РЕЦЕНЗИЯ

от проф. дмн Тодор Желязков Моллов
професор във ФМИ при ПУ "Паисий Хилендарски"
на дисертационен труд за получаване на
образователната и научна степен „доктор“
по професионално направление 4.5 „Математика“
(Алгебра и теория на числата)
Тема: "(2,3)-пораждане на някои крайни прости групи"
Автор: Константин Драганов Табаков
Научни ръководители:
$\boxed{\text{проф. д-р Керопе Чакърян}}$ и доц. д-р Пламен Сидеров

Дисертационният труд е посветен на теорията на крайните прости групи и по-специално на (2,3)-пораждане на някои крайни прости групи. В България, в теорията на крайните прости групи, са работили проф. Керопе Чакърян, научен ръководител на дисертанта и доц.д-р Никола Петров. Изследванията на Чакърян се продължават в България главно от доцент д-р Цанко Генчев и от дисертанта, които са ученици на Чакърян.

1) Анализ на научните и научно-приложните постижения в дисертационния труд

Дисертацията се състои от 66 страници, от които увод от 17 стр., списък на публикациите по дисертацията, съдържание, изложение и Библиография от 48 заглавия.

Една група G наричаме проста, ако няма нетривиални нормални подгрупи. Тъй като крайните прости абелеви групи са цикличните групи от прост ред, които имат тривиална структура, то в дисертацията се разглеждат само неабелеви крайни прости групи.

Съдържанието на дисертационният труд е изложено в увод и 4 глави.

В увода отначало е дадена кратка историческа справка на получените резултати за крайните прости групи и класификационната теорема на тези групи, обявявана 2 пъти за завършена: първия път в 1980 г. от група американски математици и втори път през м. март, 2004 г. с интернет-публикация на Aschbacher и Smith в обем от 1250 стр..

В т. 1 на увода се формулира един основен резултат, че всяка крайна проста група G се поражда от два свои подходящи елемента x и y, т.е. $G = \langle x, y \rangle$. За алтернативните групи A_n, $n \geq 5$ този резултат е доказан от Miller (1901), за групите от Лиев тип – от Steinberg (1962) и накрая за спорадичните групи – от Aschbacher-Guralnick (1984). Т. 1 от увода е посветена на (2,3)-пораждането на крайните прости групи. Ще отбележим, че една группа се нарича (2,3)-породена, ако се поражда от два елемента x и y съответно от редове 2 и 3. Ако при това xy е от ред 7, тя се нарича Хурвицова или (2,3,7)-породена. В този случай (x, y) се нарича Хурвицова двойка елементи. Liebeck-Shalev (1996) и и Lübeck-Malle (1999) посочват класове от крайни прости групи, които са (2,3)-породени.

В т. 2 на увода се разглежда един важен клас от крайните прости групи, а именно от Хурвицовите, т.е. от (2,3,7)-породените групи. Изучаването на Хурвицовите групи започва в края на XIX век. Тези групи играят голяма роля в теорията на Римановите повърхнини. Най-малка Хурвицова група е $PSL_2(7)$ от ред 168.

В увода се дава описание на резултатите на дисертацията (т.3), накои основни понятия и означения (т.4) и публикации във връзка с дисертацията.

Централна роля в глави 1 и 2 на дисертационният труд играят проективните специални линейни групи $PSL_n(q) = L_n(q)$ над крайно поле от q елемента. Групата $PSL_n(q) = L_n(q)$ е фактор–групата $SL_n(q)/Z(SL_n(q))$, където $SL_n(q)$ е специалната линейна група над полето от q елемента и $Z(SL_n(q))$ е центъра на тази група. Групите $PSL_n(q) = L_n(q)$ са крайни прости групи (с изключение на случаите $PSL_2(2) \cong S_3$ и $PSL_2(3) \cong A_4$). P. Sanchini и M. C. Tamburini (1994) доказват, че групите $PSL_n(q)$ са (2,3)-породени за $n \geq 13$ и всяко q. За „малките“ стойности на n няма общ подход и са получени само някои частни резултати. Например за $n = 5$ и всяко q (2,3)-породеноста е доказана от Tchakerian (2005). В 1994 и 1996 г., в Communications in Algebra, Ди Мартино и Н. А. Вавилов доказват (2,3)-породеност на $PSL_n(q)$ за $n \geq 5$ и нечетно $q \neq 9$. Ограничението $q \neq 9$ следва от метода на доказателството.

Ц. Генчев и Е. Генчева (2015) доказват, че групите $PSL_8(q)$ са (2,3)-породени за всяко q.

В глави 1 и 2 се доказва съответно (теореми 1.1 и 2.1), че групите $PSL_6(q)$ и $PSL_7(q)$ са (2,3)-породени за всяко q. В доказателството на теорема 1.1 са разгледани два случая: $q \neq 2,\ 4$ и $q = 2,\ 4$. Ако $x \in SL_n(q) = G$, то чрез $\overline{x}$ се означава образа на x в $PSL_n(q) = \overline{G}$. В доказателството на теорема 1.1 (съответно теореми 2.1) са намерени такива пораждащи x и y на G, така че групата $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ не попада в никоя от максималните подгрупи на $\overline{G}$, т. е. $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \overline{G}$.

Доказателството на тези резултати е конструктивно. То използва списъците на максималните подгрупи съответно на групите $PSL_6(q)$ и $PSL_7(q)$. Този подход използва статиите на проф. Чакърян, посветени на по-малките случаи, а именно за групите $PSL_4(q)$ (Manolov-Tchakerian (2004)) и за $PSL_5(q)$ (Tchakerian (2005)).

Доказателството на теореми 1.1 и 2.1 се различава съществено от цитирания резултат на Ди Мартино и Н. А. Вавилов, които използват класификацията на крайните неприводими линейни групи, породени от корневи подгрупи. Пораждащите елементи, които те са намерили, са напълно различни от тези в теореми 1.1 и 2.1.

Ограничението нечетно $q \neq 9$ в техните работи е избегнато в теореми 1.1 и 2.1 на дисертацията и това е предимство на подхода при доказването на тези теореми.

Глава 3 е информативна: тя се използва в глава 4. В нея се дава индормация за групите ${}^2G_2(3^n)$ на Ree. Тези групи се дефинират като прости подгрупи на групите $G_2(q)$ на Chevalley-Dickson със специални свойства. Групата ${}^2G_2(3^n)$ на Ree съвпада с централизатора на специален автоморфизъм σ на $G_2(q)$ от ред 2. Дават се основни означения, свързани с $G_2(q)$. Групите на Ree притежават 7-мерно матрично представяне над полето от 3^{2m+1} елемента. Формулира се една обща лема 3.1, която дава информация за подгруповата структура, пораждащите елементи и съотношенията между тях в групите ${}^2G_2(3^n)$ на Ree.

В Глава 4 се разглеждат групите $G =^2 G_2(3^n)$ на Ree. Класифицирват се всички Хурвицови двойки елементи x и y на и се доказва, че G съдържа точно Хурвицовите подгрупи $SL_2(8)$, $PSL_2(27)$, ако $3|n$, и ${}^2G_2(3^m)$ за всеки делител $m > 1$ на n, ако $n > 1$ (Теорема 4.2). За целта се използват методите на Tchakerian (2005) и Tchakerian-Petrov (1985).

Авторът отбелязва, че резултатът (i) на Теорема 4.2 и съдържането на $SL_2(8)$ в G следва и от по-общи съображения от работата на Tchakerian от 2012 г..

Класифицирват се всички двойки (2,3)-пораждащи елементи на G (Теорема 4.6).

Ще отбележим, че научните резултати на дисертацията са получени при силна конкуренция с чуждестранни математици. За получаването им не се използува класификацията на крайните прости групи. Част от тях обощават резултати на чуждестранни математици. Методите на изследване в научните публикации на Табаков са теоретико-групови.

Научните приноси на дисертацията представляват новости за науката. Получени са редица нови оригинални резултати за (2,3)-пораждане на някои крайни прости групи.

Основните научни приноси на дисертационният труд са следните:

Доказва се, че

1) проективната специална линейна група $PSL_6(q)$ е (2,3)-породена за всяко q,

2) групата $PSL_7(q)$ е (2,3)-породена за всяко q и

3) групата ${}^2G_2(3^n)$ на Ree съдържа точно Хурвицовите подгрупи $SL_2(8)$, $PSL_2(27)$, ако $3|n$, и ${}^2G_2(3^m)$ за всеки делител $m > 1$ на n, ако $n > 1$.

Класифицирват се

4) всички Хурвицови двойки елементи x и y на групата ${}^2G_2(3^n)$ на Ree и

5) всички двойки (2,3)-пораждащи елементи на групата ${}^2G_2(3^n)$ на Ree.

Дисертантът е много добре литературно осведомен.

2) Общо описание на публикациите, отражение на резултатите в трудовете на други автори и импакт-фактор

Публикациите, свързани с дисертацията, са три. Две от тях са в съавторство с научния ръководител проф. Чакърян и една е самостоятелна. Трите работи са рецензирани, а именно една от тях е публикувана в Доклади на БАН с импакт фактор 0,211, една е в списание Сердика и една е в трудовете на пролетните конференции на СМБ. Считам, че участието на авторите в съвместните работи е равностойно. Работата в Сердика и в пролетната конференция на СМБ са са цитирани по 4 пъти от чуждестранни автори, т.е. общо 8 пъти.

3) Апробация на резултатите

Резултатите от дисертацията са докладвани на следните научни форуми: Пролетна научна сесия на ФМИ, 2012 г., 2014 г. и 2015 г.; Съвместен семинар „Алгебра и Логика"-ИМИ-БАН, катедра Алгебра-ФМИ-СУ в памет на проф. Керопе Чакърян (1944-2012), 1 март 2013; 42-ра пролетна конференция на СМБ, Боровец, 2-6 Април, 2013 и International conference Mathematical Days in Sofia, July 7-10, 2014, Sofia, Bulgaria и

4) Критични бележки

1) В началото на глава 4 е записано, че за n нечетно,

"...групите на Ree ${}^2G_2(3^n)$ съдържат точно следните Хурвицови подгрупи: ...${}^2G_2(3^m)$ за всеки делител $m > 1$ на n, ако $n > 1$."

Според Теорема 4.2, случай (iii), ${}^2G_2(3^n)$ съдържа "...${}^2G_2(3^m)$, където $m > 1$ е най-малкия делител на n, за който $z \in GF(3^m)$."

Следователно, според Теорема 4.2, ${}^2G_2(3^n)$ съдържа само една група ${}^2G_2(3^m)$. По такъв начин твърдението в началото на глава 4 не е еквивалентно na случай (iii) на Теорема 4.2. Дисертантът обаче ми представи допълнително удовлетворително изложение, от което следва, че Теорема 4.2 се усилва според твърдението в началото на глава 4, а именно, че "...групите на Ree ${}^2G_2(3^n)$ съдържат точно следните Хурвицови подгрупи: ...${}^2G_2(3^m)$ за всеки делител $m > 1$ на n, ако $n > 1$", където n е нечетно число.

2) На стр.24, средата, $r \in Z\Phi$ е вектор и $\chi(r) = z^r$. Но z трябва да принадлежи на F^*, а z^r е "z на степен вектор,"което е некоректно. Табаков обаче ми представи допълнителна вярна корекция.

3) Не е съвсем ясно, как се дефинира $h(z)$ в Теорема 4.2 и Теорема 4.6. Дисертантът обаче ми представи подробно изложение, свързано с $h(z)$.

4) Макар че приносите на дисертацията ясно личат от автореферата, Табаков не е включил в него и в дисертационния труд авторска справка за приносите си.

5) Качества на автореферата

Авторефератът отразява достатъчно пълно съдържанието на дисертационния труд и основните приноси на дисертанта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисертационният труд съдържа научни резултати, които представляват оригинален принос в теорията на крайните прости групи и по-специално за (2,3)-пораждане на някои крайни прости групи. Тези резултати продължават и обобщават резултати на чуждестранни математици и на проф. Керопе Чакърян. Представеният дисертационен труд отговаря напълно на изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за прилагане на ЗРАСРБ, Правилника за развитие на академичния състав на СУ "Св. Климент Охридски"и специфичните изисквания на ФМИ.

Дисертационният труд показва, че докторантът Константин Драганов Табаков притежава задълбочени теоретични знания и професионални умения, като демонстрира качества и умения за самостоятелно провеждане на научно изследване. Поради гореизложеното, давам своята положителна оценка за проведеното изследване, представено от рецензирания по-горе дисертационен труд, автореферат, постигнати резултати и приноси, и предлагам на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен "доктор"на Константин Драганов Табаков в областта на висшето образование: 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма Алгебра и теория на числа.

1.10.2015 г. Рецензент:

гр. Пловдив (проф. дмн Тодор Ж. Моллов)