Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

ГЕОРГИ ИВАНОВ ГЕОРГИЕВ

НЕИНТЕГРУЕМОСТ В СМИСЪЛ НА ЛИУВИЛ НА НЯКОИ УРАВНЕНИЯ НА ПЕНЛЕВЕ ОТ ПО-ВИСОК РЕД

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация за присъждане на
образователна и научна степен „Доктор“

Област на висше образование:

4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: 4.5 Математика

Научен ръководител: чл.- кор. проф. дмн Емил Хорозов

Научен консултант: Огнян Христов

София, 2015 г.

Дисертационният труд е обсъден и допуснат до защита на разширено заседание на катедра Диференциални уравнения във ФМИ, състояло се на 01.07. 2015 г.

Дисертационният труд съдържа 130 страници, от които 11 страници литература, включваща 102 заглавия.

Защитата на дисертацията ще се състои на .... г. от 14:00 часа в Заседателната зала на ФМИ на открито заседание на научно жури в състав:

1. доц. А. Живков
2. проф. дфзн Вл. Герджиков
3. чл.- кор. дмн Е. Хорозов
4. доц. О. Касабов
5. доц. Др. Михалев

Материалите за защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ФМИ, бул. „Дж. Баучер“ 5, град София.

Автор: Георги Иванов Георгиев

Заглавие: НЕИНТЕГРУЕМОСТ В СМИСЪЛ НА ЛИУВИЛ НА НЯКОИ УРАВНЕНИЯ НА ПЕНЛЕВЕ ОТ ПО-ВИСОК РЕД

Съдържание на дисертацията

Настоящата дисертация се състои от въведение, три глави, допълнение и списък на цитираната литература. Основното съдържание е поместено на 130 страници. Списъкът на цитираната литература включва 102 заглавия.

В уводната глава са формулирани задачите, които се решават в настоящата дисертация. Формулирани са основните твърдения **Теорема 5**, **Теорема 6** и **Теорема 7**.

В глава 1 е разгледана математическата основа на доказателствата на основните твърдения в настоящата дисертация. Тук са резюмирани някои основни факти за интегруемите хамилтонови системи, Диференциалната Теория на Галоа и Теорията на Зиглин-Моралес-Рамис-Симо, необходими за нашето изложение.

В глава 2 са доказани **Теорема 5** и **Теорема 6**.

В глава 3 се доказва **Теорема 7**, а в допълнението се резюмират някои факти за обобщените хипергеометрични уравнения и функциите на Майер, които се използват в дисертацията.

Актуалност на темата и обзор на основните резултати в областта

Обекти на изследване в тази дисертация са няколко хамилтонови системи, чиято интегруемост в смисъл на Лиувил се изследва.

Задачата за интегруемост в квадратури на дадена динамична система е стара, важна и трудно решима. Известно е, че една алгебрична или аналитична динамична система е разрешима локално. Въпросът е дали е разрешима глобално? Ако е възможно дадена динамична система, дефинирана чрез обикновени диференциални уравнения, да се реши експлицитно, казваме, че тази система е *интегруема*. Проблем е, че достатачно добре работеща дефиниция за понятието интегруемост в общия смисъл няма. Съществуват две фамилии от крайномерни комплексни динамични системи, за които понятието интегруемост е добре дефинирано – хамилтоновите системи и линейните диференциални уравнения. За хамилтоновите системи под *интегруемост в смисъл на Лиувил* се разбира съществуването на достатачен брой първи интеграли в инволюция. За линейните обикновени диференциални уравнения интегруемостта се дефинира в контекста на Диференциалната Теория на Галоа, наречена още Теория на Пикар-Весио.

Ще да проследим развитието на критериите за интегруемост на хамилтонови системи от Поанкаре до Теорията на Зиглин-Моралес-Руис-Рамис.

Нека е дадено реално симплектично многообразие M с размерност $2n$ и хамилтонова система $\dot{x} = X_H(x)$ (често в нашето изложение ще отъждествяваме хамилтоновата система с хамилтоновото векторно поле X_H) върху него. Да означим с Γ една интегрална крива на $z = z(t)$ на векторното поле X_H.

Да предположим, че Γ е периодична орбита с период T, т.е. $z(t+T) = z(t)$. Нека $U(t)$ е фундаментално матрично решение на VE около Γ, като $U(0) = I$. Матрицата $M = U(T)$ се нарича *матрица на монодромия*, съответстваща на периодичното решение Γ, а нейните собствени стойности се наричат *мултипликатори на периодичното решение* Γ. Понеже M е симплектично, то за матрицата на монодромия имаме $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ и, ако λ е мултипликатор, то и λ^{-1} е мултипликатор. Тогава е в сила следният критерий на Поанкаре:

Теорема 1. *(Поанкаре, [50]) Да предположим, че хамилтоновата система X_H притежава k на брой ($k \leq n$) първи интеграли в инволюция $f_1 = H$, $f_2 \ldots, f_k$, функционално независими върху периодичното решение Γ. Тогава поне $2k$ на брой от мултипликаторите на Γ трябва да са равни на 1.*

Идеята за разглеждане на решенията на хамилтонова система като мероморфни функции на времето, разглеждано като комплексна променлива, така наречената комплексификация на уравненията, е основна в работата на Ковалевска [26] от 1888 г. С този подход тя открива нов случай на интегруемост на твърдо тяло с неподвижна точка. Освен това Ковалевска доказва, че с изключение на някои частни решения само в случаите на Ойлер, Лагранж и Ковалевска, системата, описваща твърдо тяло притежава глобални мероморфни решения. Ляпунов обобщава резултата на Ковалевска и доказва, че с изключение на някои частни решения, само в горните три случая системата твърдо тяло притежава глобални еднозначни решения. Неговият метод се базира върху анализ на уравненията във вариации около дадени решения [28].

През 1963 г. Арнолд и Крилов разглеждат комплексни линейни диференциални уравнения и формулират достатъчни условия за съществуването на еднозначни, но не непременно комплексно аналитични, първи интеграли. Методът им се основава на факта, че затворената обвивка на разглежданата група на монодромия се съдържа в линейна група на Ли [2]. Това наблюдение е близко до факта, че в случая на фуксови диференциални уравнения диференциалната група на Галоа е точно затварянето по Зариски на групата на монодромия.

В своите две фундаментални работи [61, 62], разглеждайки комплексни аналитични динамични системи

$$\frac{d}{dt}x = v(x), \quad t \in \mathbb{C}, \quad x \in M, \tag{1}$$

където M е комплексно многообразие с размерност n, Зиглин показва, че ако системата (1) притежава мероморфен първи интеграл, то тогава системата в нормални вариации притежава рационален интеграл. Този резултат му позволява да формулира необходими условия за интегруемост на хамилтонови системи.

В случая на комплексна аналитична хамилтонова система с размерност $2n$ имаме един първи интеграл - хамилтониана H. Нека Γ е римановата повърхнина, съответстваща на интегралната крива $z = z(t)$ на векторното поле X_H. Нека сега да разгледаме хамилтонова система

$$\dot{x} = X_H(x), \quad t \in \mathbb{C}, \quad x \in M \tag{2}$$

зададена с аналитичен хамилтониан H, дефиниран върху комлексно $2n$-мерно многообразие M. Предполагаме, че системата (2) притежава неравновесно решение $\Psi(t)$. Означаваме чрез Γ неговата фазова крива. Ние можем да запишем уравнението във вариации (VE) около това решение

$$\dot{\xi} = DX_H(\Psi(t))\xi, \quad \xi \in T_\Gamma M. \tag{3}$$

Понататък, използвайки интеграла dH, ние можем да редуцираме уравнението във вариации. Разглеждаме нормалното разслоение на Γ, $F := T_\Gamma M / TM$ и нека $\pi : T_\Gamma M \to F$ е естествената проекция. Уравнението (3) индуцира уравнение върху F

$$\dot{\eta} = \pi_*(DX_H(\Psi(t))(\pi^{-1}\eta), \quad \eta \in F, \tag{4}$$

което се нарича нормално вариационно уравнение (NVE).

Логично е да предположим, че ако системата (2) е интегруема, тогава линейните уравнения (VE) и (NVE) са също интегруеми. Както по-горе, можем да напишем уравненията в първи вариации VE около Γ и уравненията в нормални вариации NVE, които са с размерност $2(n-1)$. Групата на монодромия на NVE е подгрупа на $\mathrm{Sp}(2(n-1), \mathbb{C})$. Спектърът на елемент g от групата на монодромия $g \in \mathcal{M} \subset \mathrm{Sp}(2(n-1), \mathbb{C})$ има следния вид

$$\mathrm{Spec}(g) = (\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}^{-1}), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

и g се нарича *резонансен*, ако

$$\prod_{l=1}^{n-1} \lambda_l^{k_l} = 1 \text{ за някое } (k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} k_i \neq 0.$$

В първата си работа [61] Зиглин доказва основната теорема на теорията си. Ще дадем формулировката от [39].

Теорема 2. *(Зиглин, [61]) Да предположим, че дадена хамилтонова система притежава $n-k$ на брой допълнителни аналитични първи интеграли, независими в околност на Γ, не задължително върху Γ. Предполагаме, че съществува нерезонантен елемент $g \in \mathcal{M}$ от групата на* *монодромия на NVE. Тогава и всеки друг елемент $g' \in \mathcal{M}$ от групата на монодромия $\mathcal{M}$ на NVE изпраща собствените вектори на g в собствени вектори на g.*

Зиглин изучава системата на Хенон-Хайлес, както и частен случай на полето на Янг-Милс. За последната система той доказва несъществуването на локален мероморфен първи интеграл, независим с хамилтониана в околност на хиперболично особено решение [62].

През 1985 г. Ито прилага метода на Зиглин въху обобщената система на Хенон-Хайлес [21]. По-късно се появяват много работи, използващи метода на Зиглин.

Йошида публикува серия от работи относно приложението на метода на Зиглин върху някои хомогенни потенциали с две степени на свобода, [59, 60]. Разширявайки метода на Зиглин, Хорозов доказва неинтегруемост на системата на Грос-Невьо за $n = 3$ степени на свобода [18]. По-късно Мачиевски, използвайки теорията на Моралес-Рамис, доказва неинтегруемост на същата система за произволен брой ($n \geq 3$) степени на свобода [29]. В своята работа [20] Иригоаиен и Симо чрез теорията на Зиглин и критерия на Йошида за хомогенни потенциали доказват неинтегруемост на така наречения проблем J_2 за $\alpha/\beta = -3$.

Разширяването на теорията на Зиглин и приближаването ѝ до диференциалната теория на Галоа започва едновременно и независимо да се разработва както от Чърчил и Род [9], така и от Моралес-Руис и Симо [39, 44]. Така от началото на деветдесетте години на миналия век до днес този подход намира широко приложение както в теоретични работи, така и в конкретни задачи от приложно естество. Преди възникването на тази идея всички критерии за неинтегруемост не са взимали под внимание условието първите интеграли да са в инволюция, т.е. използвала се е само тяхната независимост. Така, с изключение на резултата на Поанкаре, споменат по-горе, за първи път се появява препятствие за пълна интегруемост (в смисъл на Лиувил) на хамилтонова система. Това означава, че се взима под внимание не само броят на независимите първи интеграли, както в работите на Зиглин и неговите последователи, но и фактът, че тези интеграли трябва да са в инволюция. Основната идея на метода, използващ Диференциалната Теория на Галоа, е следната: ако хамилтоновата система X_H е напълно интегруема в смисъл на Лиувил, то съответната система във вариации трябва също да е интегруема в смисъл, че съответното разширение на Пикар - Весио трябва да е лиувилово. Последното е еквивалентно на изискването единичната компонента на съответната диференциална група на Галоа да бъде разрешима алгебрична група. А още по-точно, в работата на Моралес-Руис и Рамис[41] този критерий вече звучи така:

Теорема 3. *(Моралес-Руис - Рамис [41]) Ако хамилтоновата система X_H е напълно интегруема с мероморфни първи интеграли в околност на* Γ*, но не задължително върху самата* Γ*, то свързаната компонента* G^0 *на единицата на групата на Галоа на уравнението* NVE *е абелева.*

Така се оказва, че абелевата структура на алгебрата на Поасон от първи интеграли на хамилтоновата система X_H се проектира върху групата на Галоа на NVE.

Теорема 3 може да се разглежда като обобщение на Теорема 2 на Зиглин. Може да се покаже, че теоремата на Зиглин може да се получи като следствие от резултатите на Моралес и Рамис в [41]. Теорема 3 и нейните версии в [41] са мощен критерий за неинтегруемост, намерил приложение в изследвания на широк кръг динамични системи:

1) задачата за n-те тела, задачата на Ситников за трите тела [39]; задачата на Лагранж за трите тела [7, 55]; сателитна и астероидна динамика - [3, 4]; космологични модели - така наречените модели на Бианки, по-специално, модел от тип Бианки IX с рационални първи интеграли [39]; модел от тип Бианки VIII [34]; модел на Фридман - Робъртсън - Уолкер [10];

2) задачи от механиката (твърдо тяло, махало) - школата на Мачиевски, [29, 31, 32, 33]; небесна механика - проблем на Хил [38];

3) трансцендентите на Пенлеве [42, 54].

Изобщо казано, намирането на Диференциалната група на Галоа за дадено линейно уравнение е трудна задача. Ще отбележим, че за линейни уравнения от втори ред един от начините за откриване на Лиувилови решения е алгоритъмът на Ковачич, [25]. Това е един от начините за пресмятане на групата на Галоа за някои уравнения от втори ред.

За съжаление Теорема 3 дава само необходимо условие за интегруемост на дадена хамилтонова система: ако хамилтоновата система е интегруема, то свързаната компонента G^0 на единичния елемент на групата на Галоа на съответното уравнение в нормални вариации е абелева. Обратното обаче не е вярно, от това, че диференциалната група на Галоа е абелева, не следва хамилтонова интегруемост.

В току-що описаната ситуация, мощен апарат за доказване на неинтегруемост е разглеждането на уравненията в по-високи вариации, VE_k, (респективно NVE_k), [43]. Аналог на Теорема 3 е следният критерий:

Теорема 4. (Моралес-Руис-Симо [43])*Да предположим, че хамилтоновата система X_H е напълно интегруема с мероморфни първи интеграли в околност на аналитична крива Γ. Тогава свързаната компонента G_k^0 на единичния елемент на диференциалната група на Галоа на уравненията в k-ти вариации е абелева за всяко $k \in \mathbf{N}$.*

Прилагането на този критерий за неинтегруемост е сравнително тежко технически. Заслужава да се спомене работата на Мачиевски и Пшибилска [30] върху хамилтонови системи с хомогенен потенциал от степен 3

$$H = (p_1^2 + p_2^2)/2 + V(q_1, q_2).$$

Чрез анализ на нормалните уравнения в трети вариации, авторите доказват неинтегруемост на разглежданата от тях задача.

Друг пример за използването на уравнения във високи вариации може да се намери в работата на Моралес-Руис, Рамис и Симо [43]. Изучавайки уравненията във високи вариации, авторите доказват неинтегруемост на обобщеното уравнение на Хенон - Хайлес с потенциал

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\, x_1^2 + \frac{1}{3}\, dx_1^3 + \left(\frac{1}{2} + cx_1\right)\, x_2^2$$

при условие $d/c = 2$. Вж. също така [19, 42, 52, 53].

Уравнения със свойство на Пенлеве

Към края на 19 век математиците започват да търсят така наречените *добри трансцендентни функции*, дефинирани чрез нелинейни алгебрични диференциални уравнения. Едно диференциално уравнение

$$F\left(z, y, \frac{dy}{dz}, \ldots, \frac{d^n y}{dz^n}\right) = 0, \tag{5}$$

дефинирано над област D се нарича *алгебрично*, ако $F(z, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ е полином на $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ ($y_k := y^{(k)}$, $k = 0, \ldots n$), с коефициенти мероморфни функции на $z \in D$.

Фукс въвежда разделянето на особените точки на решенията на диференциалните уравнения на два вида: неподвижни и подвижни особени точки. Например уравнението

$$w' = \frac{1}{2wz}$$

притежава решение $w = \sqrt{\ln \frac{z}{C}}$ (вж. [1]). Точките $z = 0$ и $z = \infty$ са трансцендентни особени точки за решението, а точката $z = C$ е критична алгебрична точка. В случая трансцендентните особени точки са едни и същи за различните стойности на константата C. Положението на алгебричните особени точки обаче зависи от C и следователно се мени при промяна на началните данни, тъй като C е свързана с началните данни z_0 и $w_0, C = z_0 e^{-w_0^2}$.

Особените точки на решенията, положението на които не зависи от началните данни, определящи решението, се наричат *неподвижни особени точки.* Особените точки на решенията, положението на които зависи от началните данни, се наричат *подвижни особени точки.* Така в горния пример критичните трансцедентни точки $z = 0$ и $z = \infty$ са неподвижни особени точки, докато критичните алгебрични точки $z = C$ са подвижни особени точки.

Така възниква задачата :

> **Да се намерят всички алгебрични диференциални уравнения, чиито решения не притежават подвижни особени критични точки.**

Дефиниция. *Казваме, че едно алгебрично диференциално уравнение (5) притежава* **свойството на Пенлеве***, ако неговото общо решение не притежава подвижни особени критични точки. Под критична особена точка разбираме особена точка, при обикалянето около която дадената функция променя своята стойност [1].*

Така в горния пример точките $z = 0, z = \infty$ и $z = C$ са критични особени точки. Пример за некритични особени точки са полюсите и съществените особени точки на еднозначните функции.

За $n = 1$ проблемът е изучен и решен от Фукс и Поанкаре. Всяко уравнение от типа (5), притежаващо свойството на Пенлеве, може да бъде редуцирано с точност до трансформация на Мьобиус

$$y \quad \longmapsto \quad \frac{\alpha(z)\, y + \beta(z)}{\gamma(z)\, y + \delta(z)}, \quad z \longmapsto \varphi(z)$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi - \text{ мероморфни по } z$$

или до уравнението на $\wp-$функцията на Вайерщрас

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C},$$

или до уравнението на Рикати

$$\frac{dy}{dz} = a(z)y^2 + b(z)y + c(z),$$

където $a(z), b(z)$ и $c(z)$ са мероморфни функции.

За $n = 1$ е в сила следният забележителен резултат на Пенлеве, [46, 47]:

Решенията на алгебричните уравнения от първи ред не могат да притежават подвижни трансцендентни и съществени особени точки.

С други думи, общите решения на алгебричните уравнения от първи ред могат да притежават само алгебрични точки като подвижни особени точки, докато при $n = 2$ е напълно възможно да се появят подвижни съществени особени точки.

В началото на 20 век (1900-1910), в своите изследвания Пенлеве показва, че всички рационални диференциални уравнения от втори ред с неподвижни критични точки се свеждат до 14 основни вида. Впоследствие Гамбие [14, 48] намира грешка в работата му и показва, че уравненията с неподвижни критични точки от втори ред могат да се редуцират до 50 различни вида. Болшинството от тях се редуцират до вече познати уравнения. Само шест от тях водят до нови трансцендентни функции. Именно тези уравнения са известни в математическия свят като шестте уравнения на Пенлеве: $P_I, \ldots, P_{VI}$.

Успехът на Пенлеве относно рационалните диференциални уравнения от втори ред подтиква учениците му Шази и Гарние да продължат изследванията за рационални диференциални уравнения от ред ≥ 3 и за алгебрични диференциални уравнения от втори ред, [8, 15]. Класификация на уравненията от ред четири, притежаващи свойство на Пенлеве, е направена от Косгроув [11].

В края на 20-ти век, използвайки Нелинейна Диференциална Теория на Галоа, Нишиока, [45], и Умемура, [56], доказват неинтегруемост на първото уравнение на Пенлеве P_I в термините на „познати функции“. През 1998 година Уатанабе, [57], доказва неинтегруемост на шестото уравнение на Пенлеве P_{VI} чрез „познати функции“.

Формулировка на задачите и основни резултати

Първата задача, която си поставяме в тази дисертация, е свързана с изследване на интегруемостта в смисъл на Лиувил на някои уравнения на Пенлеве от четвърти ред.

Получени като чисто математическа задача, шестте уравнения на Пенлеве имат доста физически приложения: в описанието на нелинейните вълни, в статистическата механика, в теорията на квантовата гравитация, в топологичната теория на полето, във физиката на плазмата, в теорията на случайните матрични модели и др.

Класическите уравнения на Пенлеве имат доста забележителни свойства, едно от най-интересните от които е съществуването на хамилтонова формулировка.

В [42] Моралес-Руис задава въпроса за неинтегруемостта на Хамилтоновата система на класическите уравнения на Пенлеве, които имат частни рационални решения. Този въпрос има положителен отговор за P_{II} при стойности на параметъра $\alpha = n \in \mathbb{Z}$. По-нататък развитието на тези задачи минава през работите на Стоянова, която доказва неинтегруемост на редица уравнения на Пенлеве за дискретни фамилии от параметри [52, 53], [54] (с Христов), [19] (с Хорозов).

Въпросът, който естествено възниква, е дали уравненията на Пенлеве от по-висок ред са също неинтегруеми?

Разглеждаме следното диференциално уравнение от четвърти ред

$$w^{(4)} = 5w''(w^2 - w') + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma, \quad (0.0.19)$$

където λ, α, γ са комплексни параметри.

Това уравнение възниква като групово от инвариантна редукция на модифицираното уравнение на Кауп-Купершмидт (или уравнение на Севада-Котера). За повече подробности вж. А. Хоун [17], Н. Кудряшов [27]. Известно е и като уравнение F-XVIII в класификацията, направена от К. Косгроув [11] за всички уравнения от ред четири и пет, притежаващи свойството на Пенлеве. Това уравнение е изследвано от В. Громак [16] за други, различни от неинтегруемост, свойства.

Както в класическия случай на уравненията на Пенлеве, тези уравнения имат хамилтонова формулировка, Баклунд трансформация и фамилия от рационални специални решения. Например (вж. [11]):

- когато $\lambda = 0, \gamma \neq 0$, уравнението е решено чрез хиперелиптични функции;

- когато $\lambda = 0, \gamma = 0$, уравнението е решено с елиптични функции;

- когато $\gamma = -\lambda/2$, решението $w(z)$ може да се изрази чрез решенията на две Пенлеве I уравнения.

По-нататък предполагаме, че $\lambda \neq 0$.

Уравнението (0.0.19) притежава две фамилии рационални решения:

I) $\gamma/\lambda = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0,\, w = 0; \quad k = 1,\, w = -\frac{3\lambda}{\alpha + \lambda z}; \,\ldots \quad (0.0.20)$$

II) $\gamma/\lambda = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0,\, w = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda z}; \quad k = 1,\, w = -\frac{2\lambda}{\alpha + \lambda z}; \,\ldots \quad (0.0.21)$$

Всъщност, тези две фамилии са единствените рационални решения на (0.0.19) (Громак [16], Теорема 3).

Означаваме с $q_1(z) := w(z)$, $\varepsilon^2 = 1$. Тогава уравнението (0.0.19) може да се представи като две еквивалентни Хамилтонови системи със $2 + 1/2$ степени на свобода с

$$\begin{aligned} H_\varepsilon &= \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{7-9\varepsilon}{12}q_2^3 + p_1q_2 - \frac{1+3\varepsilon}{4}p_1q_1^2 \\ &+ \frac{3\varepsilon-1}{4}q_2(\lambda z+\alpha) + \left(\gamma + \frac{3\varepsilon-1}{4}\lambda\right)q_1. \, (0.0.22) \end{aligned}$$

Съответната система от уравнения е $({}' = d/dz)$

$$\begin{aligned} q_1' &= q_2 - \frac{3\varepsilon+1}{4}q_1^2, \quad p_1' = \frac{1+3\varepsilon}{2}p_1q_1 - \gamma - \frac{3\varepsilon-1}{4}\lambda \, (0.0.23) \\ q_2' &= p_2, \qquad\qquad\qquad p_2' = -p_1 - \frac{7-9\varepsilon}{4}q_2^2 - \frac{3\varepsilon-1}{4}(\lambda z+\alpha). \end{aligned}$$

Съществуват Баклунд трансформации (вж. Громак [16]): T_1, T_2 и $T := T_2T_1$ за уравнението (0.0.19), действащи на параметрите по следния начин

$$T_1(\lambda) = \lambda, \quad T_1(\alpha) = \alpha, \quad T_1(\gamma) = -\gamma - \lambda, \, (0.0.24)$$

$$T_2(\lambda) = \lambda, \quad T_2(\alpha) = \alpha, \quad T_2(\gamma) = -\gamma + 2\lambda, \, (0.0.25)$$
$$T(\gamma) = \gamma + 3\lambda, \qquad T^{-1}(\gamma) = \gamma - 3\lambda. \, (0.0.26)$$

Громак е показал, че тези Баклунд трансформаци са бирационални. Не е трудно да се види, тези трансформации са също така и канонични.

Разширяваме по естествен начин хамилтоновата система (0.0.23) до автономна система с три степени на свобода, означавайки

$$\hat{H}(q_1, q_2, z, p_1, p_2, F) := H_\varepsilon + F.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{ds} &= q_2 - \frac{3\varepsilon+1}{4}q_1^2, \quad \frac{dp_1}{ds} = \frac{1+3\varepsilon}{2}p_1q_1 - \gamma - \frac{3\varepsilon-1}{4}\lambda, \\ \frac{dq_2}{ds} &= p_2, \qquad\qquad\quad \frac{dp_2}{ds} = -p_1 - \frac{7-9\varepsilon}{4}q_2^2 - \frac{3\varepsilon-1}{4}(\lambda z+\alpha), \\ \frac{dz}{ds} &= 1, \qquad\qquad\quad \frac{dF}{ds} = -\lambda\frac{3\varepsilon-1}{4}q_2. \, (0.0.27) \end{aligned}$$

Нашият първи основен резултат е следният

Теорема 5. *Хамилтоновата система (0.0.27) с параметри $\gamma/\lambda = 3k, \gamma/\lambda = 3k-1, k \in \mathbb{Z}$ не е интегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли.*

Тази теорема е доказана в глава 2. Схемата на доказателство е следната:

Разглеждаме първата фамилия от рационални решения (I).

I) $\gamma/\lambda = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0,\, w = 0; \quad k = 1,\, w = -\frac{3\lambda}{\alpha + \lambda z};\, etc.$$

Избираме $\gamma/\lambda = 0$ или $k = 0$ и $w = 0$. В такъв случай се получава следното частно решение:

$$\begin{aligned} w &= q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad p_2 = 0, \\ p_1 &= \frac{1 - 3\varepsilon}{4}(\lambda s + \alpha), \quad z = s, \quad F = F_0 = const. \end{aligned}$$

Свеждаме системата от нормални вариации до уравнението

$$\mathrm{L}_1\xi_1 = 0, \quad L_1 = \partial^4 + az, \quad a := -1/\lambda^4.$$

Операторът L_1 обикновено се нарича оператор от Ейри тип и за него е приложима Теорията на Кац [23]. За единичната компонента на групата на Галоа е известно, че тя е $G^0 = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$, която не е комутативна. Оттук от **Теорема 3** следва неинтегруемост в този случай.

Аналогични пресмятания се получават и за втората фамилия рационални решения (II).

II) $\gamma/\lambda = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0,\, w = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda z}; \quad k = 1,\, w = -\frac{2\lambda}{\alpha + \lambda z};\, etc.$$

Нека $\gamma/\lambda = -1$ или $k = 0$ and $w = \frac{1}{z+\alpha/\lambda}$. Тогава намираме следното частно решение

$$\begin{aligned} w = q_1 &= \frac{1}{z + \frac{\alpha}{\lambda}},\; q_2 = \frac{3}{4}\frac{\varepsilon - 1}{(z + \frac{\alpha}{\lambda})^2},\, p_2 = -\frac{3}{2}\frac{\varepsilon - 1}{(z + \frac{\alpha}{\lambda})^3}, \\ p_1 &= \frac{1 - 3\varepsilon}{4}(\lambda z + \alpha),\, z = s,\, F = \frac{3\lambda}{4}\frac{\varepsilon - 1}{z + \frac{\alpha}{\lambda}} + F_0. \end{aligned}$$

Посредством смяна на променливите на (NVE) придобива вида

$$\mathrm{L}_2 u := \delta\left(\delta - \frac{2}{5} - 1\right)\left(\delta + \frac{1}{5} - 1\right)\left(\delta + \frac{2}{5} - 1\right)u - xu = 0,$$

където сме означили с $\delta = xd/dx$. Според резултата на Кац единичната компонента G^0 на групата на Галоа уравнението $\mathrm{L}_2 u = 0$ е $G^0 = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$. Оново следва неинтегруемост според **Теорема 3**. След това с помощта на Баклунд трансформациите разпространяваме резултата и за други стойности на параметрите. За първата фамилия (I) $\gamma/\lambda = 3k, k \in \mathbb{Z}$ прилагаме

Баклунд трансформациите $T^k, k \in \mathbb{Z}$ за решението $w = 0$ за $\gamma/\lambda = 0 (k = 0)$ и за съответното рационално решение $w_{(k)}$ за $\gamma/\lambda = 3k$. Тъй като тези трансформации, действащи на фазовите координати, са бирационални и канонични, неинтегруемостта на хамилтоновата система за $\gamma/\lambda = 0 (k = 0)$ чрез рационални първи интеграли води до неинтегруемост на съответната хамилтонова система за $\gamma/\lambda = 3k$, k е цяло. Прилагайки същите аргументи за рационалните решения на втората фамилия (II), заключаваме неинтегруемост на хамилтоновите системи за $\gamma/\lambda = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}$.

Понататък е пресметната експлицитно диференциалната група на Галоа на $\mathrm{L}_2 u = 0$ с техника, използвана от Дювал и Митши [13, 37, 36], основана на намирането на топологичните генератори на групата на Галоа, които са формални и аналитични инварианти на уравнението. Намерени са формалната монодромия, експоненциалният тор, лъчите на Стокс и матриците на Стокс, отговарящи на сингулярните лъчи. Оказва се, че групата на Галоа на $\mathrm{L}_2 u = 0$ е изоморфна на полудиректното произведение $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Нека обърнем внимание, че уравненията $\mathrm{L}_1 \xi_1 = 0$ и $\mathrm{L}_2 u = 0$ са частни случаи на конфлуентното обобщено хипергеометрично уравнение $D_{pq} u = 0$ за $p = 0$. Тъй като групите на Галоа за тези уравнения са големи [13, 37, 36], то неинтегруемостта на съответните хамилтонови системи следва от **Теорема 3**.

Възниква въпросът дали появата на обобщеното хипергеометрично уравнение като (NVE) на уравнение със свойство на Пенлеве е изолирано явление?

Оказва се, че обобщените хипергеометрични функции се свързват и с други уравнения на Пенлеве. Интересно е да се отбележи, че класическият дилогаритъм

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-s)}{s} ds,$$

който играе важна роля в изследването на нетривиалната монодромия и доказването на неинтегруемост на някои случаи на уравнението на Пенлеве VI, изследвани от Хорозов и Стоянова [19], е свързан с обобщената хипергеометрична функция чрез следното съотношение

$$\mathrm{Li}_2(z) = z \, {}_3F_2(1, 1, 1; 2, 2|z).$$

Нека да обърнем внимание на други уравнения на Пенлеве от по-висок ред, имащи хамилтонова формулировка. Разглеждаме $\mathrm{P_{II}}$-йерархията, формулирана чрез

$$
\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(n)} \quad : \quad \left(\frac{d}{dz}+2w\right)\mathcal{L}_n[w'-w^2]
$$
$$
+\sum_{l=1}^{n-1}\beta_l\left(\frac{d}{dz}+2w\right)\mathcal{L}_l[w'-w^2]=zw+\alpha_n, \quad n\geq 1,
$$

където $\mathcal{L}_n$ е операторът, дефиниран с рекурентното съотношение

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\mathcal{L}_{n+1}=\left[\frac{d^3}{dz^3}+4(w'-w^2)\frac{d}{dz}+2(w'-w^2)_z\right]\mathcal{L}_n;\\
&\mathcal{L}_0[w'-w^2]=\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

а β_l и α_n са комплексни параметри. Специално внимание обръщаме на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(n)}$, което е нелинейно обикновено диференциално уравнение от ред $2n$, $n\geq 1$. Първите три члена на тази P_{II}-йерархия са:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(1)}: w'' &- 2w^3=zw+\alpha_1,\\
\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}: w^{(4)} &- 10w(ww''+w'^2)+6w^5+\beta_1(w''-2w^3)\\
&= zw+\alpha_2,\\
\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}: w^{(6)} &- 14w^{(4)}w^2-56w^{(3)}w'w+70w''(w^4-w'^2)\\
&+ 140w^3w'^2-42w(w'')^2-20w^7+\beta_1[w''-2w^3]\\
&+ \beta_2[w^{(4)}-10w(ww''+w'^2)+6w^5]=zw+\alpha_3.
\end{aligned}
$$

Уравненията $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ са известни като F-XVII ([11]), според класификацията на Косгроув.

Хамилтоновата структура на P_{II} йерархията е намерена от Мазоко и Мо [35]. Понататък изучаваме интегруемостта в смисъл на Лиувил на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ и $\mathrm{P}_{\mathrm{III}}^{(2)}$, които са по-лесни за изследване. В сила е следната

Теорема 6.(Теорема 19 в дисертацията.)

Да разгледаме следните случаи:

(i) за $\beta_1=\alpha_2=0$, хамилтоновата система, отговаряща на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$, не е интегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли;

(ii) за $\beta_1=\beta_2=\alpha_3=0$, хамилтоновата система отговаряща на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$, не е интегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли.

* * *

Другата задача, която решаваме в тази дисертация, е изследване на интегруемостта на системата, получена от стационарните решения на уравненията, описващи Бозе–Ферми смеси (BFM) в едномерна оптична решетка. Интересът към BFM възниква след откриването на Бозе – Айнщайн кондензати (BEC) през 1995 и от желанието да се разбере строгото взаимодействие в зависими системи с приложения във физиката на твърдото тяло, ядрената физика, астрофизиката, квантовата механика и нанотехнологиите. По-детайлни физични обосновки на BFM има в [22, 51, 5, 6, 24].

Предмет на нашето изследване са следните $N_f + 1$ свързани нелинейни уравнения на Шрьодингер

$$i\hbar\frac{\partial\Psi^b}{\partial t} + \frac{1}{2m_{\mathrm{B}}}\frac{\partial^2\Psi^b}{\partial x^2} - V\Psi^b - g_{\mathrm{BB}}|\Psi^b|^2\Psi^b - g_{\mathrm{BF}}\rho_f\Psi^b = 0, \quad (0.0.28)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_j^f}{\partial t} + \frac{1}{2m_{\mathrm{F}}}\frac{\partial^2\Psi_j^f}{\partial x^2} - V\Psi_j^f - g_{\mathrm{BF}}|\Psi^b|^2\Psi_j^f = 0,\ j = 1, \ldots, N_f, \quad (0.0.29)$$

където вълновата функция Ψ_j^f описва всеки един от N_f фермиони и Ψ^b е вълновата функция на бозонната компонента, $\rho_f = \sum_{i=1}^{N_f} |\Psi_i^f|^2$, а $g_{\mathrm{BB}}, g_{\mathrm{BF}}, m_{\mathrm{F}}, m_{\mathrm{B}}$ са определени физични константи. По-специално,

$$g_{\mathrm{BB}} = \frac{2a_{\mathrm{BB}}}{a_s},\ g_{\mathrm{BF}} = \frac{2a_{\mathrm{BF}}}{a_s\alpha},\ \alpha = \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{F}}}$$

и

$$\alpha_s = \sqrt{\frac{\hbar}{m_{\mathrm{B}}\omega_\perp}}$$

са свързани със взаимодействието на s-вълните за бозон-бозон и бозон-фермион взаимодействие, съответно, като a_{BB} и a_{BF} са дължини на разсейване на s-вълновите сблъсъци на бозон-бозон и бозон-фермион взаимодействия. Квантовите дегеративни смеси ^{40}K, ^{87}Rb се изследват, когато $m_{\mathrm{B}} = 87m_p$, $m_{\mathrm{F}} = 40m_p$ и $\omega_\perp = 215Hz$. Потенциалът V е обикновено във вида $V = V_0 sn^2(\alpha x, \kappa)$, където $sn(\alpha x, \kappa)$ е елиптичната sine-функция на Якоби. В тази работа ние предполагаме $V_0 = 0$, както в [5].

Ние се интересуваме от стационарните решения на системата (0.0.28), (0.0.29) от вида

$$\begin{aligned}\Psi^b(x,t) &= q_0(x)\exp\left(-i\frac{\omega_0}{\hbar}t + i\Theta_0(x) + i\kappa_0\right), \quad (0.0.30)\\ \Psi_j^f(x,t) &= q_j(x)\exp\left(-i\frac{\omega_j}{\hbar}t + i\Theta_j(x) + i\kappa_{0,j}\right),\ j = 1, \ldots, N_f\end{aligned}$$

където κ_0, $\kappa_{0,j}$, са фазови константи, q_0, q_j и Θ_0, $\Theta_j(x)$ са реалнозначните функции:

$$\Theta_0(x) = C_0\int_0^x \frac{dx'}{q_0^2(x')},\ \Theta_j(x) = C_j\int_0^x \frac{dx'}{q_j^2(x')},\ j = 1, \ldots, N_f. \quad (0.0.31)$$

C_0, C_j, са константи, получени при интегриране. Заместваме (0.0.30) в уравненията (0.0.28), (0.0.29) и отделяме реалната и имагинерната части. Получава се

$$\frac{1}{2m_{\mathrm{B}}}q_0^3 q_{0xx} - g_{\mathrm{BB}}q_0^6 - g_{\mathrm{BF}}\left(\sum_{i=1}^{N_f} q_i^2\right) q_0^4 + \omega_0 q_0^4 = \frac{C_0^2}{2m_{\mathrm{B}}}, \quad (0.0.32)$$

$$\frac{1}{2m_{\mathrm{F}}}q_j^3 q_{jxx} - g_{\mathrm{BF}}q_0^2 q_j^4 + \omega_j q_j^4 = \frac{C_j^2}{2m_{\mathrm{F}}}, \ j = 1, \ldots, N_f.$$

Костов, Герджиков и Вълчев [24] са открили много частни (квазипериодични, периодични и солитонни) решения на системата (0.0.32) и следователно, стационарни решения за системата (0.0.28), (0.0.29). Естествено възниква въпросът, дали можем да получим достатъчно на брой първи интеграли, такива че системата (0.0.32) да е интегруема. Забелязваме, че при $g_{\mathrm{BF}} = 0$ уравненията се разделят, т.е. системата е разрешима.

Преди да формулираме нашия резултат, ще се наложи да се отървем от несъществени (за интегруемостта) параметри. В това, което следва, ние предполагаме, че параметрите $\omega_0, \omega_j, m_{\mathrm{F}}, m_{\mathrm{B}}$ са положителни (това се предполага от физичния им смисъл) и $C_0, C_j, g_{\mathrm{BF}}$ са реални параметри. Полагаме

$$q_0 = \beta\tilde{q}_0, \ q_j = \alpha\tilde{q}_j, \ x = \gamma\tilde{x}.$$

След това избираме

$$\alpha = \sqrt{m_{\mathrm{F}}}, \beta = \sqrt{m_{\mathrm{B}}}, \ \gamma = \frac{1}{(m_{\mathrm{B}}\sqrt{g_{\mathrm{BB}}})}, \ g_{\mathrm{BB}} \neq 0.$$

Означаваме

$$\tilde{g}_{\mathrm{BF}} = g_{\mathrm{BF}}\alpha^2\gamma^2 m_{\mathrm{B}}, \ \tilde{\omega}_0 = \omega_0\gamma^2 m_{\mathrm{B}}, \ \tilde{\omega}_j = \omega_j\gamma^2 m_{\mathrm{F}},$$

$$\tilde{C}_j^2 = C_j^2\gamma^2/\alpha^4, \ \tilde{C}_0^2 = C_0^2\gamma^2/\beta^4.$$

Получаваме

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{q}_0}{d\tilde{x}^2} - \tilde{q}_0^3 - \tilde{g}_{\mathrm{BF}}\left(\sum_{i=1}^{N_f}\tilde{q}_i^2\right)\tilde{q}_0 + \tilde{\omega}_0\tilde{q}_0 = \frac{\tilde{C}_0^2}{2\tilde{q}_0^3}, \quad (0.0.33)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{q}_j}{d\tilde{x}^2} - \tilde{g}_{\mathrm{BF}}\tilde{q}_0^2\tilde{q}_j + \tilde{\omega}_j\tilde{q}_j = \frac{\tilde{C}_j^2}{2\tilde{q}_j^3}, \quad j = 1, \ldots, N_f.$$

За опростяване на разглежданията премахваме тилдите, пишем t вместо x и заместваме $p_j = \dot{q}_j, j = 0, \ldots, N_f$, (тук $\dot{} = d/dt$). Тогава системата (0.0.33) може да се разглежда като хамилтонова система с хамилтониан

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} p_j^2 + \omega_0 q_0^2 + \sum_1^{N_f} \omega_j q_j^2 \\
&- g_{\mathrm{BF}} q_0^2 \sum_1^{N_f} q_j^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} \frac{C_j^2}{q_j^2}. \quad (0.0.34)
\end{aligned}
$$

За Хамилтоновата система с хамилтониан (0.0.34) разглеждаме следните случаи в общо положение:

1) $C_0 = 0, C_j \neq 0, \omega_j = \omega^2/2, j = 1, \ldots, N_f$;

2) $C_0 \neq 0, C_j = 0, j = 1, \ldots, N_f$, $g_{\mathrm{BF}} = n(n+1)/2, n \notin \mathbb{Z}$;

3) $C_0 \neq 0, C_1 \neq 0, N_f = 1$, за достатъчно малко g_{BF}.

Теорема 7.(Теорема 6 в дисертацията.) *За горните случаи хамилтоновата система с хамилтониан (0.0.34) е интегруема точно тогава, когато* $g_{\mathrm{BF}} = 0$.

Формулировката на тази теорема е такава, защото ние извършваме проверка само в случаите за $n = 1$ и $n = 2$. Проблем в доказателството на общия случай се явява, факта че членът с ненулев резидуум се променя в различните случаи. Съществува предположение, че системата (0.0.34) е неинтегруема за всяко цяло $n > 2$.

С други думи, хамилтоновата система, която разглеждаме, е интегруема само когато променливите ѝ се разделят.

Доказателството на този факт се базира на Теорията на Зиглин-Моралес-Рамис-Симо. Този метод е прилаган за изследване на интегруемостта на системи с хомогенни потенциали, [39, 43, 42]. Класификацията на всички интегруеми системи с две степени на свобода, имащи полиномиални потенциали от степен 3, е получена в [30]. Разглежданата в тази работа система не е от този вид.

За естествените хамилтонови системи с две степени на свобода, подобни на разглежданата

$$
H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + U(q_1, q_2),
$$

съществува интегруемо обобщение на системата на Гарние, открито от Война Войчиеховски [58], а именно

$$
U = Aq_1^2 + Bq_2^2 + (q_1^2 + q_2^2)^2 + \frac{C}{q_1^2} + \frac{D}{q_1^2},
$$

с рационални първи интеграли, зависещи от A, B, C, D (вж. също [49]). Важно е да се отбележи, че в разглежданата система липсват симетрии и е нормално да очакваме интегруемост единствено в случая, когато променливите се разделят.

Схема на доказателство на **Теорема 7**:

Техниката, използвана в случая $C_0 = 0, C_j \neq 0$ е прилагане на алгоритъма на Ковачич за (NVE) спрямо така намереното частно решение [25, 12]. Уравнението, което се получава, е двойно-конфлуентно уравнение на Хойн, чиято група на Галоа е известна и единичната ѝ компонента е некомутативна.

След това продължаваме със случая $C_0 \neq 0, C_j = 0$. Това е най-сложният в техническо отношение случай. Тук уравненията в нормални вариации се разцепват до серия уравнения на Ламе. За да установим неинтегруемост освен **Теорема 3** в редица случаи се налага да разглеждаме висши вариации (до ред 3 включително). Тогава, за да приложим **Теорема 4**, достатъчно е да намерим логаритмичен член в развитието на решенията в ред на съответната вариация в околност на сингулярността.

В последния случай, на тази Теорема - $C_0 \neq 0, C_1 \neq 0$, използваме резултати от самопресичащи се комплексни сепаратриси. Изследва се интегралът на Поанкаре-Арнолд-Мелников [40]. Доказано е, че този интеграл има само прости нули и не е тъждествено нула, което е достатъчно за несъществуването на допълнителен мероморфен пръв интеграл в този случай.

Апробация на резултатите

Резултати, включени в дисертацията, са докладвани на:

1. Семинар Динамични системи и Теория на числата - 2014 г.

2. Семинар на Лабораторията по Солитони, Кохерентност и Геометрия - 2015г.

Част от резултатите са представени на следните конференции:

1. 39-та Конференция "Приложения на математиката в техниката и икономиката"(AMIEE'13), Созопол, България, 2013;

2. The 10-th AIMS Conference of Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid, Spain, 2014;

3. Втора научна конференция с международно участие „Комуникации, Електроенергетика и Информатика в Транспорта" - КЕИТ- 2014, с. Баня, общ. Разлог, България;

4. International Conference of Algebric Methods In Dynamical Systems, AMDS 2014, Barraquilla, Colombia.

Списък на публикациите по дисертацията

1. *Non- integrability of a system describing the stationary solutions in Bose-Fermi mixtures*, *AIP Conf. Proc.*, **1570, 313**, 2013, (съвместно с Огнян Христов).

2. *On the integrability of a system describing the stationary solutions in Bose- Fermi mixtures*, *Chaos, Solitons and Fractals*, **77**, 2015/8, p. 138-148 (съвместно с Огнян Христов).

3. *Computation of non-integrability of a system describing the stationary solutions in Bose-Fermi mixtures* ($C_o \neq 0, C_j = 0$), *Mech. Trans. Comm.*, **3**, 2014.

4. *Non-integrability of some higher-order Painlevé equation in Liouville sense*, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 2015(11), (съвместно с Огнян Христов).

Авторска справка

Основните приноси на настоящата дисертация са:

1. Доказателство, че хамилтоновата система отговаряща на уравнението със свойство на Пенлеве (F- XVIII)

$$w^{(4)} = 5w''(w^2 - w') + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma,$$

   е неинтегруема смисъл на Лиувил за дискретна фамилия от параметри.

2. Експлицитно пресмятане на топологичните генератори на групата на Галоа на (NVE) около нетривиални решения на хамилтоновата система, определяща горното уравнение.

3. Доказателство за неинтегруемост на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ и $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$- втория и третия член в йерархията P_{II} със свойство на Пенлеве в Лиувилов смисъл.

4. Доказателство, че интегруемост на системата от стационарните решения на уравненията, описващи Бозе-Ферми смеси в едномерна оптична решетка, има точно когато системата е тривиално сепарабелна.

Благодарности

Смятам за свое задължение да изкажа искрената си благодарност и признателност на моя научен консултант Огнян Христов от Софийски университет „Св. Климент Охридски“, за голямото търпение, за съветите и помощта, които той ми даде.

Благодарен съм също така и на член-кореспондент професор Емил Хорозов за плодотворните дискусии. Специална благодарност дължа и на доктор Цветана Стоянова за многото отделено време, на професор Иван Димитров от университета в Куинс-Канада за помощта по алгебричните въпроси, на колегите от семинара Динамични системи и Теория на числата, които изтърпяха моята лекция, на колегите ми във ВТУ „Тодор Каблешков“ за проявеното разбиране. Благодарен съм на ръководството на Висшето Транспортно Училище за оказаната финансова подкрепа. Благодарности на Огнян Касабов и Емил Иванов за ценните препоръки по оформянето на ръкописа.

Литература

[1] В. Голубев. *Лекции по Аналитической Теории Дифференциальных Уравнений.* Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, Ленинград, 1950.

[2] V. Arnold and A. Krylov. Uniform distribution of points on s sphere and some ergodic properties of solutions of linear ordinary diffrential equations in a complex region. *Dokl. Akad. Nauk*, 148:9–12, 1963.

[3] M. Arribas and A. Elipe. Non-integrability of the motion of a particle around a massive straight segment. *Physics Letters A*, 281:142–148, 2001.

[4] M. Audin. La réduction symplectique appliquée á la non-intégrabilité du probléme du satellite. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 12:25–46, 2003.

[5] J. Belmonte-Beitia, V.M. Perez-Garcia, and V. Vekslerchik. Modulational instability, solitons and periodic waves in models of quantum degenerate boson-fermion mixtures. *Chaos Solitons Fractals*, 32:1268–1277, 2007.

[6] Yu.V. Bludov, J. Santhanam, V.M. Kenkre, and V.V. Konotop. Matter waves of Bose–Fermi mixtures in one-dimensional optical lattices. *Phys. Rev.A*, 74, 2006.

[7] D. Boucher. Sur la non-intégrabilité du probléme plan des trois corps de masses égales á un le long de la solution de Lagrange. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 331, S. I:391–394, 2000.

[8] J. Chazy. Sur les équations différentielles du troisiéme orde et d'ordre supérieur, dont l'intégrale ses points critiques fixes (Thése). *Acta Math.*, 34:317–385, 1911.

[9] R. Churchill and D. Rod. On the determination of Ziglin monodromy Groups. *SIAM J. Math. Anal.*, 22:1790–1802, 1991.

[10] L. Coelho, J. Skea, and T. Stuchi. On the integrabilitu of Friedmann - Robertson - Walker models with conformally coupled massive scalar fields. *J. Phys. A*, 41:1–15, 2008.

[11] C. Cosgrove. Highrer-Order Painlevé Equations in Polynomial class I. Bureu Symbol P2. *Stud. in Appl. Math.*, 104:1–65, 2000.

[12] A. Duval and M. Loday-Richaud. Kovacic Algorithm and Its Application to Some Families of Special Functions. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing 3*, 1992.

[13] A. Duval and Cl. Mitschi. Matrices de Stokes et Groupe de Galois des Equations Hypergeometriques Confluentes Generalisees. *Pacific J. Math.*, 138,1:25–56, 1989.

[14] B. Gambier. Sur les équations différentielles du second orde du premier degré dont l'intégrale générale est á points critiques fixes . *Acta. Math. Ann.*, 33:1–55, 1909.

[15] R. Garnier. Sur les équations différentielles du troisiéme ordre dont l'integarle générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale générale á ses points critiques fixés. *Ann. Ecole Norm. Sup.*, 29:1–126, 1912.

[16] V.I. Gromak. Single-parameter families of solutions of Painlevé equations. *Diff. Eqns.*, 14:1510–1513, 1978.

[17] A. Hone. Non-autonomous Hénon–Heiles systems. *Physica D*, 118:1–16, 1998.

[18] E. Horozov. On the non-integrability of the Gross - Neweu models. *Annals of Physics*, 174:430–441, 1987.

[19] E. Horozov and Ts. Stoyanova. Non-integrability of some Painleve VI-equations and dilogarithms. *Regular and Chaotic Dynamics*, 12:620–627, 2007.

[20] M. Irigoyen and C. Simó. Non-integrability of the J_2 Problem. *Cel. Mech. and Dynam. Astr.*, 55, 1993.

[21] H. Ito. Non-intefrability of the Hénon - Heilse system and a theorem of Ziglin. *Koday Math. J.*, 8:129–138, 1985.

[22] T. Karpiuk, M. Brewczyk, S. Ospelkaus-Schwarzer, K. Bongs, M. Gajda, and K. Rzazewski. Soliton trains in Bose-Fermi mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 93, 2004.

[23] N. Katz. On the calculation of some differential galois groups. *Invent. Math.*, 87:13–61, 1987.

[24] N. Kostov, V. Gerdjikov, and T. Valchev. Exact Solutions for Equations of Bose–Fermi Mixtures in One-Dimensional Optical Lattice. *SIGMA*, 3, 2007.

[25] J.J. Kovacic. An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Diffrential Equations. *J. Symb. Comput.*, 2:3–43, 1986.

[26] S. Kowalevski. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un poin fixe. *Acta Math.*, 12:177–232, 1889.

[27] N. Kudryashov. Nonlinear fourth-order differntial equations with solutions in the form of transcendents. *Theor. and Math. Phys.*, 122, 1:58–71, 2000.

[28] A. Lyapounov. On a certain property of the differential equations of the problem of motion of a heavy rigid body having a fixed point. *Soobshch. Kharkov Math. Obshch. Ser. 2*, 4,1894:123–140, 1954.

[29] A. Maciejewski. *Non-integrability of certain Hamiltonian systems. Applications of Morales - Ramis differential Galois extension of Ziglin theory. Differential Galois Theory*, volume 58. Banach Center Publication, Warsaw, 2002.

[30] A. Maciejewski and M. Przybylska. All meromorphically integrable $2D$ Hamiltonian systems with homogeneous potential of degree 3. *Physics Letters A*, 327:461–473, 2004.

[31] A. Maciejewski and M. Przybylska. Non-integrability of the Suslov problem. *J. Math. Phys.*, 45:1065–1078, 2004.

[32] A. Maciejewski and M. Przybylska. Differential Galois Approach to the Non-integrability of the Heavy Top Problem. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2005.

[33] A. Maciejewski, M. Przybylska, and J. A. Wei. Non-integrability of the generalized spring-pendulum problem. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 37:2579–2597, 2004.

[34] A. Maciejewski, J. Strelcyn, and M. Szydlowski. Non-integrability of Bianchi VIII Hamiltonian System. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 37:2579–2597, 2004.

[35] M. Mazzocco and Mo M. Yue. The Hamiltonian Structure of the Second Painlevé Hierarchy. *Nonlinearity*, 20,12:2845–2882, 2007.

[36] Cl. Mitschi. Differential Galois Groups and G-functions. *Computer Algebra and Differential Equations, M. Singer editor*, pages 149–180, 1991.

[37] Cl. Mitschi. Differntial Galois Groups of Confluent Generalized Hypergeometric Equations: An Approach Using Stokes Multipliers. *Pacific J. Math.*, 176,no.2:365–405, 1996.

[38] C. Morales-Ruiz, J. Simó and S. Simon. Algebraic proof of the non-integrability of Hill's Problem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25,no.4:1237–1256, 2005.

[39] J. Morales-Ruiz. *Differential Galois Theory and Non integrability of Hamiltonian Systems*, volume 179. Birkhäuser, 1999.

[40] J. Morales-Ruiz. A note on a connection between the Poincaré-Arnold-Melnikov integral and the Picard-Vessiot Theory. *Banach Center Publications*, 58:165–175, 2002.

[41] J. Morales-Ruiz and J. Ramis. Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems. *Methods and Applications of Analysis*, 8:33–96, 2001.

[42] J. Morales-Ruiz and J-P. Ramis. *Integrability of Dynamical systems through Differential Galois Theory: practical guide*, volume 509. Contemporary Math., 2010.

[43] J. Morales-Ruiz, J-P. Ramis, and C. Simó. Integrability of Hamiltonian Systems and Differential Galois Group of Higher Variational Equations. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 40,6:845–884, 2007.

[44] J. Morales-Ruiz and C. Simo. Picard - Vessiot Theory and Ziglin's Theorem. *J. Diff. Eq.*, 107:140–162, 1994.

[45] K. Nishioka. A note on the transcedency of Painlevé first transcendent. *Nagoya Math. J.*, 109:p. 63–67, 1988.

[46] P. Painlevé. Sur les lignes singuliéres des fonctions analytiques. *Ann. de la Fac. de Sc. de Toulouse*, 1888.

[47] P. Painlevé. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles. *Professés á Stockholm*, 1896.

[48] P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second orde et d'ordre supérieur dont l'intégrale est uniforme. *Acta Math.*, 25:1–85, 1902.

[49] A. Perelomov. *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*, volume I. Birkhäuser, Basel, 1990.

[50] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, volume I. Gauthier- Villars, Paris, 1892.

[51] M. Salerno. Matter-wave quantum dots and antidots in ultracold atomic Bose–Fermi mixtures. *Phys. Rev. A*, 72, 2005.

[52] Ts. Stoyanova. Non-integrability of Painlevé VI in the Liouville sense. *Nonlinearity*, 22:2201–2230, 2009.

[53] Ts. Stoyanova. Non-integrability of Painlevé V in the Liouville sense and Stokes Phenomenon. *Advances in Pure Mathematics*, 1:170–183, 2011.

[54] Ts. Stoyanova and O. Christov. Non-Integrability of the Second Painlevé Equation as a Hamiltonian System. *Compte Rendu de l'academie bulgare des sciences*, 60,1:13–18, 2007.

[55] A. Tsygvintsev. La non-integrabilité méromorphe du probléme plan des trois corps. *C.R. Acad. Sci. Paris Série I*, 331:241–244, 2000.

[56] H. Umemura. Second proof of the irreducebility of the First Differential Equation of Painlevé. *Nagoya Math. J.*, 117:p. 125–171, 1990.

[57] H. Watanabe. Birational Canonical Transformations and Classical Solutions of the Sixth Painlevé Equation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Cl. Sci.*, 27, no. 3-4:379–425, 1998.

[58] S. Wojciechowski. Integrability of one particle in a perturbed central quartic potential. *Physica Scripta*, 31:433–438, 1985.

[59] H. Yoshida. Existence of exponentially unstable periodic solutions and the non-integrability of homogeneous hamiltonian systems. *Physika D*, 21:163–170, 1986.

[60] H. Yoshida. A criterion for the non-existence of an additional integral in hamiltonian systems with a homogeneous potential. *Physika D*, 29:128–142, 1987.

[61] S. Ziglin. Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics *I*. *Functional Anal. Appl.*, 16:181–189, 1982.

[62] S. Ziglin. Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics *II*. *Functional Anal. Appl.*, 17:6–17, 1983.