Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Физически Факултет

Катедра "Теоретична физика"

Автореферат

на дисертация за присъждане на образователна и научна степен "доктор"
в образователно направление: 4.1. Физически науки

Александър Алексиев Стефанов

Нелинейни динамични системи свързани с безкрайномерни алгебри на Ли

Ръководители:
доц. д-р Димитър Младенов
проф. дфзн. Владимир Герджиков

София 2015 година

Дисертационният труд е обсъден на заседание на разширен катедрен съвет на катедра Теоретична физика на Физическия Факултет, СУ "св. Климент Охридски проведен на 9.12.2015 г. и е насочен за обсъждане от факултетния съвет на Физически факултет за защита пред научно жури.

Съдържание

1 Обща характеристика на дисертационния труд

1.1 Актуалност на проблема и въведение в тематиката

До ден днешен интегруемите модели продължават да са интерес за редица математици и физици.Измежду тях особено място заемат солитонните уравнения. Тяхното начало започва с решаването на уравнението на Кортевег де Фриз (КдФ)

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u\partial_x u \tag{1}$$

през 1967 г. от Гарднър, Грийн, Крускал и Миура [1]. През 1968 Лакс показва, че КдФ може да се запише във вид на Лакс [2]:

$$\partial_t L = \big[L, A\big], \tag{2}$$

където

$$L = -d_x^2 + u(x,t), \quad A = 4d_x^3 - 3\left(ud_x + d_x u\right), \tag{3}$$

са са линейни диференциални оператори. Тук Лаксовото представяне е записано в скаларен вид. Обикновенно, заедно с КдФ се разглежда и модифицираното уравнение на Кортевег де Фриз (мКдФ)

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u^2\partial_x u \tag{4}$$

решено за пръв път от Wadati [3].

Съвсем естествено е да се търсят и обобщения на уравнението на КдФ. Централна в това направление е работата на Дринфелд и Соколов от 1981 г. [4], в която те показват връзката между солитонни уравнения и безкрайномерни алгебри на Ли. Там се обяснява и връзка между скаларни Лаксови оператори и оператори от вида:

$$\begin{aligned} L &= \partial_x + U(x,t,\lambda), \\ M &= \partial_t + V(x,t,\lambda), \end{aligned} \tag{5}$$

Където $U(x,t,\lambda)$ и $V(x,t,\lambda)$ са матрици $n \times n$ и $U(x,t,\lambda)$ е линеен по λ. Уравнението на Лакс приема вида (представяне на нулева кривина) $\big[L, M\big] = 0$. Разгледани са и уравненията свързани с голяма част от ниско-размерните алгебри, но един от по-специалните случай, а именно, уравненията свързани с алгебрите на Кац-Муди от тип D_4 не е изведен.

Алгебрата $D_4 \simeq \mathfrak{so}(8)$ е уникална измежду простите алгебри на Ли. Тя е единствената алгебра, която притежава 3 като двукратен показател. Тя също е и единствената алгебра с S_3 симетрия на Динкиновата си диаграма. Това предполага, че уравненията свързани с нея, също ще имат интересни свойства.

1.2 Цели на дисертационния труд

Основната цел на дисертацията е да изследва обобщенията на модифицирания Кортевег де Фриз (мКдФ), свързани с алгебрите на Кац-Муди от тип D_4. Стъпките, нужни за постигането на тази цел са:

- Построяване на базиси за алгебрите на Кац-Муди - $D_4^{(1)}$, $D_4^{(2)}$ и $D_4^{(3)}$. За тази цел е нужно алгебрата D_4 да бъде градуирана с подходящи автоморфизми C_1, C_2 и C_3, намирането на които е нетривиално. Това е особено в сила за автоморфизма C_3, нужен за построяването на $D_4^{(3)}$.

- Построяване на рекурсионните оператори, с чиято помощ се разрешават рекурсионните съотношения, получени от условието за съвместимост на Лаксовата двойка. Чрез тях се записва всяко уравнение от съответната йерархия в компактен вид.

- Намиране на Хамилтонианите на съответните уравнения.

- Разглеждане на спектралните свойства на Лаксовите оператори. Това позволява да се дефинира обратна задача за разсейване (ОЗР), чрез която получените уравнения могат да се интегрират. С помощта на фундаменталните аналитични решения, ОЗР се свежда до проблем на Риман-Хилберт.

- Построяване на решения на уравненията чрез метода на обличането.

1.3 Структура на дисертацията

Дисертационният труд е с обем 60 страници и се състой от увод, две обзорни глави, целящи да дадат минималната нужна информация за постигане на поставените задачи, три оригинални глави, в които са изложени получените резултати, и заключение. Към дисертацията има и приложение. Литературата съдържа 62 заглавия, като след това са изброени и трите публикации свързани с дисертацията, както и изнесени доклади на международни конференции. Дисертацията съдържа 2 таблици и 3 фигури. Дисертацията е написана на английски език.

Дисертацията е организирана по следния начин:

Глава 1 е кратък увод, целящ да въведе читателя в темата, като едновременно с това демонстрира и нейната актуалност.

Глава 2 е посветена на алгебри на Ли. Тя съдържа основни факти от теорията на простите алгебри на Ли, както и избрани детайли от теорията на алгебрите на Кац-Муди.

Глава 3 дава нужните факти от теория на интегруемите модели. Тя съдържа някой свойства на Лаксовото представяне. Тук също е изложена и групата на редукции на Михайлов. Разгледани са и рекурсионните оператори - основния инструмент използван за извеждането на уравненията. И накрая, дадена е и Хамилтоновата формулировка на уравненията.

В Глави 4,5, и 6 са изложени основните резултати на дисертационния труд - йерархиите от уравнения свързани с алгебрите на Кац-Муди $D_4^{(1)}$,$D_4^{(2)}$ и $D_4^{(3)}$. Тук се съдържа и построяването на Кокстеровите автоморфизми за тези алгебри, което не винаги е тривиална стъпка. Дадени са и първите не-тривиални представители на съответните йерархии, както и техните Хамилтониани.

Глава 7 е посветена на решаването на уравненията. Тук са изложени основите на теория на разсейването в този контекст. Разгледани са спектралните свойства на Лаксовите оператори и са въведени фундаменталните аналитични решения. Дадени са и минимални данни на разсейване и обратната задача за разсейване е сведена до проблем на Риман-Хилберт. И накрая, разгледан е и метода на обличането на Захаров и Шабат.

Глава 8 съдържа заключение, в което са обобщени основните резултати от дисертацията.

В приложението е даден явния вид на използваните базиси на алгебрите на Кац-Муди от тип D_4. Там също е дадено в явен вид извеждането на оператора ad_J^{-1}, който участва в рекурсионните оператори.

2 Основно съдържание на дисертационния труд

Тук накратко е представено основното съдържание на дисертационният. Много от детайлите са пропуснати и могат да бъдат намерени в текста на дисертацията.

2.1 Алгебри на Ли

Основна цел на тази глава е да запознае читателя с основните свойства на алгебрите на Ли и алгебрите на Кац-Муди. Подробно третиране на въпроса може да бъде намерено в [9, 10, 11, 12, 13]. Алгебра на Ли $\mathfrak{g}$ наричаме линейно пространство в което е въведена би-линейна антисиметрична операция $[\ ,\ ]$ наречена скобка на Ли, за която е изпълнено тъждеството на Якоби:

$$\big[X,\big[Y,Z\big]\big]+\big[Z,\big[X,Y\big]\big]+\big[Y,\big[Z,X\big]\big]=0 \tag{6}$$

за всяко X, Y и Z от $\mathfrak{g}$. Една алгебра на Ли се нарича проста, ако е не-абелева и не съдържа нетривиални идеали. Когато казваме проста алгебра на Ли и не уточняваме дали алгебрата е крайно или безкрайно мерна ще подразбираме, че тя е крайно-мерна. Ще се интересуваме от алгебри над полето на комплексните числа $\mathbb{C}$.

Нека $\mathfrak{g}$ е проста алгебра на Ли. Под ad_X ще разбираме линейния оператор дефиниран с

$$\mathrm{ad}_X(Y)=\big[X,\,Y\big],\quad X,Y\in\mathfrak{g}. \tag{7}$$

Този оператор е обратим върху образа си. Ще означаваме обратният му оператор с ad_X^{-1}. Ако X може да се диагонализира, то ad_X^{-1} може да се изрази като полином от ad_X.

Нека $\big\langle\ ,\ \big\rangle$ е картановата форма върху $\mathfrak{g}$, която се дефинира с

$$\big\langle X,Y\big\rangle=\mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}_X\ \mathrm{ad}_Y\right). \tag{8}$$

Всяка инвариантна симетрична би-линейна форма върху $\mathfrak{g}$ е пропорционална на (8). Това ни позволява да използваме формата

$$\big\langle X,Y\big\rangle=\mathrm{tr}\left(XY\right). \tag{9}$$

Картанова под-алгебра $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{g}$ наричаме всяка максимална абелева под-алгебра.

Нека $\mathfrak{g}$ е проста алгебра на Ли. Система от канонични генератори в $\mathfrak{g}$ наричаме система от генератори $H_i, E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}, 1\le i\le r$, за които

$$\begin{aligned}
&\big[H_i,H_j\big]=0,\\
&\big[E_{\alpha_i},E_{-\alpha_j}\big]=\delta_{ij}H_i,\\
&\big[H_i,E_{\alpha_j}\big]=C_{ij}H_i,\\
&\big[H_i,E_{-\alpha_j}\big]=-C_{ij}H_i.
\end{aligned} \tag{10}$$

Елементите H_i се наричат Картанови генератори и образуват Картанова под-алгебра. Всеки друг базисен елемент E_α може да се получи от (10) чрез краен брой комутирания. На всеки елемент E_α отговаря вектор α в корневото пространство на $\mathfrak{g}$. Матрицата (C_{ij}) е обратима и се нарича матрица на Картан за $\mathfrak{g}$. Числото r се нарича ранг на алгебрата. Всяка проста алгебра на Ли се определя еднозначно от своята матрица на Картан. Простите алгебри на Ли се разделят на два класа - класически серии и изключителни алгебри на Ли.

Класическите серии са

$$\begin{aligned} &A_r \simeq \mathfrak{sl}(r+1), \quad r = 1, 2, 3\ldots, \\ &B_r \simeq \mathfrak{so}(2r+1), \quad r = 2, 3, 4\ldots, \\ &C_r \simeq \mathfrak{sp}(2r), \quad r = 3, 4, 5\ldots, \\ &D_r \simeq \mathfrak{so}(2r), \quad r = 4, 5, 6\ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

Не съществува подобно просто описание на изключителните алгебри - E_6, E_7, E_8, F_4 и G_2.

В дисертацията централно място заема простата алгебра D_4. Обикновено, тя се представя с антисиметрични матрици 8×8. В това представяне обаче Картановата под-алгебра не е диагонална. Доста по-удобно е да се използва представянето, за което за всяко $X \in D_4$ е изпълнено

$$SX + (SX)^T = 0, \tag{12}$$

където матрицата S е

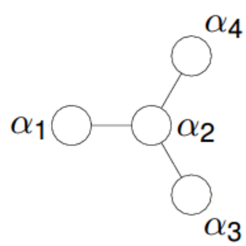
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Тогава Картановата под-алгебра може да се зададе с диагонални матрици.

При така избрано представяне, базисът от канонични генератори на D_4 се задава с

$$\begin{aligned} H_i &= e_{ii} - e_{9-i,9-i}, \quad 1 \le i \le 4, \\ E_{\alpha_j} &= e_{j,j+1} + e_{8-j,9-j} \quad 1 \le j \le 3, \\ E_{\alpha_4} &= e_{3,5} + e_{4,6}, \quad E_{-\alpha_j} = (E_{\alpha_j})^T, \end{aligned} \tag{14}$$

кудето e_{ij} е матрица, която има 1 на i-ти ред j-то стълб и нули навсякъде другаде.



Фигура 1: Динкинова диаграма за D_4.

Нека $\mathfrak{g}$ е алгебра на Ли. Линейното изображение $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ се нарича автоморфизъм на $\mathfrak{g}$, ако е обратимо и

$$\varphi\left(\left[X, Y\right]\right) = \left[\varphi(X), \varphi(Y)\right]. \tag{15}$$

за всяко X и Y от $\mathfrak{g}$.

Нека φ е автоморфизъм на $\mathfrak{g}$ от краен ред, т.е. $\varphi^s(X) = X$ за някакво число s и всяко X от $\mathfrak{g}$. Ако φ може да се представи във вида

$$\varphi(X) = e^F X e^{-F} \tag{16}$$

за някой генератор F, то той се нарича вътрешен автоморфизъм. Всеки автоморфизъм, който не е вътрешен се нарича външен. Нека $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ е множеството от автоморфизми на $\mathfrak{g}$ и $\operatorname{Aut}_0\mathfrak{g}$ е множеството от външни автоморфизми на $\mathfrak{g}$. $\operatorname{Aut}_0\mathfrak{g}$ е нормална под-група на $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$. Нека Γ е диаграмата на Динкин за $\mathfrak{g}$, $\tau \in \operatorname{Aut}\Gamma$, $\tau(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)}$ е пермутация на вертексите на Γ. Тогава съществува единствен автоморфизъм φ_τ, за който $\varphi_\tau(E_{\alpha_i}) = E_{\tau(\alpha_i)}$, $\varphi_\tau(H_i) = H_{\sigma(i)}$. Всеки автоморфизъм на $\mathfrak{g}$ може еднозначно да бъде представен като $f \circ \varphi_\tau$ за някое $f \in \operatorname{Aut}_0\mathfrak{g}$ и $\tau \in \operatorname{Aut}\Gamma$, т.е. $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}/\operatorname{Aut}_0\mathfrak{g} \simeq \operatorname{Aut}\Gamma$.

Всеки автоморфизъм от краен ред φ градуира алгебрата $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k=0}^{s-1} \mathfrak{g}^{(k)}, \tag{17}$$

като

$$\left[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(l)}\right] \subset \mathfrak{g}^{(k+l)}, \quad \varphi(X) = \omega^k X, \quad \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{s}\right), \quad \forall X \in \mathfrak{g}^{(k)}, \tag{18}$$

където s е реда на φ и $k + l$ се разбира $\bmod s$.

Автоморфизъм C на една проста алгебра на Ли се нарича автоморфизъм на Кокстер ако собственото под-пространство $\mathfrak{g}^{(0)}$ е абелево и C е от минимален ред. Размерността на $\mathfrak{g}^{(0)}$ съвпада с ранга на алгебрата. Редът на C се нарича число на Кокстер за алгебрата и се означава с h. Собствените стойности на C имат вида $\omega^k = \exp(\frac{k2\pi}{h})$, $k = 0 \ldots (h-1)$.

В корневото пространство на $\mathfrak{g}$ действието на C може да се представи чрез някаква матрица c. Собствените стойности на c имат вида ω^m, където числата m се наричат показатели на алгебрата $\mathfrak{g}$.

Нека $\mathfrak{g}$ е крайно-мерна алгебра на Ли върху $\mathbb{C}$. Тогава

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}] &= \left\{ \sum_{i=n}^{m} v_i \lambda^i : v_i \in \mathfrak{g}, n, m \in \mathbb{Z} \right\}, \\ f(\lambda) &= \left\{ \sum_{i=0}^{m} f_i \lambda^i : f_i \in \mathfrak{g}, m \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Съществува естествена Ли алгебрична структура върху $\mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}]$. Нека φ е автоморфизъм на $\mathfrak{g}$ от ред s. Тогава

$$L(\mathfrak{g}, \varphi) = \left\{ f \in \mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}] : \varphi(f(\lambda)) = f\left(\lambda \exp\left(\frac{2\pi i}{s}\right)\right) \right\}. \tag{20}$$

$L(\mathfrak{g}, \varphi)$ е под-алгебра на $\mathfrak{g}[\lambda, \lambda^{-1}]$. Ако $\mathfrak{g}$ е проста, то $L(\mathfrak{g}, \varphi)$ се нарича алгебра на Кац-Муди. Алгебрите на Кац-Муди са пример за градуирани алгебри. Обикновено второто централно разширение на $L(\mathfrak{g}, \varphi)$ се нарича алгебра на Кац-Муди. Дадената по-горе дефиниция съвпада с дефиницията използвана в [4]. Отново напомняме, всеки автоморфизъм φ на $\mathfrak{g}$ може еднозначно да бъде представен във вида $\varphi = f \circ \varphi_\tau$. Редът на φ_τ се нарича височина на $L(\mathfrak{g}, \varphi)$. Много от дефинициите за прости алгебри на Ли - ранг, Кокстеров автоморфизъм, число на Кокстер, показатели, се пренасят по естествен начин и за алгебри на Кац-Муди.

Дадената по-горе дефиниция на алгебри на Кац-Муди може да буде изказана с по-прости думи - алгебрите на Кац-Муди са формални редове по λ с коефициенти от някоя подходящо градуирана проста алгебра на Ли.

Фокусът на тази работа е върху интегруемите уравнения свързани с алгебри на Кац-Муди от тип D_4. Съществуват три вида алгебри на Кац-Муди от тип D_4 - числата на Кокстер и показатели им са дадени в Таблица 1 (стойностите са взети от [4]). Таблицата също съдържа и Кокстеровите автоморфизми на съответните алгебри. Именно с тяхна помощ ще строим градуировка и базис.

Базис в $L(\mathfrak{g}, C)$ може да бъде построен по следния начин: Всеки елемент X от $L(\mathfrak{g}, C)$ има вида

$$X = \sum_{k=0}^{m} X^{(k)} \lambda^k, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{21}$$

където $X^{(k)} \in \mathfrak{g}^{(k \bmod h)}$. Всяко от подпространствата $\mathfrak{g}^{(k)}$ притежава базис получен чрез:

$$\mathcal{E}_i^{(k)} = \sum_{s=0}^{h-1} \omega^{-sk} C^s(E_{\alpha_i}), \qquad \mathcal{H}_j^{(k)} = \sum_{s=0}^{h-1} \omega^{-sk} C^s(H_j). \tag{22}$$

Алгебра	Кокстеров автоморфизъм	Число на Кокстер	Показатели	Ранг
$D_4^{(1)}$	$C_1 = S_{\alpha_2} S_{\alpha_1} S_{\alpha_3} S_{\alpha_4}$	6	$1, 3, 5, 3$	4
$D_4^{(2)}$	$C_2 = S_{\alpha_1} S_{\alpha_3} S_{\alpha_2} R$	8	$1, 3, 5, 7$	3
$D_4^{(3)}$	$C_3 = S_{\alpha_2} S_{\alpha_1} T$	12	$1, 5, 7, 11$	2

Таблица 1: *Реализация на Кокстеровите автоморфизми и числата на Кокстер за $D_4^{(1)}, D_4^{(2)}$ и $D_4^{(3)}$. Тук S_{α_i} е отражение спрямо простия корен α_i, R е външния автоморфизъм от втори ред, който заменя α_3 и α_4, и T е външен автоморфизъм от трети ред, който изпраща $\alpha_1 \to \alpha_3 \to \alpha_4$.*

Тук $\mathcal{H}_j^{(k)}$ е различно от нула само ако k е показател. Това означава, че броят не елементите в $\mathfrak{g}^{(k)}$ е $r+1$, ако k е показател и r в противен случай, където r е ранга на $L(\mathfrak{g}, C)$.

2.2 Интегруеми йерархии

Тази глава съдържа нужната информация от теорията на солитонните уравнения. Тук е изложено представянето на Лакс, както и групата на редукциите на Михайлов [7]. Даден е и общият вид на Лаксовата двойка, използвана за получаване на уравненията. Въведени са рекурсионните оператори, с чиято помощ йерархията е записана в компактен вид. Поради общият характер на главата, и трите алгебри на Кац-Муди от тип D_4 са разгледани заедно.

Нека L и M са диференциални оператори от първи ред от вида

$$\begin{aligned} L &= i\partial_x + U(x,t,\lambda), \\ M &= i\partial_t + V(x,t,\lambda), \end{aligned} \tag{23}$$

Нека C е Кокстеров автоморфизъм на която и да е алгебра на Кац-Муди от тип D_4 и нека потенциалите U и V са елементи на същата алгебра на Кац-Муди. Тогава редукцията

$$C\left(U(x,t,\lambda)\right) = U(x,t,\omega\lambda), \quad C\left(V(x,t,\lambda)\right) = V(x,t,\omega\lambda). \tag{24}$$

където $\omega = e^{\frac{2\pi i}{h}}$ се нарича Кокстерова редукция. Уравнение налага ограничения върху вида на Лаксовата двойка. Лаксова двойка съвместима с редукцията се задава с

$$\begin{aligned} L &= i\partial_x + Q(x,t) - \lambda J, \\ M &= i\partial_t + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k V^{(k)}(x,t) - \lambda^n K, \end{aligned} \tag{25}$$

където

$$Q(x,t) \in \mathfrak{g}^{(0)}, \quad V^{(k)}(x,t) \in \mathfrak{g}^{(k)}, \quad K \in \mathfrak{g}^{(n)}, \quad J \in \mathfrak{g}^{(1)}. \tag{26}$$

За да опростим означенията няма да отбелязваме явната зависимост от x и t. Условието за съгласуваност на Лаксовата двойка е

$$\left[L,\, M\right] = 0 \tag{27}$$

за всяко λ. Това води до следните рекурсионни съотношения

$$\begin{aligned}
\lambda^{n+1}: &\qquad \left[J, K\right] = 0, \\
\lambda^{n}: &\qquad \left[J, V^{(n-1)}\right] + \left[Q, K\right] = 0, \\
\lambda^{s}: &\qquad i\partial_x V^{(s)} + \left[Q, V^{(s)}\right] - \left[J, V^{(s-1)}\right] = 0, \\
\lambda^{0}: &\qquad -i\partial_t Q + i\partial_x V^{(0)} + \left[Q(x,t), V^{(0)}\right] = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Елементите $V^{(s)}$ се изразяват като функции на q_i. Всеки елемент $V^{(s)}$ се разделя на "ортогонална"и "паралелна"част

$$V^{(s)} = V_{\perp}^{(s)} + V_{\parallel}^{(s)}, \quad \mathrm{ad}_J\left(V_{\parallel}^{(s)}\right) = 0, \tag{29}$$

Решението на (28) може формално да бъде записано като

$$\begin{aligned}
V^{(n-1)} &= -\mathrm{ad}_J^{-1}\left[Q, K\right], \\
V_{\perp}^{(s-1)} &= \Lambda_s V_{\perp}^{(s)}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Явният вид на ad_J^{-1} зависи от избора на J. Операторите Λ_s са известни като рекурсионни оператори.

Със всеки Лаксов оператор L може да се свърже йерархия от нелинейни еволюционни уравнения зададени чрез

$$\partial_t Q = \partial_x\left(\Lambda_2 \dots \Lambda_{n-1} \mathrm{ad}\,_J^{-1}[K, Q]\right). \tag{31}$$

Всяко от уравненията в (31) притежава безкрайно много интеграли на движение. Всеки интеграл на движение може да се възприеме като Хамилтониан при подходящо избрана скобка на Поасон. Ще използваме интеграла зададен с [8]

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} i\partial_x^{-1}\left\langle \left[Q, \Lambda_0 V^{(0)}\right], \mathcal{H}_1^{(1)}\right\rangle dx, \tag{32}$$

където $\partial_x^{-1} f(x) = \int f(x) dx$ и сме положили константите от интегрирането да са равни на нула. Хамилтонианът H за което и да е уравнение е пропорционален на (32). Уравненията на Хамилтон имат вида

$$\partial_t q_i = \{q_i, H\} \tag{33}$$

със скобка на Поасон зададена с

$$\{F,G\} = \int_{\mathbb{R}^2} \omega_{ij}(x,y) \frac{\delta F}{\delta q_i} \frac{\delta G}{\delta q_j} dxdy, \tag{34}$$

където сумираме по повтарящи се индекси. Поасоновият тензор е

$$\omega_{ij}(x,y) = \frac{1}{2}\delta_{ij} \left(\partial_x \delta(x-y) - \partial_y \delta(x-y)\right). \tag{35}$$

Тогава (33) се редуцира до

$$\partial_t q_i = \partial_x \frac{\delta H}{\delta q_i}. \tag{36}$$

2.3 Интегруеми уравнения свързани с алгебрата $D_4^{(1)}$

Потенциалът на L се параметризира с:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_1 & -q_4 & -q_3 & q_2 & -q_2 & 0 \\ -q_1 & 0 & q_2 & -q_3 & -q_4 & q_1 & 0 & -q_2 \\ -q_1 & -q_2 & 0 & q_3 & q_4 & 0 & q_1 & -q_2 \\ q_4 & q_3 & -q_3 & 0 & 0 & q_4 & q_4 & -q_3 \\ q_3 & q_4 & -q_4 & 0 & 0 & q_3 & q_3 & -q_4 \\ -q_2 & -q_1 & 0 & -q_4 & -q_3 & 0 & q_2 & -q_1 \\ q_2 & 0 & -q_1 & -q_4 & -q_3 & -q_2 & 0 & q_1 \\ 0 & q_2 & q_2 & q_3 & q_4 & q_1 & -q_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

и

$$J = \frac{1}{2}\mathcal{H}_1^{(1)} = \mathrm{diag}(1, \omega_1, \omega_1^5, 0, 0, -\omega_1^5, -\omega_1, -1), \tag{38}$$

където $\omega_1 = \exp(2\pi i/6)$.

Потенциалът на M се определя с помощта на рекурсионните оператори.

Изборът на J фиксира ad_J^{-1}:

$$\mathrm{ad}_J^{-1} = \frac{1}{27}\left(26\ \mathrm{ad}_J^5 + \mathrm{ad}_J^{11}\right). \tag{39}$$

Има два възможни случая за рекурсионните оператори Λ_s. Ако s е показател:

$$\Lambda_s X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\partial_x X + [Q,X] + i\sum_{j=1}^{k} c_{s,j}^{-1} \left[Q, \mathcal{H}_j^{(s)}\right] \partial_x^{-1} \left\langle [Q,X], \mathcal{H}_j^{(h-s)} \right\rangle \right), \tag{40}$$

където k е кратността на показателя s. Ако s не е показател

$$\Lambda_s X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\partial_x X + [Q,X]\right). \tag{41}$$

Първият нетривиален член на йерархията е система от мКдФ уравнения. Той се получава от (31) при $n = 3$. Потенциалът на M е кубичен полином по λ и се параметризира както следва:

Алгебрата $D_4^{(1)}$ има 3 като двоен показател. Това означава, че матрицата K от (25) съдържа два параметъра:

$$K = \frac{1}{2} a \mathcal{H}_1^{(3)} + \frac{1}{6} b \mathcal{H}_4^{(3)}. \tag{42}$$

Елементите $V^{(k)}$ са линейна комбинация от базсисни елементи в $\mathfrak{g}^{(k)}$ с коефициенти $v_i^{(k)}$.

Коефициентите на $V^{(2)}$ получаваме от първото уравнение в (30):

$$\begin{aligned} v_1^{(2)} &= 2\omega_1 a q_1, \\ v_2^{(2)} &= 0, \\ v_3^{(2)} &= -\omega_1 (a+b) q_3, \\ v_4^{(2)} &= -\omega_1 (a-b) q_4. \end{aligned} \tag{43}$$

От второто уравнение в (30), замествайки $s = 2$ за $V^{(1)}$ получаваме:

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= -2a(\omega_1 + 1)\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\partial_x q_1 - \sqrt{3} q_4 q_3 + \sqrt{3} q_2 q_1\right), \\ v_2^{(1)} &= 2a q_1^2 - (a+b) q_3^2 - (a-b) q_4^2, \\ v_3^{(1)} &= (a+b)(\omega_1 + 1)\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\partial_x q_3 - \sqrt{3} q_1 q_4 - \sqrt{3} q_2 q_3\right), \\ v_4^{(1)} &= (a-b)(\omega_1 + 1)\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\partial_x q_4 - \sqrt{3} q_1 q_3 - \sqrt{3} q_2 q_4\right), \\ v_5^{(1)} &= a q_1^2 - \frac{1}{2}(a+b) q_3^2 - \frac{1}{2}(a-b) q_4^2. \end{aligned} \tag{44}$$

Коефициентът $v_5^{(1)}$ може формално да бъде интерпретиран като "плътност"и

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a q_1^2 - \frac{1}{2}(a+b) q_3^2 - \frac{1}{2}(a-b) q_4^2 \right) dx \tag{45}$$

е интеграл на движение.

От (30) и $s=1$ за $V^{(0)}$ следва

$$
\begin{aligned}
v_1^{(0)} &= 2a(\partial_x^2 q_1 - \sqrt{3}q_1\partial_x q_2) - \sqrt{3}\left((3a+b)q_4\partial_x q_3 + (3a-b)q_3\partial_x q_4\right) \\
&\quad - 3q_1(2aq_2^2 - (a-b)q_3^2 - (a+b)q_4^2), \\
v_2^{(0)} &= \sqrt{3}a\partial_x q_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)\partial_x q_3^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\partial_x q_4^2 \\
&\quad - 3q_2\left(2aq_1^2 - (a+b)q_3^2 - (a-b)q_4^2\right), \\
v_3^{(0)} &= -(a+b)(\partial_x^2 q_3 - \sqrt{3}q_3\partial_x q_2) + \sqrt{3}\left((3a+b)q_4\partial_x q_1 + 2bq_1\partial_x q_4\right) \\
&\quad - 3q_3\left(2aq_4^2 - (a-b)q_1^2 - (a+b)q_2^2\right), \\
v_4^{(0)} &= -(a-b)(\partial_x^2 q_4 - \sqrt{3}q_4\partial_x q_2) + \sqrt{3}\left((3a-b)q_3\partial_x q_1 - 2bq_1\partial_x q_3\right) \\
&\quad - 3q_4\left(2aq_3^2 - (a-b)q_2^2 - (a+b)q_1^2\right).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

И накрая, интегруемите уравнения получени от (31), са

$$
\begin{aligned}
\partial_t q_1 &= \partial_x\Big(2a(\partial_x^2 q_1 - \sqrt{3}q_1\partial_x q_2) - \sqrt{3}\left((3a+b)q_4\partial_x q_3 + (3a-b)q_3\partial_x q_4\right) \\
&\quad - 3q_1(2aq_2^2 - (a-b)q_3^2 - (a+b)q_4^2)\Big), \\
\partial_t q_2 &= \partial_x\Big(\sqrt{3}a\partial_x q_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)\partial_x q_3^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\partial_x q_4^2\Big) \\
&\quad - 3q_2\left(2aq_1^2 - (a+b)q_3^2 - (a-b)q_4^2\right), \\
\partial_t q_3 &= \partial_x\Big(- (a+b)(\partial_x^2 q_3 - \sqrt{3}q_3\partial_x q_2) + \sqrt{3}\left((3a+b)q_4\partial_x q_1 + 2bq_1\partial_x q_4\right) \\
&\quad - 3q_3\left(2aq_4^2 - (a-b)q_1^2 - (a+b)q_2^2\right)\Big), \\
\partial_t q_4 &= \partial_x\Big(- (a-b)(\partial_x^2 q_4 - \sqrt{3}q_4\partial_x q_2) + \sqrt{3}\left((3a-b)q_3\partial_x q_1 - 2bq_1\partial_x q_3\right) \\
&\quad - 3q_4\left(2aq_3^2 - (a-b)q_2^2 - (a+b)q_1^2\right)\Big).
\end{aligned}
$$

Плътността на Хамилтониана от (32) е

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \frac{1}{3}\left(2aq_1\partial_x^2 q_1 - (a+b)q_3\partial_x^2 q_3 - (a-b)q_4\partial_x^2 q_4\right) \\
& - \frac{1}{6}\left(2a(\partial_x q_1)^2 - (a+b)(\partial_x q_3)^2 - (a-b)(\partial_x q_4)^2\right) \\
& + 2a\sqrt{3}\left((q_4q_3 + \frac{1}{3}q_2q_1)\partial_x q_1 - \frac{1}{3}q_1^2\partial_x q_2\right) \\
& - (a+b)\sqrt{3}\left((q_4q_1 - \frac{1}{3}q_2q_3)\partial_x q_3 - \frac{1}{3}q_3^2\partial_x q_2\right) \\
& - (a-b)\sqrt{3}\left((q_3q_1 - \frac{1}{3}q_2q_4)\partial_x q_4 - \frac{1}{3}q_4^2\partial_x q_2\right) \\
& - \frac{3}{2}\left(2a(q_1^1q_2^2 + q_4^2q_32) - (a+b)(q_1^2q_4^2 + q_2^2q_3^2) - (a-b)(q_1^2q_3^2 + q_2^2q_4^2)\right)
\end{aligned}
\tag{47}
$$

където уравненията на Хамилтон се задават с (36).

Показаните по-горе мКдФ уравнения, както и Хамилтониана им (47) зависят от два параметъра a и b. Единият от тези параметри, например a винаги може да бъде абсорбиран в t. Винаги, обаче остава един свободен параметър - ефективно, имаме 1-параметрична система от уравнения. Това е единствената известна до момента система от уравнения от типа на мКдФ.

2.4 Интегруеми уравнения свързани с алгебрата $D_4^{(2)}$

Потенциалът на L се параметризира с

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & -q_1 & -q_2 & -q_2 & q_3 & q_3 & 0 \\ -q_1 & 0 & q_2 & q_1 & q_3 & -q_2 & 0 & q_3 \\ q_1 & -q_2 & 0 & q_3 & q_1 & 0 & -q_2 & -q_3 \\ q_2 & -q_1 & -q_3 & 0 & 0 & q_1 & -q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & -q_1 & 0 & 0 & q_3 & -q_1 & -q_2 \\ -q_3 & q_2 & 0 & -q_1 & -q_3 & 0 & q_2 & q_1 \\ -q_3 & 0 & q_2 & q_3 & q_1 & -q_2 & 0 & q_1 \\ 0 & -q_3 & q_3 & q_2 & q_2 & -q_1 & -q_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

и

$$J = \frac{1}{2}\mathcal{H}_1^{(1)} = \mathrm{diag}(1, -\omega_2^3, \omega_2, -i, i, -\omega_2, -\omega_2^3, -1), \tag{49}$$

където $\omega_2 = \exp(2\pi i/8)$.

Отново, потенциалът на M се определя с помощта на рекурсионните оператори.

Изборът на J фиксира ad_J^{-1}:

$$\mathrm{ad}_J^{-1} = -\frac{1}{16}\left(135\mathrm{ad}_J^7 - \frac{15}{2}\mathrm{ad}_J^{15} - \frac{1}{16}\mathrm{ad}_J^{23}\right) \tag{50}$$

Ако s е показател, рекурсионните оператори са:

$$\Lambda_s X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\frac{\partial X}{\partial x} + \left[Q, X\right] + ic_s^{-1}\left[Q, J^s\right]\partial_x^{-1}\left\langle [Q,X], J^{h-s}\right\rangle\right). \tag{51}$$

в противен случай

$$\Lambda_s X = \mathrm{ad}_J^{-1}\left(i\frac{\partial X}{\partial x} + \left[Q, X\right]\right), \tag{52}$$

Първият нетривиален член на йерархията е система от мКдФ уравнения. Той се получава от (31) при $n = 3$. Потенциалът на M е кубичен полином по λ и се параметризира както следва:

$$K = a\mathcal{H}_1^{(3)}. \tag{53}$$

Елементите $V^{(k)}$ са линейна комбинация от базисни елементи в $\mathfrak{g}^{(k)}$ с коефициенти $v_i^{(k)}$. Нека въведем следните означения: $c_1 = 1 + \sqrt{2}$, $c_3 = 1 - \sqrt{2}$.

За $V^{(2)}$ имаме

$$v_1^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{8}c_1(1-i)aq_1, \qquad v_2^{(2)} = \frac{1}{4}aq_2, \qquad v_1^{(3)} = \frac{\sqrt{2}}{8}c_3(1-i)aq_3. \tag{54}$$

За $V^{(1)}$ получаваме

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= \frac{a}{8}\Big((c_1^2 - ic_1)\partial_x q_1 - \sqrt{2}q_2\big((3-i)q_1 + (1-3i)q_3\big) \\ &\quad - \sqrt{2}q_2\big(2(2-i)q_1 + 2(2+i)q_3\big)\Big), \\ v_2^{(1)} &= -\frac{a\sqrt{2}}{8}\Big(\partial_x q_2 + (q_1 - q_3)\big((2+\sqrt{2})q_1 - (2-\sqrt{2})q_3\big)\Big), \\ v_3^{(1)} &= \frac{a}{8}\Big((c_3 + ic_3^2)\partial_x q_3 + \sqrt{2}q_2\big((3+i)q_1 + (1+3i)q_3\big) \\ &\quad + \sqrt{2}q_2\big(2(1-2i)q_1 - 2(1+2i)q_3\big)\Big), \\ v_4^{(1)} &= \frac{a}{8}\left(c_1 q_1^2 + q_2^2 + c_3 q_3^2\right). \end{aligned} \tag{55}$$

За $V^{(0)}$ следва

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &= \frac{a}{8}\Bigg(\sqrt{2}c_1^2\partial_x^2 q_1 - 3\sqrt{2}\big(\left(c_1 q_1 + q_3\right)\partial_x q_2 + 2q_2\partial_x q_3\big) \\ &\quad + 2q_3^3 - 12q_1 q_3^2 - 6(2q_2^2 - q_1^2)q_3 - 6q_1 q_2^2\Bigg), \\ v_2^{(0)} &= \frac{a}{8}\Bigg(\partial_x^2 q_2 + 3\sqrt{2}\big(\left(c_1 q_1 + q_3\right)\partial_x q_1 - \left(c_3 q_3 + q_1\right)\partial_x q_3\big) \\ &\quad - 6q_2\left(\frac{1}{3}q_2^2 + q_1^2 + q_3^2 + 4q_1 q_3\right)\Bigg), \\ v_3^{(0)} &= \frac{a}{8}\Bigg(- \sqrt{2}c_3^2\partial_x^2 q_3 + 3\sqrt{2}\big(\left(c_3 q_3 + q_1\right)\partial_x q_2 + 2q_2\partial_x q_1\big) \\ &\quad + 2q_1^3 - 12q_1^2 q_3 - 6(2q_2^2 - q_3^2)q_1 - 6q_3 q_2^2\Bigg). \end{aligned} \tag{56}$$

Интегруемите уравнения имат вида

$$
\begin{aligned}
\partial_t q_1 = \frac{a}{8}\partial_x\Bigg(&\sqrt{2}c_1^2\partial_x^2 q_1 - 3\sqrt{2}\big(\,(c_1 q_1 + q_3)\,\partial_x q_2 + 2q_2\partial_x q_3\big)\\
&+ 2q_3^3 - 12q_1q_3^2 - 6(2q_2^2 - q_1^2)q_3 - 6q_1q_2^2\Bigg),\\
\partial_t q_2 = \frac{a}{8}\partial_x\Bigg(&\partial_x^2 q_2 + 3\sqrt{2}\big(\,(c_1 q_1 + q_3)\,\partial_x q_1 - (c_3 q_3 + q_1)\,\partial_x q_3\big)\\
&- 6q_2\left(\frac{1}{3}q_2^2 + q_1^2 + q_3^2 + 4q_1q_3\right)\Bigg),\\
\partial_t q_3 = \frac{a}{8}\partial_x\Bigg(&-\sqrt{2}c_3^2\partial_x^2 q_3 + 3\sqrt{2}\big(\,(c_3 q_3 + q_1)\,\partial_x q_2 + 2q_2\partial_x q_1\big)\\
&+ 2q_1^3 - 12q_1^2q_3 - 6(2q_2^2 - q_3^2)q_1 - 6q_3q_2^2\Bigg).
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Тези уравнения имат Хамилтониан с плътност:

$$
\begin{aligned}
H = \frac{1}{48}a\Bigg(&\sqrt{2}c_1^2\left(2q_1\partial_x^2 q_1 - (\partial_x q_1)^2\right)\left(2q_2\partial_x^2 q_2 - (\partial_x q_2)^2\right)\\
&- \sqrt{2}c_3^2\left(2q_3\partial_x^2 q_3 - (\partial_x q_3)^2\right) + 3\sqrt{2}c_1\left(q_2\partial_x q_1^2 - 2q_1^2\partial_x q_2\right)\\
&- 3\sqrt{2}c_3\left(q_2\partial_x q_3^2 - 2q_3^2\partial_x q_2\right) + 18\sqrt{2}q_2\left(q_3\partial_x q_1 - q_1\partial_x q_3\right)\\
&+ 3\left(4q_1^3q_3 - 6q_1^2q_2^2 - 12q_1^2q_3^2 - 24q_1q_3q_2^2 - 6q_2^2q_3^2 + 4q_1q_3^3 - q_2^4\right)\Bigg).
\end{aligned}
\tag{58}
$$

2.5 Интегруеми уравнения свързани с алгебрата $D_4^{(3)}$

Потенциалът на L се параметризира с

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & -q_2 & q_2 & q_1 & q_2 & q_2 & 0 \\ -q_1 & 0 & q_1 & q_1 & q_1 & -q_2 & 0 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & 0 & q_1 & q_2 & 0 & -q_2 & -q_2 \\ -q_2 & -q_1 & -q_1 & 0 & 0 & q_2 & -q_1 & q_1 \\ -q_1 & -q_1 & -q_2 & 0 & 0 & q_1 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_2 & 0 & -q_2 & -q_1 & 0 & q_1 & q_2 \\ -q_2 & 0 & q_2 & q_1 & q_1 & -q_1 & 0 & q_1 \\ 0 & -q_2 & q_2 & -q_1 & -q_2 & -q_2 & -q_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

и

$$J = \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathcal{H}_1^{(1)}. \tag{60}$$

Отново, потенциалът на M се определя с помощта на рекурсионните оператори. Изборът на J фиксира ad_J^{-1}:

$$\mathrm{ad}_J^{-1} = \frac{1}{4} c_2^6 \left(15\sqrt{3}\ \mathrm{ad}_J^{11} + \frac{1}{16} c_2^6\ \mathrm{ad}_J^{23} \right). \tag{61}$$

Отново, има два възможни случая за Λ_s. Ако s е показател тогава

$$\Lambda_s X = \mathrm{ad}_J^{-1} \left(i\partial_x X + [Q, X] + i c_s^{-1} \left[Q, \mathcal{H}_1^{(s)} \right] \partial_x^{-1} \left\langle [Q, X], \mathcal{H}_1^{(h-s)} \right\rangle \right). \tag{62}$$

в противен случай

$$\Lambda_s X = \mathrm{ad}_J^{-1} \left(i\partial_x X + [Q, X] \right). \tag{63}$$

Първият нетривиален член на йерархията е система от обобщени КдФ уравнения. Той се получава от (31) при $n = 5$. Потенциалът на M е полином от пета степен по λ и се параметризира както следва:

$$K = b\mathcal{H}_1^{(5)}. \tag{64}$$

Елементите $V^{(k)}$ са линейна комбинация от базсисни елементи в $\mathfrak{g}^{(k)}$ с коефициенти $v_i^{(k)}$. Нека въведем следните означения: $c_1 = (1+\sqrt{3})$, $c_2 = (1-\sqrt{3})$, $c_3 = (1+2\sqrt{3})$, $c_4 = (1-2\sqrt{3})$, $c_5 = (4+\sqrt{3})$, $c_6 = (4-\sqrt{3})$.

За $V^{(4)}$ имаме

$$v_1^{(4)} = \sqrt{3}\omega_3^4 c_1 c_2 b q_1, \qquad v_2^{(4)} = \sqrt{3}\omega_3 4 c_2^2 b q_2. \tag{65}$$

За $V^{(3)}$ получаваме

$$\begin{aligned} v_1^{(3)} &= \sqrt{3} b \left(2\partial_x q_1 + \sqrt{3}(2q_1 - c_2^2 q_2)(q_1 + q_2) \right), \\ v_2^{(3)} &= \sqrt{3} b (1-i) \left(\frac{1}{2} c_2^3 \partial_x q_2 + \sqrt{3} c_2 \left(q_1^2 - c_2 q_1 q_2 + \frac{1}{2} c_2^2 q_2^2 \right) \right). \end{aligned} \tag{66}$$

За $V^{(2)}$ следва

$$
\begin{aligned}
v_1^{(2)} &= \sqrt{3}\omega_3^2 b\Big(2\partial_x^2 q_1 + c_2^2(c_5 q_2 c_2 + 4q_1)\partial_x q_2 + 2(2\sqrt{3}q_1 - c_2 q_2)\partial_x q_1 \\
&\quad - \sqrt{3}c_2(q_1+q_2)(2q_1^2 - 4q_1 q_2 - \sqrt{3}c_2^2 q_2^2)\Big), \\
v_2^{(2)} &= -\sqrt{3}\omega_3 b\Big(\frac{1}{2}c_2^4\omega_3^4\partial_x^2 q_2 + 4\omega_3^4 c_2\left(c_2 q_2 - \frac{1}{2}q_1 c_6\right)\partial_x q_1 + c_2^3(q_1 - \sqrt{3}c_2 q_2)\partial_x q_2 \\
&\quad - \sqrt{3}c_2(q_1+q_2)(2\sqrt{3}\omega_3^4 q_1^2 - 2c_2^2 q_2 q_1 - q_2^2 c_2^2)\Big).
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Елементът $V^{(1)}$ има коефициенти

$$
\begin{aligned}
v_1^{(1)} &= \omega_3^2\sqrt{3}b\Big(2\omega_3^2\partial_x^3 q_1 - \omega_3 2(2q_1 - \sqrt{3}c_6 c_2^2 q_2)\partial_x^2 q_2 + 2\omega_3^2(\sqrt{3}q_1 + q_2)\partial_x^2 q_1 - \omega_3^3 c_2^3 c_5(\partial_x q_2)^2 \\
&\quad + c_2(\sqrt{3}\partial_x q_1 + 8\omega_3^2 q_1^2 - 2\omega_3^2 c_2 q_1 q_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_3^2 c_2^5 q_2^2)\partial_x q_2 + 2\omega_3^2 c_2^2(\sqrt{3}c_3 q_1 q_2 - (q_1^2 + q_1^2))\partial_x q_1 \\
&\quad + 4\sqrt{3}\omega_3^2(\partial q_1)^2 - 4\sqrt{3}c_2(2\omega_3^2 q_1 - q_2 c_2^2)q_2(q_1^2 - q_2^2)\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_2^{(1)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)\omega_3^2 b\Big(\frac{1}{2}\omega_3^2 c_2^5\partial_x 3q_2 + c_2^3(\sqrt{3}c_5 q_1 + \frac{1}{2}\omega_3^3 c_2^2 q_2)\partial_x^2 q_1 + \frac{1}{2}\omega_3^2 c_2^5(\omega_3 q_1 + \sqrt{3}q_2)\partial_x^2 q_2 \\
&\quad + 2\omega_3^3 c_2^2 c_6(\partial_x q_1)^2 + 2\omega_3^2(\sqrt{3}(\omega_3 c_2\partial_x q_2 - \frac{1}{3}q_1^2) - \omega_3 c_2^2 q_1 q_2 - 2c_2^3 q_2^2)\partial_x q_1 + \sqrt{3}\omega_3^2 c_2^2(c_2^3(\partial_x q_2)^2 \\
&\quad - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\omega_3 c_2(\sqrt{3}c_4 q_1 q_2 + 8q_1^2 + q_2^2)\partial_x q_2 + 4q_1(2\omega_3 q_1^3 - c_2^2 q_1^2 q_2 - 2q_1 q_2^2 - \omega_3 c_2^2 q_2^3))\Big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_3^{(1)} &= -\sqrt{3}bc_2\Big(2q_1\partial_x^2 q_1 + \frac{1}{2}c_2^4 q_2\partial_x^2 q_2 - (\partial_x q_1)^2 - ((\frac{1}{2}c_2^4 q_2^2 - 2c_2 c_6 q_1 q_2) - 2\sqrt{3}q_1^2)\partial_x q_1 - \frac{1}{4}c_2^4(\partial_x q_2)^2 \\
&\quad + ((2q_1^2 - c_2^3 c_5 q_1 q_2) + \frac{\sqrt{3}}{2})c_2^4 q_2^2\partial_x q_2 + c_2(-\frac{1}{2}c_2 q_1^4 + 8q_1^3 q_2 + 4c_2^2 q_1 q_2^3 - 9c_2 q_1^2 q_2^2 - \frac{1}{2}c_2 q_2^4)\Big)
\end{aligned}
\tag{68}
$$

За $V^{(0)}$ получаваме

$$
\begin{aligned}
v_1^{(0)} &= -\sqrt{3}b\Big(2\partial_x^4 q_1 + 5c_2^3(q_1+q_2)\partial_x^3 q_2 + 5(c_2^2 + 2\sqrt{3}\partial_x q_1 + 2c_2^2(c_2 q_1 q_2 - 2q_1^2 - 2q_2^2))\partial_x^2 q_1 \\
&- 5c_2^2\big(c_2^2 q_2^2 - \partial_x q_1 - c_4\partial_x q_2 + 2\sqrt{3}q_1^2\big)\partial_x^2 q_2 - \frac{5}{2}c_2^4(c_2 c_5 q_2 + 4q_1)(\partial_x q_2)^2 \\
&+ 10c_2\big(c_2(c_2 q_1 - q_2)\partial_x q_1 + c_2^2(q_1^3 c_3 + c_4 q_2^3) + \sqrt{3}q_1 q_2(\frac{1}{2}c_2^4 q_1 + 2q_2)\big)\partial_x q_2 \\
&+ 5c_2^2\big((c_2 q_2 - 4q_1)(\partial_x q_1)^2 + \sqrt{3}c_2(q_1^5 + q_1 q_2^4 + 8q_1^2 q_2^3 + 4q_1^4 q_2 + 2q_1^3 q_2^2 + \frac{4}{5}q_2^5))\Big), \\
v_2^{(0)} &= -\sqrt{3}bc_2\Big(\frac{1}{4}c_2^5\partial_x^4 q_2 + 5c_2^2(q_1+q_2)\partial_x^3 q_1 - 5c_2^2\big(\frac{1}{2}c_2\partial_x q_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}c_2^3\partial_x q_2 + 2(c_2 q_2^2 + c_2 q_1^2 - q_1 q_1)\big)\partial_x^2 q_2 \\
&- 5c_2(\frac{1}{2}c_2^2\partial_x q_2 + \sqrt{3}c_2^2 c_3\partial_x q_1 + 2\sqrt{3}q_1^2)\partial_x^2 q_1 + 10(c_6 q_1 + 2c_2 q_2)(\partial_x q_1)^2 \\
&+ 5\big(2c_2^2(q_2 - 2c_2 q_1)\partial_x q_2 + 2c_2^2(c_3 q_1^3 + c_4 q_2^3) - \sqrt{3}c_2^4 q_1^2 q_2 - 4\sqrt{3}q_1 q_2^2\big)\partial_x q_1 \\
&+ 5c_2^2\big((q_1 - 2c_2 q_2)(\partial_x q_2)^2 + \sqrt{3}(8q_1^3 q_2^2 + 4q_1 q_2^4 + 2q_1^2 q_2^3 + \frac{4}{5}q_1^5 + q_2^5 + q_1^4 q_2))\Big).
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Интегруемите уравнения имат вида

$$
\begin{aligned}
\partial_t q_1 &= -\sqrt{3}b\partial_x\Big(2\partial_x^4 q_1 + 5c_2^3(q_1+q_2)\partial_x^3 q_2 + 5(c_2^2 + 2\sqrt{3}\partial_x q_1 + 2c_2^2(c_2 q_1 q_2 - 2q_1^2 - 2q_2^2))\partial_x^2 q_1 \\
&- 5c_2^2\big(c_2^2 q_2^2 - \partial_x q_1 - c_4\partial_x q_2 + 2\sqrt{3}q_1^2\big)\partial_x^2 q_2 - \frac{5}{2}c_2^4(c_2 c_5 q_2 + 4q_1)(\partial_x q_2)^2 \\
&+ 10c_2\big(c_2(c_2 q_1 - q_2)\partial_x q_1 + c_2^2(q_1^3 c_3 + c_4 q_2^3) + \sqrt{3}q_1 q_2(\frac{1}{2}c_2^4 q_1 + 2q_2)\big)\partial_x q_2 \\
&+ 5c_2^2\big((c_2 q_2 - 4q_1)(\partial_x q_1)^2 + \sqrt{3}c_2(q_1^5 + q_1 q_2^4 + 8q_1^2 q_2^3 + 4q_1^4 q_2 + 2q_1^3 q_2^2 + \frac{4}{5}q_2^5))\Big), \\
\partial_t q_2 &= -\sqrt{3}bc_2\partial_x\Big(\frac{1}{4}c_2^5\partial_x^4 q_2 + 5c_2^2(q_1+q_2)\partial_x^3 q_1 - 5c_2^2\big(\frac{1}{2}c_2\partial_x q_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}c_2^3\partial_x q_2 + 2(c_2 q_2^2 + c_2 q_1^2 - q_1 q_1)\big)\partial_x^2 q_2 \\
&- 5c_2(\frac{1}{2}c_2^2\partial_x q_2 + \sqrt{3}c_2^2 c_3\partial_x q_1 + 2\sqrt{3}q_1^2)\partial_x^2 q_1 + 10(c_6 q_1 + 2c_2 q_2)(\partial_x q_1)^2 \\
&+ 5\big(2c_2^2(q_2 - 2c_2 q_1)\partial_x q_2 + 2c_2^2(c_3 q_1^3 + c_4 q_2^3) - \sqrt{3}c_2^4 q_1^2 q_2 - 4\sqrt{3}q_1 q_2^2\big)\partial_x q_1 \\
&+ 5c_2^2\big((q_1 - 2c_2 q_2)(\partial_x q_2)^2 + \sqrt{3}(8q_1^3 q_2^2 + 4q_1 q_2^4 + 2q_1^2 q_2^3 + \frac{4}{5}q_1^5 + q_2^5 + q_1^4 q_2))\Big).
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Тези уравнения имат Хамилтониан с плътност:

$$
\begin{aligned}
H = -\sqrt{3}b\Bigg[&\frac{2}{5}q_1\partial_x^4 q_1 + \frac{1}{20}c_2^6 q_2\partial_x^4 q_2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}(\partial_x q_1)^3 - 2c_2\left(\frac{1}{4}c_2^3\partial_x q_2 - 3c_2q_2^2 + c_2q_1^2 - c_6q_1q_2\right)(\partial_x q_1)^2 \\
&+ \frac{1}{5}(\partial_x^2 q_1)^2 + \frac{1}{40}c_2^6(\partial_x^2 q_2)^2 + \left(c_2^3 q_2(q_1+q_2) - \frac{2}{5}\partial_x q_1\right)\partial_x^3 q_1 + c_2^3\left(q_1(q_1+q_2) - \frac{1}{20}c_2^3\partial_x q_2\right)\partial_x^3 q_2 \\
&+ \left(\frac{1}{5}(4\sqrt{3}q_1 - c_2^4c_3q_2)\partial_x q_1 - c_2^2\left((q_2 - \sqrt{3}q_1)\partial_x q_2 + 2q_1(2(q_1^2+q_2^2) - c_4q_1q_2) + \sqrt{3}c_2^2q_2^3\right)\right)\partial_x^2 q_1 \\
&- c_2^2\left(\frac{1}{2}c_2^2(q_1 + \sqrt{3}q_2)\partial_x q_1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}c_2^4q_2 + c_4q_1\right)\partial_x q_2 + 2c_2^2(q_1^2 + q_2^2\frac{1}{2}c_3q_1q_2)q_2 + 2\sqrt{3}q_1^3\right)\partial_x^2 q_2 \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{3}c_2c_2^2\left(\frac{5}{2}(q_1^6 + q_2^6) + 40q_1^3q_2^3 + \frac{15}{2}(q_1^4q_2^2 + 3q_1^2q_2^4) + 12(q_1q_2^5 + q_1^5q_2)\right) \\
&- \frac{\sqrt{3}}{3}c_2\left(\frac{1}{4}c_2^5(\partial_x q_2)^3 + 3\sqrt{3}c_2^3\left(q_1^2 + \frac{1}{3}q_2^2 + \frac{1}{6}c_2c_5q_1q_2\right)(\partial_x q_2)^2\right) \\
&+ 2c_2\partial_x q_1\left(\frac{1}{2}c_2(\partial_x q_2)^2 + c_2\left(4\sqrt{3}c_2q_1q_2 + (q_1^2 - \frac{1}{2}c_2^2q_2^2)\right)\partial_x q_2\right) \\
&+ 2\frac{\sqrt{3}}{3}c_2\left(\sqrt{3}c_2^2(c_4q_2^3 + c_3q_1^3) + \frac{3}{2}q_1q_2(c_2^4q_1 + 4q_2)\right)q_1(\partial_x q_2) \\
&+ 2c_2\partial_x q_1\left(q_2(c_2^2(c_3q_1^3 + c_4q_2^3) - \frac{1}{2}q_1q_2(4q_2 + c_2^4q_1))\right)\Bigg]
\end{aligned}
\tag{71}
$$

3 Решаване на уравненията

В тази глава са разгледани спектралните свойства на Лаксовите оператори. Въведени са и минимални данни на разсейване. Дефинирани са фундаменталните аналитични решения за съответните сектори на аналитичност и задачата за разсейване е сведена до проблем на Риман-Хилберт. Оставяйки настрана подробностите имаме:

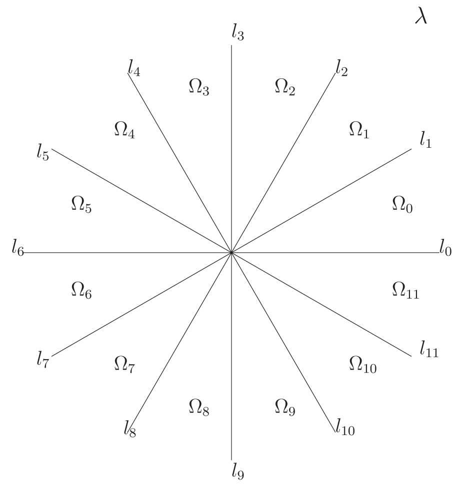
- Непрекъснатият спектър на L запълва съвкупността от лъчи в комплексната равнина на λ, за които са в сила:

$$\mathrm{Im}\lambda\alpha(J) = 0, \tag{72}$$

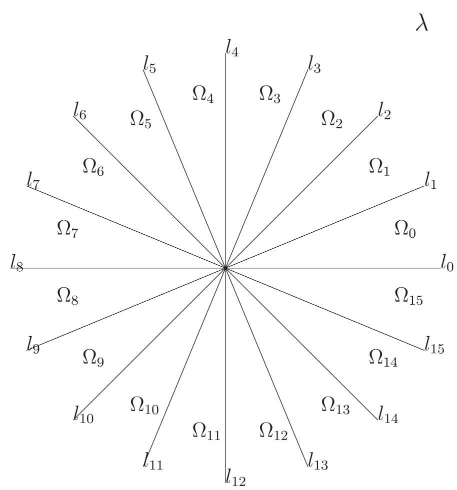
  за всяко α корен на D_4. Броят на лъчите е $2h$. Те сключват помежду си ъгли кратни на π/h.

- Във всеки от секторите Ω_ν, между два съседни лъча l_ν и $l_{\nu+1}$ могат да бъдат построени фундаментални аналитични решения $\xi_\nu(x,t,\lambda)$, които върху лъчите са линейно свързани:

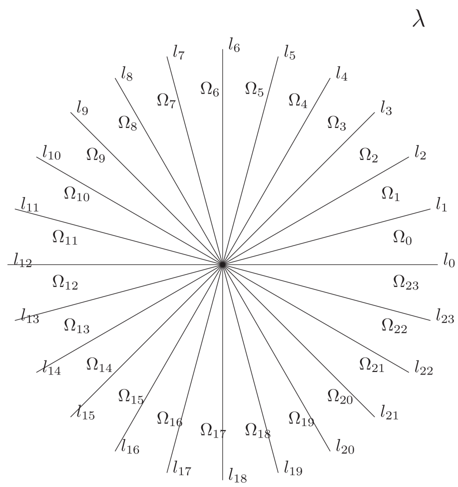
$$\xi_{\nu+1}(x,t,\lambda) = \xi_\nu(x,t,\lambda)G_\nu(x,t,\lambda), \qquad \nu = 0,\dots,l_{2\nu-1},$$



Фигура 2: Непрекъснатият спектър на L за $D_4^{(1)}$ със $\mathbb{Z}_6$-симетрия запълва лъчите l_ν, $\nu = 0, \ldots, 11$; Ω_ν са регионите на аналитичност за фундаменталното аналитично решение $\xi_\nu(x, t, \lambda)$.



Фигура 3: Непрекъснатият спектър на L за $D_4^{(2)}$ със $\mathbb{Z}_8$-симетрия запълва лъчите l_ν, $\nu = 0, \ldots, 15$; Ω_ν са регионите на аналитичност за фундаменталното аналитично решение $\xi_\nu(x, t, \lambda)$.



Фигура 4: Непрекъснатият спектър на L за $D_4^{(3)}$ със $\mathbb{Z}_{12}$-симетрия запълва лъчите l_ν, $\nu = 0, \dots, 23$; Ω_ν са регионите на аналитичност за фундаменталното аналитично решение $\xi_\nu(x,t,\lambda)$.

$$G_\nu(x,t,\lambda) = e^{-i\lambda Jx - i\lambda^3 Kt} G_{\nu,0}(\lambda) e^{i\lambda Jx + i\lambda^3 Kt}.$$

- Като данни на разсейването въвеждаме границите на фундаменталните аналитични решения към лъчите $l_\nu e^{\pm i0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^{-i\lambda Jx}\xi_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx} &= S_\nu^+(t,\lambda), \\ \lim_{x\to\infty} e^{-i\lambda Jx}\xi_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx} &= T_\nu^-(t,\lambda)D_\nu^+(\lambda), \end{aligned} \qquad \forall\lambda \in l_\nu e^{+i0}, \tag{73}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} e^{-i\lambda Jx}\xi_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx} &= S_{\nu+1}^-(t,\lambda), \\ \lim_{x\to-\infty} e^{-i\lambda Jx}\xi_\nu(x,t,\lambda)e^{i\lambda Jx} &= T_{\nu+1}^+(t,\lambda)D_{\nu+1}^-(\lambda), \end{aligned} \qquad \forall\lambda \in l_{\nu+1} e^{-i0}, \tag{74}$$

По такъв начин обратната задача за разсейване се свежда до проблем на Риман-Хилберт със съшиваща функция $G_\nu(x,t,\lambda)$. Това позволява уравненията да бъдат решени чрез метода на обличането на Захаров-Шабат [5, 6]. При този метод, тръгвайки от известно решение (нека да го наречем "голо") получаваме ново решение (нека да го наречем "облечено"). Обличащ множител съвместим с наложената редукция се задава с

$$u = 1 + \sum_{i=0}^{h-1} A_i, \qquad A_i = \frac{C^i(A)}{\omega^i\lambda - \lambda_0}, \tag{75}$$

където $\omega = e^{\frac{2\pi i}{h}}$ и C е Кокстеровия автоморфизъм за съответната алгебра.

Обличащият множител удовлетворява уравнението

$$
\begin{aligned}
i\partial_x u + (Q_1 - \lambda J)u - u(Q_0 - \lambda J) = 0, \\
i\partial_x u^{-1} + (Q_0 - \lambda J)u^{-1} - u^{-1}(Q_1 - \lambda J) = 0,
\end{aligned}
\tag{76}
$$

където Q_0 е потенциала на "голото"решение.

Тъй като u е групов елемент, неговият обратен се задава с

$$
u^{-1} = Su^T S = 1\!\!1 + \sum_{j=0}^{h-1} B_j, \qquad B_j = \frac{S(C^j(A))^T S}{\omega^j \lambda - \lambda_0} = \frac{C^j(SA^TS)}{\omega^j \lambda - \lambda_0}, \tag{77}
$$

Следващите стъпки са близки до това, което са направили Захаров и Михайлов [14]. Имаме

$$
uu^{-1} = uSu^T S = 1\!\!1. \tag{78}
$$

От асимптотиката на u,теоремата на Луивил и наложената редукция е достатъчно да сметнем резидиума на горното уравнение в λ_0. Получаваме

$$
\begin{aligned}
&ASA^TS = 0, \\
&A\left(1 + \sum_{j=1}^{h} B_j\right) S + \left(1 + \sum_{i=1}^{5} A_i\right) SA^T = 0.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

За да решим (79) нека предположим, че

$$
A = MN^T, \tag{80}
$$

където M и N са $8 \times k$ матрици. Тогава (79) е еквивалентно на

$$
NSN^T = 0, \tag{81}
$$

$$
\left(1 + \sum_{i=1}^{h} A_i\right) SN = -MF, \tag{82}
$$

$$
N^T \left(1 + \sum_{j=1}^{h} B_j\right) S = FM^T, \tag{83}
$$

Където F е $k \times k$ матрица. Транспонирайки (83) получаваме, че F е антисиметрична и уравненията (82) и (83) са еквивалентни. Следователно

$$
NSN^T = 0, \tag{84}
$$

$$
MF + SN + \sum_{i=1}^{h} \frac{C^i(MN^T)SN}{\omega^i \lambda_0 - \lambda_0} = 0, \tag{85}
$$

където N играе ролята на поляризационен вектор и M е функция на N. Зависимостта $N(x,t)$ намираме като пресмятаме резидиума на (76) в λ_0. Потенциалът $Q_1(x,t)$ се възстановява, чрез пресмятане на границата $\lambda \to \infty$ в (76)

$$Q_1 = Q_0 + \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\,[J,u] \tag{86}$$

което води до

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_0 + \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\,[J,\mathbb{1}] + \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{i=0}^{h-1} \frac{\lambda\,[J, C^i(A)]}{\lambda\omega^i - \lambda_0}, \\ &= Q_0 + \sum_{k=0}^{h-1} \frac{[J, C^i(A)]}{\omega^i}. \end{aligned} \tag{87}$$

Показаната процедура може да бъде итерирана, като за началната итерация изберем например $Q_0 = 0$.

4 Научни приноси

Основните постижения на дисертационния труд могат да се обобщят по следния начин:

- С помощта на автоморфизма C_1 е построена стандартната градуировка $\mathfrak{g} = \bigoplus_{s=0}^{5} \mathfrak{g}^{(s)}$ и базис в $D_4^{(1)}$. Построена е и Лаксова двойка, за която условието за съгласуваност води до единствената едно-параметрична система от 4 уравнения от типа на мКдФ позната до момента.

- Композирайки подходящ вътрешен автоморфизъм на D_4 от 4-ти ред с външен автоморфизъм от втори ред е построена градуировката $\mathfrak{g} = \bigoplus_{s=0}^{7} \mathfrak{g}^{(s)}$ и базис в усуканата алгебра на Кац-Муди $D_4^{(2)}$. Условието за съвместимост на съответната Лаксова двойка води до система от 3 уравнения от типа на мКдФ.

- Композирайки подходящ вътрешен автоморфизъм на D4 от 3-ти ред с външев автоморфизъм от трети ред е построена градуировката $\mathfrak{g} = \bigoplus_{s=0}^{11} \mathfrak{g}^{(s)}$ и базис в усуканата алгебра на Кац-Муди $D_4^{(3)}$. Съответната Лаксова двойка свързана с нея води до система от 2 от типа уравнения обобщени КдФ.

- Построени са рекурсионни оператори, които пораждат съответните йерархии от интегруеми уравнения както и техните йерархии от Хамилтонови структури.

- Разгледани са спектралните свойства на Лаксовите оператори. Построени са фундаменталните аналитични решения и обратната задача на разсейване е сведена до задача на Риман-Хилберт върху система от h прави сключващи ъгли π/h.

- Разгледан е методът на обличането. Параметризирането на обличащия множител е сведено до решаване на система линейни уравнения.

5 Публикации и доклади на международни конференции

Публикации във връзка с дисертацията:

- V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, and S.K. Varbev, *Soliton equations related to the Kac-Moody algebra $D_4^{(1)}$*, Eur. Phys. J. Plus (2015) **130**: 106
- V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, S.K. Varbev, *MKdV equations related to the $D_4^{(2)}$ algebra*, to be published in Rom. J. Phys, **61**, n. 1-2, 2016.
- V.S. Gerdjikov, D.M. Mladenov, A.A. Stefanov, and S.K. Varbev, *On a oneparameter family of mKdV equations related to the $\mathfrak{so}(8)$ Lie algebra*, Mathematics in Industry, ed. A. Slavova, 345-355, (Cambridge Scholar Publishing, 2014).

Участия в конференции и докладвани резултати:

- "International School and Workshop Nonlinear Mathematical Physics and Natural Hazards November 28 – December 2 2013, Sofia, Bulgaria - участие с постер на тема "On MKdV equations related to so(8)".
- "Eighth Annual Meeting of the Bulgarian Section of Society of Industrial and Applied Mathematics"(BGSIAM'13), December 18 - 19, 2013, Sofia, Bulgaria - изнесен доклад на тема "On a Family of MKdV Equations Related to so(8) Algebra".
- "The 9-th Workshop “Quantum Field Theory and Hamiltonian Systems”, 24-28 September 2014, Sinaia - изнесен доклад на тема “MkDV-type equations related to the affine Lie algebras $D_4^{(s)}$”.
- “NTADES 2015”, 06-10 July 2015, Sofia, IMI - BAS - изнесен доклад на тема “MkDV-type equations related to the affine Lie algebras $D_4^{(1)}$, $D_4^{(2)}$ and $D_4^{(3)}$.

Литература

[1] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, and R.M. Miura, "Method for solving the Korteweg-de Vries equation Phys. Rev. Lett. **19**, 1095-1097 (1967).

[2] P.D. Lax, "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves Comm. Pure Appl. Math. **21**, 467-490 (1968).

[3] M. Wadati, "The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation J. Phys. Soc. Japan **32**, 1681-1687 (1972).

[4] V.G. Drinfeld and V.V. Sokolov, "Equations of KdV type and simple Lie algebras Sov. Math. Dokl. **23** 457-462 (1981).

[5] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, "A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I. Funct. Anal. Appl. **8**, 226-235 (1974).

[6] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, "Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. II. Funct. Anal. Appl. **13**, 166-174 (1979).

[7] A.V. Mikhailov, "The reduction problem and the inverse scattering method Physica **3D 1 & 2**, 73-117 (1981).

[8] V.S. Gerdjikov and A.B. Yanovski, "On soliton equations with $\mathbb{Z}_h$ and $\mathbb{D}_h$ reductions: conservation laws and generating operators J. Geom. Symmetry Phys. **31**, 57-92 (2013).

[9] R. Carter, *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).

[10] M. Goto and F.D. Grosshans, *Semisimple Lie Algebras*, (Marcel Dekker, New York, 1978).

[11] S. Helgasson, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics **34**, (AMS, Providence, Rhode Island, 2012).

[12] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Books on Mathematics (Dover, 1979).

[13] V. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[14] V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov, "On the Integrability of Classical Spinor Models in Two-Dimensional Space-Time Commun. Math. Phys. **74**, 2140 (1980)