

РЕЦЕНЗИЯ

на дисертационния труд на Георги Иванов Георгиев
на тема
”Неинтегрируемост в смисъл на Лиувил на някои
уравнения на Пенлеве от по-висок ред ”
за придобиване на образователната и научна степен
“доктор” по научната специалност 4.5 Математика
от: проф. Владимир Стефанов Герджиков, ИЯИЯЕ
при БАН

14 септември 2015 г.

1 Сведения за докторанта

Г-н Георги Иванов Георгиев е роден през 1967 г. Завършва Математически факултет на СУ като магистър през 1992 г. по математика (специалност "Диференциални уравнения"). От 1994 до 1997 е редовен докторант към катедрата по диференциални уравнения на ФМИ на СУ. От 1998 година е асистент по математически анализ във ВТУ "Тодор Каблешков София.

2 Актуалност

Представената дисертация е посветена на една актуална и перспективна област от съвременната математика – задачата за интегрируемост в квадратури на динамични системи. Добре е известно, че всяка такава система допуска локално решение. Трудният въпрос е дали такова решение съществува глобално.

За Хамилтоновите системи с краен брой N степени на свобода е добре известна теоремата на Лиувил. Тя доказва, че системата е глобално (напълно) интегрируема, ако притежава N на брой функционално независими първи интеграла в инволюция. Понакога, обаче, се оказва, че системата има нужния брой интеграла, но те не са в инволюция.

3 Познава ли дисертантът състоянието на проблема?

От цялостното изложение в дисертацията, както и от списъка на цитираната литература от повече от 100 заглавия личи, че дисертантът е добре запознат с основните резултати и публикации по тази тематика.

4 Адекватност на избраната методика

Дисертантът има дълбоки познания в няколко области на съвременната математика: обикновени диференциални уравнения, Хамилтонови системи, крайномерни динамични системи и др. Това му е позволило да подходи напълно адекватно към решаване на поставените му задачи.

5 Приноси на дисертационният труд

Дисертацията се състои от увод, три глави, едно допълнение и списък на литературата, съдържащ 102 цитирани литературни източници.

В уводната глава авторът прави кратък обзор на съществуващите методи за установяване на интегрируемост или неинтегрируемост на (система от) обикновени диференциални уравнения. Специално внимание е обърнато на свойствата на уравненията на Пенлеве, които не притежават подвижни критични особенни точки. През последните 3-4 десетилетия бе разбрано, че има дълбоки връзки между така наречените солитонни уравнения и уравненията на Пенлеве. В частност, бе разработен тест с който да се провери дали дадено нелинейно еволюционно уравнение (НЕУ) има свойството на Пенлеве. Хипотезата, която се потвърди за редица конкретни случаи, бе, че ако теста даде положителен резултат, то съответното НЕУ е интегрируемо.

Въпросът за интегрируемостта на самите уравнения на Пенлеве е от друг характер, който се изследва с качествено други методи. Важен момент тук е избора на класа от функции, на който принадлежат решенията на разглежданото уравнение, както и установяването на групата на Галоа, която се асоциира с уравнението. В края на увода кратко се формулират задачите, решени в дисертацията и подходите за тяхното решаване.

Първата глава резюмира основните факти от теорията на интегрируемите Хамилтонови системи. В частност, тук е изложена теорията на Галоа за анализ на интегрируемостта на системи диференциални уравнения. Основна роля тук играе диференциалната група на Галоа, и по-специално свързаната ѝ част съдържаща единицата $G^{(0)}$. Изследвана

е и връзката между групата на монодромите на дадено диференциално уравнение и диференциалната му група на Галоа. Разгледани са и линейни системи с особености, за които се въвеждат локална и глобална групи на Галоа. Във всички тези случаи е установено, че ако $G^{(0)}$ не е абелева, системата е неинтегрируема. Обратното обаче, не е непременно вярно: ако $G^{(0)}$ се окаже абелева, това не гарантира интегрируемостта на съответното уравнение. В края на главата са изведени условия за интегрируемост на Хамилтонови системи от типа на Ламе. Разгледан е и случаят на пертурбирани комплексни Хамилтонови системи с една степен на свобода, притежаващи самопресичащи се комплексни сепаратриси.

Втора глава е посветена на уравненията на Пенлеве от по-висок ред. Тук е доказан единият от основните резултати на дисертацията, отнасящ се до неинтегрируемостта на едно от висшите уравнения на Пенлеве (уравнение F-XVIII в класификацията на Косгроув) чрез рационални първи интеграли. Доказателството разбива рационалните решения на F-XVIII на две семейства и за всяко от тях построява явно съответната $G^{(0)}$, която се оказва неабелева. По-нататък се разглеждат уравнения за обобщени хипергеометрични функции, които се свързват и с други уравнения на Пенлеве. В частност, показана е неинтегрируемостта чрез рационални първи интеграли и на други две уравнения от типа на Пенлеве $P_{II}^{(2)}$ и $P_{II}^{(3)}$.

В трета глава на дисертацията е разгледана система, описваща стационарните решения на обобщение на уравнението на Грос-Питаевски в двумерно пространство-време. Уравнението на Грос-Питаевски описва конденсат на Бозе-Айнщайн, а неговите обобщения обхващат случаите, когато конденсатът се състои от няколко типа бозони и няколко типа фермиони, удържани заедно от външен потенциал $V(x) = V_0 \operatorname{sn}^2(\alpha x, k)$. Стационарните решения на тази система се описват чрез елиптични функции. За тази система е доказано, че тя е интегрируема само ако константата g_{BF} , описваща бозон-фермионното взаимодействие е 0. Последователно са разгледани всички възможни нееквивалентни конфигурации на параметрите в системите и са приложени методите, развити в предишните две глави на дисертацията.

6 Преценка на публикациите по дисертационния труд

Дисертацията на г-н Георгиев се основава на

- 3 журнални статии, публикувани в SIGMA, Chaos, Solitons and Fractals, и Mech. Trans. Commun.

- 1 доклад в трудове на международни конференции AIP Conf. Proc.

От гореизброените публикации една е самостоятелна, а другите три са в съавторство с неговият научен консултант.

Според мен в дисертацията с нови средства са изследвани съществено нови страни в областта на съвременната математика и математическа физика, и са получени важни нови резултати за съвременната наука.

Резултатите носят фундаментален характер. Те са публикувани през последните две години и техни цитирания досега не съм заобязал.

7 Личният принос на дисертанта

Приемам, че г-н Георгиев има съществен личен принос за резултатите включени в дисертацията.

8 Критични бележки и препоръки

Забелязах някои грешки от технически характер както в дисертацията, така и в автореферата.

Тези бележки не могат да променят високата ми оценка за качеството на научните резултати.

9 Заключение

Давам висока оценка на резултатите получени от дисертанта.

Както броят, така и качествата на публикациите удовлетворяват изискванията за образователната и научна степен "доктор".

Въз основа на всичко казано по-горе съм убеден, че представеният дисертационен труд съдържа ценен научен принос, който удовлетворява традиционните изисквания на ФМИ. Препоръчвам на членовете на журито по защитата, да гласуват за присъждане на научната и образователна степен Доктор на Георги Иванов Георгиев .

**София,
14 септември 2015**

/професор, д.ф.н. В. Герджиков/