Р Е Ц Е Н З И Я

на дисертационния труд на Георги Иванов Георгиев
„Неинтегруемост в смисъл на Лиувил на някои уравнения на Пенлеве от по-висок ред“ ,
представен за присъждане на образователната и научна степен „доктор“
в професионално направление 4.5 Математика,
Докторантска програма „Диференциални уравнения“

Рецензент: доц. д-р Ангел Иванов Живков, ФМИ, СУ „Св. Климент Охридски“, назначен със заповед РД 38-485 от 17.07.2015.

Кратки биографични данни и общо описание на представените материали. Георги Георгиев е роден през 1967 година в Горна Оряховица. През 1992 завършва като магистър по математика ФМИ, СУ „Св. Климент Охридски“. От 1994 до 1997 е редовен докторант към катедра ДУ, ФМИ, СУ с научен ръководител проф. дмн Емил Хорозов. Отчислен е с право на защита. От 1998 досега работи във ВТУ „Тодор Каблешков“ , София като асистент по математически анализ.

За процедурата са представени 4 научни труда, три от които съвместни с научния консултант О. Христов. Първите две публикации са някакви варианти на третата. Ще отбележа:

G. Georgiev, On the integrability of a system describing the stationary solutions in Bose–Fermi mixtures, Chaos, Solitons and Fractals 77 (2015), 138–148. (with O. Christov) **IF $\sim$ 1.448**

G. Georgiev, Non-integrability of Some Higher-Order Painlevé Equations in Sense of Liouville, SIGMA 11 (2015), 045, 20 pages. (with O. Christov) **IF $\sim$ 1.245**

Резултатите от дисертацията са докладвани на няколко семинара и международни конференции (списъкът е приложен). Няма сведения за цитирания.

Авторефератът и справката за приносите дават ясна и адекватна представа за съдържанието и основните резултати на дисертацията.

Характеристика на дисертационния труд и приноси на докторантът. Дисертацията съдържа 130 страници, включително литература от 102 заглавия и е разделена на въведение, три глави и допълнение, което съдържа спомагателна информация за G-функцията на Майер.

Темата на дисертацията е в областта на качествената теория на диференциалните уравнения. По-точно, доказва се неинтегруемост на няколко крайно-мерни Хамилтонови системи в смисъл на Лиувил. Това означава, че не съществуват достатъчен брой първи интеграли в инволюция, за да могат тези системи да бъдат интегрирани в квадратури. Въпросите за интегруемост и неинтегруемост на диференциалните уравнения са изследвани активно от Поанкаре, Ковалевска, Пенлеве и други известни математици. Темата продължава да е актуална и днес.

Въведението разглежда развитието на критериите за интегруемост през годините като отбелязва и конкретните задачи, които са изследвани с тези критерии. След това се формулират основните резултати на дисертацията.

В първа глава са дадени дефиниции, факти, някои известни теореми и техники от теорията Зиглин–Моралес-Руис–Рамис и Диференциалната теория на Галоа, необходими за изложението. Доказателствата на повечето от известните твърдения са пропуснати, като са посочени източниците, където могат да бъдат намерени. Някои по-малко известни твърдения са приведени с доказателство.

В глава 2 е изложен основният резултат на тази дисертацията. Мотивацията е следната. През 2000 г. Моралес-Руиз повдига въпросът за изследване на интегруемостта на класическите уравнения на Пенлеве като Хамилтонови системи. Самият той показва, че за второто уравнение на Пенлеве, когато параметърът е целочислен, съответната Хамилтонова система е неинтегруема в смисъл на Лиувил. Развитието на такъв тип задачи за другите класически уравнения на Пенлеве минава през работите на Емил Хорозов и Цветана Стоянова.

Естествен е въпросът дали уравненията на Пенлеве от по-висок ред са също неинтегруеми в смисъл на Лиувил?

Тъй като уравненията на Пенлеве от по-висок ред са повече на брой (виж например класификацията на Косгроув) и не за всички от тях са известни Хамилтонови формулировки, отначало се разглежда следното нелинейно ОДУ от четвърти ред

$$w^{(4)} = 5w''(w^2 - w') + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma, \tag{1}$$

където $\lambda \neq 0, \alpha, \gamma$ са комплексни параметри. Това уравнение се появява като уравнение F-XVIII в класификацията на Косгроув. На Громак дължим Хамилтоновата формулировка, фамилиите от рационално решения и Баклундовите трансформации.

Първият резултат на дисертацията е следният (Теорема 5 от текста): Хамилтоновата система, отговаряща на уравнение (1) с параметри $\gamma/\lambda = 3k, \gamma/\lambda = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}$, е неинтегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли.

Оказва се, че уравнението в нормални вариации около споменатите рационални решения е частен случай на обобщено конфлуентно хипергеометрично уравнение $D_{pq}u = 0$ за $p = 0$. В конкретният случай единичната компонента на групата на Галоа се получава чрез пресмятане на топологичните инварианти - формална монодромия и експоненциален тор и матриците на Стокс и е $G^0 = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$, която е некомутативна и оттук следва неинтегруемостта.

Възниква въпросът дали появата на обобщено конфлуентно хипергеометрично уравнение като (NVE) в динамиката на уравненията на Пенлеве от по-висок ред е инцидентно явление?

Оказва се, че обобщените конфлуентни хипергеометрични уравнения се свързват и с други уравнения на Пенлеве.

Следващата задача, която се разглежда в дисертацията е изследването на интегруемостта в Лиувилов смисъл на вторият и третият член в йерархията на второто уравнение на Пенлеве. Първите три члена на тази йерархия са:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(1)}: w'' - 2w^3 = zw + \alpha_1, \tag{2}$$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}: w^{(4)} - 10w(ww'' + w'^2) + 6w^5 + \beta_1(w'' - 2w^3) = zw + \alpha_2, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}: &w^{(6)} - 14w^{(4)}w^2 - 56w^{(3)}w'w + 70w''(w^4 - w'^2) + 140w^3w'^2 - 42w(w'')^2\\ &-20w^7 + \beta_1[w'' - 2w^3] + \beta_2[w^{(4)} - 10w(ww'' + w'^2) + 6w^5] = zw + \alpha_3.\end{aligned} \tag{4}$$

Вече споменах по-рано за $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(1)}$. Уравнението $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ е известно още като уравнение F-XVII в класификацията на Косгроув.

Хамилтоновата структура на P_{II}-йерархията е намерена от Мазоко и Мо. Дисертантът изследва за интегруемост само $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ и $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$, които са по-лесни. Следващият резултат в дисертацията е (Теорема 19 от текста): За следните набори от параметри:

(i) $\beta_1 = \alpha_2 = 0$ Хамилтоновата система, съответстваща на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ е неинтегруема чрез рационални първи интеграли;

(ii) $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_3 = 0$ Хамилтоновата система, съответстваща на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$ е неинтегруема чрез рационални първи интеграли.

За доказателството на (i) се твърди, че е аналогично на това за разгледаното вече уравнение (1). Доказателството на (ii) е дадено в достатъчно детайли. Групата на Галоа на съответното обобщено конфлуентно хипергеометрично уравнение се пресмята и е изоморфна на $\mathrm{Sp}(6, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, чиято единична компонента е очевидно некомутативна. От това следва неинтегруемостта.

Главата завършва с хипотеза за интегруемоста на следващите уравнения в йерархията. Предполага се, че техните (NVE) около някакви нетривиални решения са отново обобщени конфлуентни хипергеометрични уравнения, с единични компоненти на групите на Галоа $\mathrm{Sp}(q, \mathbb{C}), q$ - четно, откъдето следва неинтегруемост.

В Глава 3 се разглежда следващата задача в тази дисертация. Тази задача донякъде не кореспондира със заглавието, но използваните идеи и техники са същите, както в предишната глава.

Системата, която описва Бозе–Ферми смеси се задава с $N_f + 1$ нелинейни уравнения на Шрьодингер. Стационарните решения на тази система, грубо казано, се управляват от една крайно-мерна Хамилтонова система с Хамилтониян

$$H = \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} p_j^2 + \omega_0 q_0^2 + \sum_1^{N_f} \omega_j q_j^2 - g_{\mathrm{BF}} q_0^2 \sum_1^{N_f} q_j^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} \frac{C_j^2}{q_j^2}, \qquad (5)$$

чиято интегруемост се изследва в следните случаи:

1) $C_0 = 0$, $C_j \neq 0$, $\sum C_j \neq 0$, $\omega_j = \omega^2/2, j = 1, \dots, N_f$;

2) $C_0 \neq 0$, $C_j = 0, j = 1, \dots, N_f$, $g_{\mathrm{BF}} = n(n+1)/2, n \notin \mathbb{Z}$;

3) $C_0 \neq 0$, $C_1 \neq 0, N_f = 1$, g_{BF} достатъчно малко.

Резултатът от тази глава е следният (Теорема 6 от дисертацията): В горните случаи Хамилтоновата система, отговаряща на (5) е интегруема точно тогава, когато $g_{\mathrm{BF}} = 0$, или с други думи когато променливите се разделят.

Във всеки един от случаите (1)-(3) доказателството на неинтегруемостта при $g_{\mathrm{BF}} \neq 0$ се извършва с различни техники, които имат своите ограничения, както от теоретичен, така и от технически характер. Ще отбележа, че в допълнение към случай (2) при $g_{\mathrm{BF}} = n(n+1)/2, n \in \mathbb{Z}$ доказателство за неинтегруемостта на съответната Хамилтонова система е извършено и за $n = 1, 2$. Има хипотеза, системата е неинтегруема и за всяко $n > 3$ цяло, но изглежда пресмятанията за доста по-сложни.

Критични бележки и препоръки. По същество сериозни забележки нямам. Неточностите в дисертацията и авторефератът са от редакционен и технически характер. Нека спомена някои от тях:

1) В цитираната литература на места няма страници, а някои вече излезли публикации са цитирани като препринти;

2) В авторефератът след страница 9 очевидно е сменен стилът и номерацията на формулите излиза по различен начин, много близко до самите формули и това затруднява четенето;

3) В текстовете има някои, меко казано, смущаващи изречения. Предлагам на дисертанта да обясни, например, смисъла на следното изречение:

<u>страница 19 в дисертацията</u>

„Това уравнение възниква като група от инвариантни редукции на модифицираното уравнение на Кауп–Купершмидт ...“.

Както е отбелязано и от самия дисертант, разглежданата в текста тематика подлежи на развитие както в теоретичен аспект, така и в приложно–технически аспекти. Препоръчвам на дисертанта с помощта на вече усвоените методи да започне да извършва самостоятелни изследвания или в доразвиване на разглежданите в дисертацията проблеми или в решаване на други важни задачи.

Заключение. Представеният дисертационен труд е в класическа област на диференциалните уравнения. През последните 20 години тя получи нова актуалност в резултат на нови алгебрични идеи и техники, свързани с Диференциални групи на Галоа, въведени от Рамис и Моралес-Руиз. Текстът е на високо научно и образователно ниво. Доказателствата на твърденията са логически пълни. Самите резултати са публикувани в престижни списания.

Дисертацията удовлетворява изискванията, условията и критериите, установени според Закона за развитие на академичния състав на България и Правилника за прилагането му, както и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни звания и заемане на академични длъжности на СУ и на ФМИ, СУ.

Това ми дава основание да **препоръчам убедено** на почитаемото Научно жури **да присъди на Георги Иванов Георгиев образователната и научна степен „доктор“**, област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, Докторантска програма „Диференциални уравнения“.

8 септември 2015 Рецензент:

София (доц. д-р А. Живков)