звучи съвсем класически, а именно: ако два алгебрични полинома имат само реални прости нули, които се преплитат, то и нулите на производните им се преплитат. Трябва да се отбележи, че

редица споменати резултати са красиви математически равенства. Такива са формулата на Йенсен за представяне на алгебричен полином с реални нули и реален старши коефициент и методът на Сонин-Пойа, който позволява да се правят изводи за поведението на локалните екстремуми на решението на хомогенно диференциално уравнение от втори ред. А както е известно класическите ортогонални полиноми са решения на такъв тип диференциални уравнения.

В глави 2-4 на дисертацията са представени новите резултати, получени от дисертанта. Ще се спра по-подробно на отделните глави:

1. Глава 2.

Съвместно с научния си ръководител проф. Николов (публикация през 2012 в трудовете на международната конференция Constructive Theory of Functions, Sozopol, 2010, многогодишен, престижен научен форум) А. Александров доказва аналог на теоремата на Дафин и Шефер за полиномите на Ермит H_n : ако за полинома f с реални коефициенти е в сила $|f| \leq |H_n|$ в нулите на H_{n+1} , и a_{n+1} е най-голямата нула на H_{n+1} , то

$$|f^{(k)}(x+iy)| \leq |H_n^{(k)}(a_{n+1}+iy)|, (x,y) \in [-a_{n+1}, a_{n+1}] \times \mathbb{R}, k=1,2,\dots,n.$$

По същество в последното неравенство полиномът на Чебишев T_n в теоремата на Дафин и Шефер

$$|f^{(k)}(x+iy)| \leq |T_n^{(k)}(1+iy)|, (x,y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}.$$

е заменен с H_n . При доказателството се използва съществено и следното свойство на H_n

$$|H_n(x+iy)| \leq |H_n(a_{n+1}+iy)|, (x,y) \in [-a_{n+1}, a_{n+1}] \times \mathbb{R}.$$

2. Глава 3.

В тази глава съществено са използвани резултатите от тип неравенства на Дафин и Шефер на проф. Николов за полиномите на Якоби (и в частност на Гегенбауер). През 1971 г. американският математик М. Патрик формулира следната хипотеза: ако $P_n^{(\alpha,\beta)}$ е полином на Якоби, $\alpha \geq \beta > -1$, то за $k=1,2,\dots,n$, е в сила

$$\max_{x \in [0,1]} L_k(P_n^{(\alpha,\beta)}; x) = L_k(P_n^{(\alpha,\beta)}; 1),$$

където $L_k(f; x) = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k-j} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} \frac{f^{(2k-j)}(x)}{(2k-j)!}$, (формула на Йенсен). Г Николов и

А. Александров усилват хипотезата на Патрик и успяват да докажат, че ако $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, $\lambda > 1/2$, (ултрасферичен полином), $n \geq 2$, то функцията $L_k(P_n^{(\alpha,\beta)}; x)$ е строго монотонно намаляваща в $(-\infty, 0]$ и строго монотонно растяща в $[0, \infty)$, за $k=1,2,\dots,n$. Добра математическа техника е демонстрирана при доказателствата на 4 твърдения, (някои от тях обикновени диференциални уравнения от втори ред), в които участват производните на полиномите на Якоби (Гегенбауер).

Резултатите от Глава 3 са публикувани в съвместна статия с Г. Николов през 2012 г. в Results Math. 62, 415-428.

3. Глава 4.

В тази глава са доказани два резултата от тип Дафин-Шефер за полиномите на Якоби, подобни на резултатите от Глава 3, но ограничението $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ е заменено с по-общото $\alpha \geq \beta > -1$, т.е. вместо полиномите на Гегенбауер от Глава 3 са разгледани полиномите на Якоби. Ще спомена само Теорема 4.2, която гласи, че ако $P_n^{(\alpha, \beta)}$ е n -тия полином на Якоби, то хипотезата на Патрик е вярна и $L_k(P_n^{(\alpha, \beta)}; x)$ е строго монотонно растяща функция в $[0, \infty)$. Като следствие, за полиномите на Якоби при допълнителното ограничение $\alpha = \max\{-1/2, \beta\}$ е получено неравенството

$$|P_n^{(\alpha, \beta)}(x+iy)| \leq |P_n^{(\alpha, \beta)}(1+iy)|, (x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}.$$

Авторефератът отразява точно съдържанието на дисертацията и научните приноси, по-точно той е Увода на дисертацията – и двете са по 14 страници.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ:

От казаното по-горе правя извода и определено считам, че в дисертацията са разгледани и доказани важни и трудни нови резултати в Теорията на апроксимациите. Уверено предлагам на Научното жури да предложи на почитаемия ФС на ФМИ при СУ „Кл. Охридски“ да присъди на докторанта Александър Василев Александров образователната и научна степен „Доктор“, в област на висше образование „Природни науки, математика и информатика“, Професионално направление: Математика (Комплексен анализ)

31.03.2016

С уважение:

/доц. А.Андреев/