С О Ф И Й С К И   У Н И В Е Р С И Т Е Т
"СВ. К Л И М Е Н Т О Х Р И Д С К И"

Ф А К У Л Т Е Т  П О  М А Т Е М А Т И К А  И  И Н Ф О Р М А Т И К А

**АНДРЕЙ КОНСТАНТИНОВ САРИЕВ**

# ОПРЕДЕЛИМОСТ В СТЕПЕННИ СТРУКТУРИ

**АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ**

**за присъждане на образователната и научна степен "доктор"
по професионално направление "Математика" (4.5),
научна специалност "Математическа логика"**

**НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ: доц. д-р Христо Ганчев**

**СОФИЯ, 2015**

Дисертацията съдържа 91 страници, от които 81 страници основен текст, 8 страници увод, и 2 страници библиография.

Номерацията в скобите на теоремите, твърденията и определенията в автореферата съответствува точно на номерацията им в дисертационния труд.

Настоящият дисертационен труд е посветен на въпросите за определимост от първи ред в структурите на $\omega$-Тюринговите и $\omega$-номерационните степени, както и в техните локални подструктури.

В отговор на настъпилата в началото на XX век дълбока криза в математиката, David Hilbert предлага програма за реабилитиране на класическата математика. Грубо казано, Хилбертовата програма цели обхващането на математиката в пълни непротиворечиви теории. Основен стремеж на тази програма било доказването на непротиворечивостта на аритметиката в самата аритметика.

През 1930 г. Kurt Gödel доказва Теоремата за непълнота на аритметиката, с което нанася съкрушителен удар върху програмата на Hilbert. Един технически елемент от доказателството на тази теорема бил първата формализация на понятието за изчислима функция. Това за първи път позволило не само да се работи алгоритмично, но и да се разсъждава външно за изчислимостта. Не след дълго се развива цяла редица от модели на изчислимостта: рекурсивните функции на Gödel, $\lambda$-смятането на Church, машините на Turing, машините с неограничени регистри на Shepherdson и Sturgis. Макар наглед различни, оказва се, че тези формализми дават един и същи клас от функции. Еквивалентността на тези модели подтиква Alonzo Church да изкаже тезиса, че интуитивно и неформално определеният клас на изчислимите функции съвпада с класа на функциите определени от който и да е от по-горните формализми.

Всеки един от по-горе споменатите модели позволява ефективно изброяване на всички алгоритми (и, съответно, на частичните функции, изчислими от тези алгоритми), което от своя страна пък осигурява наличието на проблем (съответно, функция), който не може да бъде решен от такъв алгоритъм. Типичен пример е Стоп-проблемът. При фиксирано ефективно номериране на машините на Turing , се оказва, че проблемът за принадлежност към множеството $K$, състоящо се от номерата на онези машини на Turing, които завършват работа над вход същия този номер, не може да бъде разрешен от никоя машина на Turing (проблемът може да се изкаже и във всеки един друг от моделите на изчислимостта).

Въпреки, че множеството $K$ не е рекурсивно (т.е. характеристичната му функция не е такава), то е рекурсивно номеруемо. Казано иначе, съществува алгоритъм, който последователно (не непременно във възходящ ред и без повторения) генерира елементите на $K$.

В своята статия **[43]** от 1939 г. Alan Turing разширява по-рано въведения от него формализъм до така наречената Тюрингова машина с оракул. Това разширение позволява на машината да използва информация отвън, представена на машината чрез "оракул". Тази добавка ни дава възможност да сравняваме множествата (или, еквивалентно, тоталните функции) според тяхната изчислителна сила: множеството $B$ е изчислимо от $A$ (или, $A$-рекурсивно, или Тюрингово сводимо към $A$), ако съществува Тюрингова машина с оракул $\mathcal{M}$ такава, че характеристичната функция на $B$ е изчислимо чрез $\mathcal{M}$, използувайки оракул характеристичната функция на $A$.

Неразличавайки множествата, които са сводими едно към друго, стигаме до понятието степен на неразрешимост, въведено за първи път от Emil Post в статията му **[26]** от 1944 г. Степените на неразрешимост образуват частично наредено множество, с изучаването на което се занимава Теорията на степените. В по-горе цитираната статия, Post забелязва, че до този момент в математиката са разглеждани единствено два типа рекурсивно номеруеми множества. Първият тип са рекурсивните множества – множествата, които са възможно най-прости (относно Тюринговата сводимост). Те са сводими към всяко друго множество. Другият тип са пълните рекурсивно номеруеми множества, т.е. рекурсивно номеруемите множества, към които е сводимо всяко друго рекурсивно номеруемо множество (такова, например, е множеството $K$). Поставеният от Post въпрос е дали съществува нерекурсивно рекурсивно номеруемо множество, което не е пълно? Този проблем поставя началото на изследванията в Теорията на степените.

Независимо един от друг, Friedberg [**5**] и Мучник [**1**] разработват метода на приеритета, с помощта на който успяват да дадат утвърдителен отговор на въпроса на Post.

Релативизирайки идеята, стояща зад пълното множество $K$, Kleene [**12**] успява да покаже, че за всяко множество $A$ може да се намери множество $A'$ (което ще наричаме скок на $A$) такова, че $A'$ е пълно за $A$. Не след дълго, Kleene и Post [**13**] показват, че ако множествата $A$ и $B$ са от една и съща Тюрингова степен, то същото е в сила и за скоковете им. По този начин можем да пренесем оператора скок и върху степени.

Основната цел на Теория на степените е изучаването на алгебрически структури, основани на сводимости между дадени обекти, възникнали като формален начин за класифицирането на изчислителната сила на тези обекти. След началния тласък даден от статията на Post, са въведени и изучавани множество степенни структури, измежду които тези на рекурсивно номеруемите степени ($\mathfrak{R}$), Тюринговите степени ($\mathfrak{D}_T$), номерационните степени ($\mathfrak{D}_e$), Медведевите степени ($\mathfrak{M}$), Мучниковите степени ($\mathfrak{M}_w$), $\omega$-номерационните степени ($\mathfrak{D}_\omega$).

Всяка структура от степени е породена от определена релация на сводимост между обекти от дадено фиксирано множество. Така, например, за по-горе споменатите степенни структури обектите са рекурсивно номеруемите множества в случая на $\mathfrak{R}$, подмножествата на $\omega$ в случая на $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}_e$, множествата от (тотални) функции от $\omega$ в $\omega$ в случая на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_w$, и накрая, редиците от подмножества на $\omega$ в случая на $\mathfrak{D}_\omega$.

Нестрого, обектът $\alpha$ е сводим към обекта $\beta$, ако съществува алгоритъм преобразуващ дадена информация за $\beta$ в такава за $\alpha$. С други думи, в $\beta$ е кодирана информация за $\alpha$, която може да бъде алгоритмично разкодирана. Различните видове сводимости зависят не само от типа на обектите, но също така и от типа на преобразуваната информация. Допълнително, могат да се налагат и различни ограничения върху преобразуващия алгоритъм.

В случая на най-добре изучените сводимости – Тюринговата ($\leq_T$) и номерационната ($\leq_e$) – ограничения върху преобразуващия алгоритъм не се налагат. Разликата между двете сводимости е в типа на преобразуваната информация. В случая на Тюринговата сводимост преобразуваме характеристични функции, а при номерационната сводимост – номерации.

Както Тюринговата, така и номерационната сводимост е рефлексивна и транзитивна релация. Ето защо, и двете пораждат нетривиални релации на еквивалентност (съответно $\equiv_T$ и $\equiv_e$) по следния начин:

$$A \equiv B \iff A \leq B \ \& \ B \leq A.$$

Класовете на еквивалентност по $\equiv_T$ се наричат Тюрингови степени, а тези по $\equiv_e$ – номерационни степени. Преднаредбите $\leq_T$ и $\leq_e$ пораждат частични наредби в съответните множества от степени.

Не е непременно задължително, обаче, типа на входящата информация (т.е. информацията за множеството, към което се свежда) да съвпада с типа на изходящата информация (т.е. информацията за множеството, което свеждаме). Така, например, при сводимостта "рекурсивно номеруемо в" ($\leq_{r.e.}$), алгоритъмът трябва да преобразува характеристична функция в номерация. За разлика от Тюринговата и номерационната сводимости, релацията $\leq_{r.e.}$ е само рефлексивна и, следователно, не е преднаредба. По този начин, тя не може да породи степенна структура по описания по-горе метод. Оказва се, обаче, че можем да я използуваме по един друг начин.

За всяка една сводимост $\leq_r$ над множество от обекти $\Omega$, да разгледаме релацията $\preceq_r$ също над $\Omega$, определена чрез:

$$\alpha \preceq_r \beta \iff (\forall \gamma \in \Omega)[\beta \leq_r \gamma \Rightarrow \alpha \leq_r \gamma].$$

Всъщност, релацията $\preceq_r$ сравнява обектите от $\Omega$ по отношение на "простотата" им спрямо сводимостта $\leq_r$: обектът $\alpha$ е по-прост от обекта $\beta$, ако $\alpha$ е сводим към всеки обект, към който е сводим и $\beta$ (казано иначе, ако всеки обект, кодиращ $\beta$, кодира и $\alpha$).

Ако разгледаме релациите $\preceq_T$ и $\preceq_e$, базирани съответно на Тюринговата и номерационна сводимости, то не бихме получили нещо ново – породената релация и в двата случая съвпада с първоначалната. Другояче стоят нещата при релацията "рекурсивно номеруемо в". Selman показва, че породената релация $\preceq_{r.e.}$ съвпада с преднаредбата $\leq_e$ на номерационната сводимост.

Ползувайки подобна идея можем да въведем релация между редици от множества от естествени числа. Действително, ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две такива редици, да разгледаме релацията $\preceq_{*,\omega}$ дефинирана чрез

$$\mathcal{A} \preceq_{*,\omega} \mathcal{B} \iff (\forall X \subseteq \omega)[\mathcal{B} \trianglelefteq_* X \Rightarrow \mathcal{A} \trianglelefteq_* X],$$

където $\trianglelefteq_*$ е дадена сводимост между редица от множества от естествени числа и множество от естествени числа. Казано иначе, спрямо сводимостта $\preceq_{*,\omega}$, всяка редица $\mathcal{A}$ се определя от класа $\mathcal{M}_*(\mathcal{A}) = \{X \subseteq \omega \mid \mathcal{A} \trianglelefteq_* X\}$:

$$\mathcal{A} \preceq_{*,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{M}_*(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}_*(\mathcal{A}).$$

Разбира се, $\trianglelefteq_*$ не е преднаредба, най-малкото защото свежда обекти от различен тип. За разлика от нея, релацията $\preceq_{*,\omega}$ винаги е преднаредба. Ние ще се съсредоточим върху един специален клас от сводимости $\trianglelefteq_*$, изразяващи кодиране на редицата от множества в множеството, използуващо оператора за (Тюрингов) скок.

Наистина, нека редицата $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ е сводима към множеството $X$ ($\mathcal{A} \trianglelefteq_* X$), ако за всяко $n$, $A_n$ е сводимо към $n$-тия Тюрингов скок на $X$ ($A_n \leq_* X^{(n)}$). Освен това изискваме свеждането да бъде равномерно, т.е. да съществува алгоритъм, с помощта на който по $n$ да разбираме кой алгоритъм да използуваме за да сведем $A_n$ към $X^{(n)}$.

Сега, ако изберем сводимостта $\leq_*$ да бъде някоя измежду релациите $\leq_{\Sigma^0_k}$, $k < \omega$, [1], то съответната преднаредба $\preceq_{*,\omega}$ поражда степенна структура, която се оказва горна полурешетка с най-малък елемент. В дисертацията вниманието е спряно върху релациите в случаите, когато $k$ е 0 и 1 (в тези случаи, $\leq_*$ съвпада съответно с $\leq_T$ и $\leq_{r.e.}$). Съответните породени степенни структури са означени с $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ и $\mathfrak{D}_\omega$ и наричани структури на $\omega$-Тюринговите и $\omega$-номерационните степени.

С помощта на оператора $'$ за Тюрингов скок, се въвеждат оператори за скок и в структурите $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ и $\mathfrak{D}_\omega$. Оказва се, че за всяка редица $\mathcal{A}$ можем да намерим редица $\mathcal{A}'$ такава, че $\mathcal{M}_*(\mathcal{A}')$ се състои именно от Тюринговите скокове на множествата от $\mathcal{M}_*(\mathcal{A})$. В случая на разглежданите структури изображението $' : \mathcal{A} \longmapsto \mathcal{A}'$ е строго монотонно и запазващо наредбата и, следователно, може коректно да породи оператор скок и в съответната степенна структура.

Изследвайки сложността на дадена степенна структура, подходът ни може да има различни изражения. Едно такова изражение е чисто алгебрично изследване на степенната структура, което включва изучаването на проблеми за влагане и гъстота на структурата (или, обратно, наличие на минимални степени и минимални покрития). Друг ъгъл, под който може да бъде изследвана степенна структура, е да се анализира сложността на теорията ѝ. Този анализ включва определянето на разделящата линия (в термините на фрагменти от теорията) между разрешимостта и неразрешимостта, както и сравняването на теорията на структурата с други известни теории (в най-честия случай, с теорията на аритметиката от $n$-ти ред). Сложността на дадена степенна структура може да бъде описана и от твърдостта ѝ по отношение на автоморфизми (т.е. дали структурата притежава нетривиални автоморфизми). Друго изследване на сложността на структура може да бъде насочено към намирането на явно външни за структурата, но определими в езика ѝ, релации над степени[2]. Разбира се, всички тези подходи са взаимно свързани. Така, например, определимите класове от степени ограничават възможните автоморфизми на структурата.

Основната линия на представените изследвания върху структурите $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ и $\mathfrak{D}_\omega$ ще касае основно въпросите за определимост. Въпреки това, те не се изчерпват с тази тема.

Главна роля в изследванията в теория на степените, касаещи въпроса за определимост, играе операторът за скок. Наистина, дори първите нетривиални резултати за определимост са свързани със структурата $\mathfrak{D}'_T$ на Тюринговите степени с добавен оператор за скок. Въпросът, дали самият оператор за (Тюрингов) скок е определим в термините на наредбата на Тюринговата сводимост, е повдигнат още в първата работа на Kleene и Post относно структурата $\mathfrak{D}_T$. Разрешаването на този въпрос се оказва съвсем

[1] Релацията $\leq_{\Sigma^0_k}$ между множества от естествени числа е определена чрез:

$$A \leq_{\Sigma^0_k} B \iff A \in \Sigma^B_k.$$

Така, например, $A \leq_{\Sigma^0_0} B$ точно тогава, когато $A$ е рекурсивно в $B$ и $A \leq_{\Sigma^0_1} B$ точно тогава, когато $A$ е рекурсивно номеруемо в $B$.

[2] Под това една $n$-мерна релация над степени да бъде определима в степенната структура имаме предвид, че съществува формула в езика на структурата, която е вярна точно върху $n$-орките от степени, които са в релацията.

нетривиална задача. В историята остават няколкото неуспешни опита на Cooper за даването на естествено определение на скока. Едва през 1999 г. Shore и Slaman [**33**] съумяват да установят определимостта на оператора $'$. Основна съставка в доказателството им е получената по-рано от Slaman и Woodin, [**34**], определимост на оператора $''$ за двоен скок. Тази определимост разчита на разработените във същата статия техники за кодиране на модели на аритметиката в Тюринговата степенна структура. Недостатък на тези кодиращи техники е, че от тях не може да се извлече естествена дефиниция. Все още остава нерешена задачата за намирането на естествено определение на Тюринговия скок.

Нещата стоят по друг начин в структурата $\mathfrak{D}_e$ на номерацонните степени. Въпреки, че и в този случай са възможни подобни кодиращи техники, проблемът за определимостта на номерационния скок получава поестествено решение. В [**10**] Калимулин въвежда понятието за $\mathcal{K}$-двойка като показва, че $\mathcal{K}$-двойките образуват нетривиален клас, който е определим с проста $\Pi^0_1$ формула в езика на решетките. Осланяйки се на свойствата на $\mathcal{K}$-двойите, Калимулин съумява явно да посочи формула (от първи ред), дефинираща оператора за номерационен скок.

Наред със структурата $\mathfrak{D}_T$, обект на изследвания в теория на степените стават и две нейни подструктури – $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ състояща се от Тюринговите степени, изчислими в Стоп-проблема, и $\mathfrak{R}$, състояща се от степените, съдържащи рекурсивно номеруемо множество. Разбира се, монотонността на оператора скок и фактът, че и двете структури имат най-голям елемент, а именно степента на Стоп-проблема ($\mathbf{0}'_T$), показват, че $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ и $\mathfrak{R}$ не са затворени по отношение на оператора за скок. Обаче, с помощта на този оператор, можем да разбиване едно разлагане на тези локални структури, което отразява близостта на степените до $\mathbf{0}_T$ и $\mathbf{0}'_T$ по отношение на операцията скок. Действително, за всяко естествено число $n$, $n$-тия скок на една степен $\mathbf{a}$ (в $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ или $\mathfrak{R}$) винаги попада в интервала $[\mathbf{0}^{(n)}_T, \mathbf{0}^{(n+1)}_T]$. Ето защо, интересно е да разгедаме класът от степените, чиито $n$-ти скок е възможно най-малък:

$$\mathbf{L}_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n)}_T\},$$

които ще наричаме $n$-ниски, както и класът от степените, чиито $n$-ти скок е възможно най-голям:

$$\mathbf{H}_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n+1)}_T\},$$

които ще наричаме $n$-високи. Класът на степените, които за никое $n$ не са нито $n$-ниски, нито $n$-високи ще бележим с $\mathbf{I}$, а самите степени ще наричаме междинни. Оказва се, че тази йерархия базирана на скока е неизродена[3]. Естествено възниква въпросът за определимостта на всеки един от класовете $\mathbf{H}_n$, $\mathbf{L}_n$ и $\mathbf{I}$ в локалните подструктури $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ и $\mathfrak{R}$. Използувайки методи, кодиращи аритметиката в структурата $\mathfrak{R}$, Nies, Shore и Slaman [**21**] показват, че за всяко $n$, класовете $\mathbf{L}_{n+1}$ и $\mathbf{H}_n$ са определими с формула от първи ред както в $\mathfrak{R}$, така и в $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$. Отново, тези методи не позволяват явното извличане на естествена дефиниция на определените класове.

[3] с други думи, за всяко $n$, класовете $\mathbf{L}_{n+1} - \mathbf{L}_n$, $\mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n$ и $\mathbf{I}$ са непразни.

За класа на междинните степени е известно, че не е определим в нито една от двете локални подструктури.

Изобщо, бидейки една степенна структура горна полурешетка с най-малък елемент и допълнителен оператор за скок, интерес за изследвания представлява и нейната локална подструктура (т.е. подструктурата от степените, ограничени от скока на най-малкия елемент на структурата). Отново, могат да бъдат разгледани класовете от скок йерархията и съответните въпроси за тяхната определимост.

Както вече бе споменато, градивните елементи на степените в случая както на $\mathfrak{D}_{T,\omega}$, така и на $\mathfrak{D}_\omega$ представляват редици от множества от естествени числа. Оказва се, че и в двата случая, по дадена редица от множества можем (при това, ефективно) да построим друга редица, лежаща в същата степен и такава, че всеки неин елемент кодира скока на предхождащия го такъв. Тъй като идеите в Тюринговия и номерационния случаи са сходни, то с цел опростявана на изложението, да фиксираме $r$ да бъде някоя измежду сводимостите $T$ и $e$.

**Определение 1. (Определение 1.5.1)** *Нека $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ е редица от множества от естествени числа. Дефинираме $r$-скок редица $\mathcal{P}^r(\mathcal{B}) = \{P^r_k(\mathcal{B})\}_{k<\omega}$ на редицата $\mathcal{B}$ с индукция по $k < \omega$:*

- $P^r_0(\mathcal{B}) = B_0$;
- $P^r_{k+1}(\mathcal{B}) = P^r_k(\mathcal{B})'_r \oplus B_{k+1}$.

Тук с $X'_r$ сме означили скока на множеството $X$.

Оказва се, че Тюринговата и номерационната скок-редици са свързани по начин, наподобаващ връзката между Тюринговия и номерационния скок.

**Лема 2. (Лема 1.5.4)** *Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ е редица от множества от естествени числа. Тогава равномерно по $k < \omega$,*

$$\mathcal{P}^T_k(\mathcal{A})^+ \equiv_e \mathcal{P}^e_k(\mathcal{A}^+).$$

Глава 2 е посветена на въведената от Сосков [**38**] структура $\mathfrak{D}_\omega$ на $\omega$-номерационните степени. $\mathfrak{D}_\omega$ е породена от $\omega$-номерационната сводимост над множеството $\mathcal{S}_\omega$ от изброимите редици от множества от естествени числа. Следвайки означенията от по-горе, $\omega$-номерационната сводимост съвпада със сводимостта $\preceq_{r.e.,\omega}$, за основа на която стои $\leq_{r.e.}$. По този начин, една редица $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ от $\mathcal{S}_\omega$, е кодируема в множеството $X$ ($\mathcal{A} \trianglelefteq_{r.e.} X$), ако то може да изчисли, по равномерен начин, номерация на $k$-я елемент на редицата $\mathcal{A}$ в своя $k$-ти Тюрингов скок:

$$\mathcal{A} \trianglelefteq_{r.e.} X \iff A_k \leq_{r.e.} (X)^{(k)}_T \text{ равномерно по } k.$$

Така релацията $\preceq_{r.e.,\omega}$ над $\mathcal{S}_\omega$ се определя по следния начин:

$$\mathcal{A} \preceq_{r.e.,\omega} \mathcal{B} \iff (\forall X \subseteq \omega)[\mathcal{B} \trianglelefteq_{r.e.} X \Rightarrow \mathcal{A} \trianglelefteq_{r.e.} X].$$

За да спазим първоначалните означения на Сосков, ще използваме $\leq_\omega$ вместо $\preceq_{r.e.,\omega}$. Релацията $\equiv_\omega$ се определя чрез:

$$\mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \;\&\; \mathcal{B} \leq_\omega \mathcal{A},$$

като очевидно тя е релация на еквивалентност. Класовене на еквивалентност по $\equiv_\omega$ наричаме $\omega$-номерационни степени. Класът на еквивалентност, съдържащ $\mathcal{A}$ ще означаваме с $\deg_\omega(\mathcal{A})$. Съвкупността от всички $\omega$-номерационни степени ще означаваме с $\mathbf{D}_\omega$. Релацията $\leq_\omega$ поражда релация на частична наредба $\leq$ в $\mathbf{D}_\omega$:

$$\deg_\omega(\mathcal{A}) \leq \deg_\omega(\mathcal{B}) \iff \mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}.$$

Оказва се, че степента $\mathbf{0}_\omega = \deg_\omega(\{\emptyset\}_{k<\omega})$ е най-малкият елемент в тази частична наредба. Освен това, степента на редицата $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{A_k \oplus B_k\}_{k<\omega}$ е точна горна граница на степените $\deg_\omega(\mathcal{A})$ и $\deg_\omega(\mathcal{B})$. По този начин, частично нареденото множество $(\mathbf{D}_\omega, \leq)$ е горна полурешетка с най-малък елемент. Полурешетката $(\mathbf{D}_\omega, \mathbf{0}_\omega, \leq, \vee)$ ще означаваме с $\mathfrak{D}_\omega$.

Експлицитна характеризация на $\omega$-номерационната сводимост в термините на $e$-скок-редиците може да бъде намерена в [**40**]. Според нея, за всеки $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$,

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \iff A_k \leq_e \mathcal{P}^e_k(\mathcal{B}) \text{ равномерно по } k.$$

Следвайки дефиницията на Сосков и Ганчев [**39**], е разгледан ($\omega$-номерационен) скок $\mathcal{A}'$ на редица, зададен по правилото

$$\mathcal{A}' = (P^e_1(\mathcal{A}), A_2, A_3, \dots, A_k, \dots).$$

Свойствата на тази операция позволяват да се въведе оператор за скок в $\mathfrak{D}_\omega$ чрез

$$\deg_\omega(\mathcal{A})' = \deg_\omega(\mathcal{A}').$$

Оказва се, че $\mathfrak{D}_\omega$ може по естествен начин да се разглежда като разширение на структурата $\mathfrak{D}_e$ на номерационните степени. Действително, изображението $\kappa_e : \mathbf{D}_e \to \mathbf{D}_\omega$, дефинирано с

$$\kappa_e(\deg_e(X)) = \deg_\omega(X \uparrow \omega),$$

където $X \uparrow \omega = (X, \emptyset, \dots)$ за произволно множество $X$, е влагане на $\mathfrak{D}'_e$ в $\mathfrak{D}'_\omega$. С $\mathbf{D}_{e,1}$ ще означаваме областта от стойностите на $\kappa_e$.

Също както в случая на Тюринговите степени, областта от стойностите на оператора скок е точно горният конус от степените над скока $\mathbf{0}'_\omega$ на най-малкия елемент $\mathbf{0}_\omega$. По-общо, за всяка $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega$ образът на конусът от степените над $\mathbf{x}$, под действието на операцията скок, е точно конусът от степените над $\mathbf{x}'$. Последното, обаче, се дължи на свойство на скока в $\mathfrak{D}_\omega$, което не е в сила нито в $\mathfrak{D}_T$, нито в $\mathfrak{D}_e$. Именно, Сосков и Ганчев [**39**] показват, че за всяко $n < \omega$ и всеки две степени $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_\omega$, за които $\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{b}$, съществува най-малка степен $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega$ със свойствата $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}$. По-нататък, ще бележим тази най-малка степен с $\mathbf{I}^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$.

Базирайки се на свойствата на операцията $\mathbf{I}^n_{\mathbf{a}}$, в [**39**] Сосков и Ганчев показват, че изоморфното копие $\mathbf{D}_{e,1}$ на структурата на номерационните степени е определимо с формула от първи ред в структурата $\mathfrak{D}'_\omega$. В същата работа е показано още, че $\mathfrak{D}_e$ и $\mathfrak{D}'_\omega$ притежават изоморфни групи на автоморфизмите.

Така въведената операция скок дава началото на локалната подструктура на степените лежащи под първия скок $\mathbf{0}'_\omega$ на най-малката $\omega$-номерационна степен $\mathbf{0}_\omega$. По-нататък с $\mathbf{G}_\omega$ е означен интервалът $[\mathbf{0}_\omega, \mathbf{0}'_\omega]$, а с $\mathfrak{G}_\omega$ – структурата $(\mathbf{G}_\omega, \leq)$ с индуцирана наредба от $\mathfrak{D}_\omega$.

Получените резултати за определимост в $\mathfrak{D}_\omega$, се основават изключително на понятието за $\mathcal{K}$-двойка. Оказва се, че всеки елемент на $\mathcal{K}$-двойка е или “почти нулева” степен, т.е. степен, различаваща се от $\mathbf{0}_\omega$ само по липсата на равномерност, или е степен, която е “наследена” от структурата $\mathfrak{D}_e$ на номерационните степени. За да бъдат отделени тези два класа от степени посредством условие от първи ред, се въвежда следващото понятие.

**Определение 3. (Определение 2.3.1)** *Нека $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \mathbf{0}, \leq, \vee)$ е горна полурешетка с най-малък елемент. Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}$ са такива, че $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$. Ще казваме, че $\mathbf{a}$ е разделима над $\mathbf{b}$, ако съществуват $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}$ такива, че*

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{x}, \mathbf{y} < \mathbf{a} \text{ и } \mathbf{a} = \mathbf{x} \vee \mathbf{y}.$$

*В противен случай ще казваме, че $\mathbf{a}$ е неразделима над $\mathbf{b}$. В случай, че $\mathbf{b}$ съвпада с най-малкия елемент $\mathbf{0}$, ще казваме съответно само, че $\mathbf{a}$ е разделима или неразделима.*

Сосков и Ганчев [**39**] въвеждат *почти нулевите* (*a.z.*) степени. Следвайки тяхната дефиниция, степента $\mathbf{x}$ ще наричаме *a.z.* точно тогава, когато съществува редица $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$ такава, че

$$(\forall k)[P_k^e(\mathcal{X}) \equiv_e \emptyset^{(k)}].$$

В следващата теорема е установена връзката между *a.z.* и разделимите степени.

**Теорема 4. (Теорема 2.3.2)** *Всяка ненулева a.z. степен е разделима.*

От факта, че класът на *a.z.* степените е затворен надолу и от предишната теорема, е получено, че всяка ненулева степен, лежаща под *a.z.* степен е разделима.

В следващото определение е формализирано понятието за наследеност.

**Определение 5. (Определение 2.3.3)** *Ще казваме, че степента $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega$ е наследена, ако съществуват $A \subseteq \omega$ и $n < \omega$ (, които ще наричаме свидетели за наследеността на $\mathbf{a}$) такива, че*

- $\emptyset^{(n)} \leq_e A \leq_e \emptyset^{(n+1)}$;
- $A' \equiv_e \emptyset^{(n+1)}$;
- $(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset}_{n}, A, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots) \in \mathbf{a}$.

Оказва се, че най-голямата наследена степен е $\mathbf{0}'_\omega$. Освен това, единствената степен, която е едновременно *a.z.* и наследена е най-малкият елемент $\mathbf{0}_\omega$. Показано е, че също както класът на *a.z.* степените, така и този на наследените е затворен надолу.

В следващата теорема е установена връзката между наследените и неразделямемите степени.

**Теорема 6. (Теорема 2.3.6)** *Всяка ненулева наследена степен ограничава ненулева неразделима степен.*

Оттук е заключено, че наследените и *a.z.* степените могат да бъдат отделени помежду си с формула от първи ред.

**Следствие 7. (Следствие 2.3.7)** *Нека $\mathfrak{C} \subseteq \mathbf{D}_\omega$ е клас, съдържащ единствено степени, които са a.z. или наследени. Тогава, за всяка степен $\mathbf{a} \in \mathfrak{C}$, $\mathbf{a}$ е наследена точно тогава, когато или $\mathbf{a} = \mathbf{0}_\omega$ или $\mathbf{a}$ ограничава ненулева неразделима степен.*

$\mathcal{K}$-двойките са въведени от Калимулин, [**10**], с цел дефинирането на номерационния скок с формула от първи ред в езика на структурата $\mathfrak{D}_e$.

**Определение 8. (Определение 2.4.1)** *Нека* $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \leq)$ *е частична наредба. Ще казваме, че* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка (строго) над* $\mathbf{u}$ *за* $\mathfrak{D}$*, ако* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbf{D}, \mathbf{u} \leq \mathbf{a}, \mathbf{b}$ $(\mathbf{u} \lneq \mathbf{a}, \mathbf{b})$ *и за всяко* $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$ *такова, че* $\mathbf{u} \leq \mathbf{x}$*, точните горни граници* $\mathbf{x} \vee \mathbf{a}, \mathbf{x} \vee \mathbf{b}$ *и точната долна граница* $(\mathbf{x} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{x} \vee \mathbf{b})$ *съществуват като при това е в сила:*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{x} \vee \mathbf{b}).$$

Да забележим, че съществува формула от първи ред $\mathcal{K}$ с две свободни променливи такава, че ако $\mathfrak{D}$ има най-малък елемент $\mathbf{0}$, то

$$\mathfrak{D} \models \mathcal{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \text{ е } \mathcal{K}\text{-двойка строго над } \mathbf{0} \text{ за } \mathfrak{D}.$$

Оказва се, че операциите скок и обръщане на скока запазват свойството на $\mathcal{K}$-двойките. Установено е, също, че ако елементите на $\mathcal{K}$-двойката са ниски, то изображението $\kappa_e$ запазва свойсвото на $\mathcal{K}$-двойките.

С помощта горните свойства и основавайки се на характеризацията на $\mathcal{K}$-двойките в локалната подструктура на $\mathfrak{D}_\omega$, направена от Ганчев и М. Соскова, [**8**], са характеризирани $\mathcal{K}$-двойките в $\mathfrak{D}_\omega$.

**Теорема 9. (Теорема 2.4.12)** *Нека* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка строго над* $\mathbf{0}_\omega$ *за* $\mathfrak{D}_\omega$*. Тогава е в сила точно едно от двете:*

- $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са a.z. степени;*
- $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са наследени като има свидетели* $A \subseteq \omega$ *и* $n < \omega$ *за* $\mathbf{a}$ *и* $B \subseteq \omega$ *и* $n < \omega$ *за* $\mathbf{b}$ *такива, че* $\{deg_e(A), deg_e(B)\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка строго над* $\mathbf{0}_e$ *за* $\mathfrak{D}_e[\geq \mathbf{0}_e^{(n)}]$.

Оказва се, че всички $\mathcal{K}$-двойки строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{D}_\omega$, които не съдържат *a.z.* степени, се състоят от елементи, ограничени отгоре от $\mathbf{0}'_\omega$. Това наблюдение, заедно с установената по-рано отделимост на *a.z.* степените от наследените степени чрез формула от първи ред позволяват определянето на първия скок $\mathbf{0}'_\omega$ на най-малкия елемент $\mathbf{0}_\omega$ на $\mathfrak{D}_\omega$ като най-голямата степен, която е точна горна граница на елементите на $\mathcal{K}$-двойка за $\mathfrak{D}_\omega$, чиито елементи не са *a.z.*.

**Теорема 10. (Теорема 2.5.2)** $\mathbf{0}'_\omega$ *е определим с формула от първи ред в структурата* $\mathfrak{D}_\omega$*.*

Въпросът дали самата операция за скок е определима от първи ред все още остава отворен.

Последните два раздела на Глава 2 са посветени на локалната подструктура $\mathfrak{G}_\omega$ на $\mathfrak{D}_\omega$, т.е. на $\omega$-номерационните степени заключени между най-малката $\omega$-номерационна степен $\mathbf{0}_\omega$ и нейния скок $\mathbf{0}'_\omega$. Основната цел е изследването на скок йерархията.

В [**39**] Сосков и Ганчев дават характеризация на класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$, която не включва директно операцията скок. За тази цел те използват един клас от експлицитно дефинирани елементи на $\mathbf{G}_\omega$. Действително, нека $\mathbf{o}_n$ е най-малката степен, чийто $n$-ти скок е равен на $\mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$, т.е.

$$\mathbf{o}_n = \mathbf{I}^n(\mathbf{0}_\omega^{(n+1)}).$$

Те показват, че $\mathbf{o}_n$ е най-малкият елемент в класа $\mathbf{H}_n$ като е в сила характеризацията

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{G}_\omega)[\mathbf{x} \in \mathbf{H}_n \iff \mathbf{o}_n \leq \mathbf{x}]. \tag{0.0.1}$$

По-нататък, получават и характеризация на $n$-ниските степени в термините на частичната наредба $\leq$ и степените $\mathbf{o}_n$:

$$\mathbf{x} \in \mathbf{L}_n \iff \mathbf{x} \wedge \mathbf{o}_n = \mathbf{0}_\omega. \tag{0.0.2}$$

Известно е и, че степените $\mathbf{o}_n$ образуват строго намаляваща редица, т.е.

$$\mathbf{0}'_\omega = \mathbf{o}_0 > \mathbf{o}_1 > \mathbf{o}_2 > \cdots > \mathbf{o}_n > \ldots.$$

Да отбележим, че не всички $a.z.$ степени са в $\mathbf{G}_\omega$. Сосков и Ганчев показват **[39]**, че $a.z.$ степените под $\mathbf{0}'_\omega$ могат да бъдат характеризирани в термините на степените $\mathbf{o}_n$,

$$\mathbf{x} \in \mathbf{G}_\omega \text{ е } a.z. \iff (\forall n < \omega)[\mathbf{x} \leq \mathbf{o}_n].$$

Основна роля в резултатите за определимост в локалната подструктура играят нетривиалните $\mathcal{K}$-двойки за $\mathfrak{G}_\omega$. Според направената им от Ганчев и М. Соскова в **[9]** характеризация, една такава двойка се състои или от $a.z.$ степени (такава $\mathcal{K}$-двойка ще наричаме $a.z.$), или от $n$-наследени степени, за някое естествено число $n$ (такава $\mathcal{K}$-двойка ще наричаме *наследена*). Използувайки тази характеризация, Ганчев и М. Соскова показват, че за всяко $n$, $\mathbf{o}_n$ е най-голямата степен в $\mathfrak{G}_\omega$, която е точна горна граница на елементите на $\mathcal{K}$-двойка за $\mathfrak{G}_\omega$, удовлетворяваща допълнително условие от първи ред. По този начин е получено определение от първи ред в $\mathfrak{G}_\omega$ на всяка една от степените $\mathbf{o}_n$. Тази определимост, заедно с характеризациите от (0.0.1) и (0.0.2) влече определимостта на всеки един от класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$, $n < \omega$. В дисертацията се цели получаването на дефиниция от първи ред на класовете $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ и $\mathbf{I}$ в подструктурата $\mathfrak{G}_\omega$. Не е трудно да се види, че за това е достатъчно да се определи множеството $\mathfrak{O} = \{\mathbf{o}_n \mid n < \omega\}$ в $\mathfrak{G}_\omega$.

За да се направи това, са изследвани отношенията на елементите на $\mathfrak{O}$ с $\mathcal{K}$-двойките за $\mathfrak{G}_\omega$.

От намереното от Ганчев и М. Соскова определение на всяка една от степените $\mathbf{o}_n$ и от свойствата на $a.z.$ степените, се съобразява, че за всяко $n < \omega$, $\mathbf{o}_n$ е точната горна граница на елементите на наследена $\mathcal{K}$-двойка (строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{G}_\omega$). Понеже $a.z.$ степените са разграничими с условие от първи ред от наследените степени, то наследените $\mathcal{K}$-двойки са определими с формула от първи ред в $\mathfrak{G}_\omega$.

Следващата стъпка е разграничаването (със свойство от първи ред) на степените $\mathbf{o}_n, n < \omega$ от всички останали степени в $\mathbf{G}_\omega$, които са точни горни граници на елементи на наследена $\mathcal{K}$-двойка. За целта са изследвани възможните начини, по които точната горна граница на елементите на наследена $\mathcal{K}$-двойка може да се отнася към елементите на наследена $\mathcal{K}$-двойка. Случаят, когато точната горна граница е елемент на $\mathfrak{O}$ е разгледан в следващата Лема.

**Лема 11. (Лема 2.7.1)** *Нека $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ наследена $\mathcal{K}$-двойка. Тогава за всяко $n < \omega$ е в сила точно един от случаите:*

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} < \mathbf{o}_n$;
- $\mathbf{a}, \mathbf{b} |_\omega \mathbf{o}_n$.

Оказва се, че винаги когато точната горна граница не е от множеството $\mathfrak{O}$, то може да посочи наследена $\mathcal{K}$-двойка, чиито елементи не се отнасят към точната горна граница по никой от двата начина описани в горната Лема.

**Лема 12. (Лема 2.7.2)** *Нека* $\mathbf{x}$ *е точна горна граница на елементите на наследена* $\mathcal{K}$*-двойка като за всяко* $n < \omega$*,* $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}_n$*. Тогава съществува наследена* $\mathcal{K}$*-двойка* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ *такава, че* $\mathbf{a}|_\omega \mathbf{x}$ *и* $\mathbf{b} \leq \mathbf{x}$.

С това е показано, че дадена степен $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'_\omega$ е $\mathbf{o}_n$ за някое естествено число $n$ точно тогава, когато $\mathbf{x}$ е точна горна граница на наследена $\mathcal{K}$-двойка и за всяка наследена $\mathcal{K}$-двойка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ или $\mathbf{a}, \mathbf{b} < \mathbf{x}$, или $\mathbf{a}, \mathbf{b}|_\omega \mathbf{x}$. Това дава определимостта от първи ред в $\mathcal{G}_\omega$ на множеството $\mathfrak{O}$, а следователно, и на класовете $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ и $\mathbf{I}$.

**Теорема 13. (Теорема 2.7.3)** *Всеки един от класовете* $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ *и* $\mathbf{I}$ *е определим с формула от първи ред в локалната подструктура* $\mathfrak{G}_\omega$*.*

Като следствие е получена и определимостта на множестовото на $a.z.$ степените под $\mathbf{0}'_\omega$.

Глава 3 е посветена на структурата на $\omega$-Тюринговите степени $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Целта е да се изследва аналог на $\omega$-номерационните степени, в който сводимостта "рекурсивно номеруемо в" ($\Sigma^0_1$) е заменена с Тюринговата сводимост ($\Sigma^0_0$). Така, пораждащата за $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ сводимост е $\preceq_{T,\omega}$ (понеже $\preceq_{r.e.,\omega}$ ($\leq_\omega$) поражда $\mathfrak{D}_\omega$).

Преднаредбата $\preceq_{T,\omega}$ е породена от Тюринговата сводимост $\leq_T$. Една редица $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ от множества от естествени числа, е кодируема в множеството $X$ ($\mathcal{A} \trianglelefteq_T X$), ако $X$ може, по равномерен начин, да изчисли $k$-я елемент на редицата в своя $k$-ти Тюрингов скок:

$$\mathcal{A} \trianglelefteq_T X \iff A_k \leq_T X^{(k)} \text{ равномерно по } k.$$

Накрая, релацията $\preceq_{T,\omega}$ над $\mathcal{S}_\omega$ са определя чрез:

$$\mathcal{A} \preceq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff (\forall X \subseteq \omega)[\mathcal{B} \trianglelefteq_T X \Rightarrow \mathcal{A} \trianglelefteq_T X].$$

Занапред, за да се подчертае близостта с $\leq_\omega$, ще се ползува означенито $\leq_{T,\omega}$ наместо $\preceq_{T,\omega}$. Релацията $\leq_{T,\omega}$ е преднаредба, т.е. тя е рефлексивна и транзитивна. Така релацията $\equiv_{T,\omega}$ определена чрез:

$$\mathcal{A} \equiv_{T,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \;\&\; \mathcal{B} \leq_{T,\omega} \mathcal{A},$$

е релация на еквивалентност. Класовете на еквивалентност по $\equiv_{T,\omega}$ ще наричаме $\omega$-Тюрингови степени, като класът на еквивалентност, съдържащ $\mathcal{A}$ ще бележим с $\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})$. С $\mathbf{D}_{T,\omega}$ ще означаваме съвкупността на всички $\omega$-Тюрингови степени. Релацията $\leq_{T,\omega}$ поражда в $\mathbf{D}_{T,\omega}$ релация на частична наредба $\leq$:

$$\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) \leq \deg_{T,\omega}(\mathcal{B}) \iff \mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}.$$

Оказва се, че степента $\mathbf{0}_{T,\omega} = \deg_{T,\omega}(\{\emptyset\}_{k<\omega})$ е най-малкият елемент в тази частична наредба. Освен това, точната горна граница на степените $\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})$ и $\deg_{T,\omega}(\mathcal{B})$ е степента на редицата $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{A_k \oplus B_k\}_{k<\omega}$. По този начин, частично нареденото множество $(\mathbf{D}_{T,\omega}, \leq)$ е горна полурешетка с най-малък елемент. Полурешетката $(\mathbf{D}_{T,\omega}, \mathbf{0}_{T,\omega}, \leq, \vee)$ ще означаваме с $\mathfrak{D}_{T,\omega}$.

Показана е следната връзка между $\omega$-номерационната и $\omega$-Тюринговата сводимости, наподобяваща тази между номерационната и Тюринговата:

$$\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{A}^+ \leq_\omega \mathcal{B}^+.$$

Тук, за $\mathcal{X} = \{X_k\}_{k<\omega}$, с $\mathcal{X}^+$ е означено $\{X_k^+\}_{k<\omega}$. Оттук е намерено изразяване на $\omega$-Тюринговата сводимост в термините на Тюринговата скок-редица:

$$\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff A_k \leq_T \mathcal{P}_k^T(\mathcal{B}) \text{ равномерно по } k.$$

Доказани са някои основни свойства на релацията $\leq_{T,\omega}$, а именно, че за всяко $\mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$:

(1) $\mathbf{b}$ съдържа изброимо много елементи на $\mathcal{S}_\omega$;
(2) $\mathbf{D}_{T,\omega}$ съдържа континуум много елементи;
(3) Множеството $[\mathbf{0}_{T,\omega}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{b}\}$ е изброимо;
(4) Ако $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_{T,\omega}$, то множеството $\{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{a} \not\leq \mathbf{b} \,\&\, \mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}\}$ е неизброимо;
(5) Множеството $[\mathbf{b}, \infty) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{b} \leq \mathbf{a}\}$ е неизброимо.

По аналогия с $\omega$-номерационните степени, е дефиниран ($\omega$-Тюрингов) скок $\mathcal{A}'$ на редица по правилото

$$\mathcal{A}' = (P_1^T(\mathcal{A}), A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots).$$

Свойствата на тази операция позволяват да се въведе оператор за скок в степенната структура $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ чрез

$$\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})' = \deg_{T,\omega}(\mathcal{A}').$$

Оказва се, че разглежданата горна полурешетка не е изолирана. Първо, показано е, че $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ може по естествен начин да се разглежда като разширение на структурата $\mathfrak{D}_T$ на Тюринговите степени. Действително, оказва се, че изображението $\kappa_T : \mathbf{D}_T \to \mathbf{D}_{T,\omega}$, дефинирано с

$$\kappa_T(\deg_T(X)) = \deg_{T,\omega}(X \uparrow \omega),$$

където $X \uparrow \omega = (X, \emptyset, \ldots)$ за произволно множество $X$, е влагане на $\mathfrak{D}'_T$ в $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$. С $\mathbf{D}_{T,1}$ ще означаваме областта от стойностите на $\kappa_T$.

От своя страна пък $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ може по естествен начин да се вложи в $\mathfrak{D}_\omega$ посредством влагането $\iota_\omega : \mathbf{D}_{T,\omega} \to \mathbf{D}_\omega$, определено с

$$\iota_\omega(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})) = \deg_\omega(\mathcal{A}^+).$$

Оказва се, че $\iota_\omega$ запазва операцията за точна горна граница и е съгласувано с операцията скок, т.е. е изоморфно влагане на $\mathfrak{D}'_T$ в $\mathfrak{D}'_\omega$. Допълнително, $\iota_\omega$ може да се разглежда като разширение на Роджърсовото изображение $\iota$, задаващо изоморфно влагане на Тюринговите степени в (тоталните) номерационните степени.

Също както в случая на Тюринговите степени, областта от стойностите на оператора скок е точно горният конус от степените над скока $\mathbf{0}'_\omega$ на най-малкия елемент $\mathbf{0}_\omega$. По-общо, за всяка $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega$ образът на конусът от степените над $\mathbf{x}$, под действието на операцията скок, е точно конусът от степените над $\mathbf{x}'$. Последното, обаче, се дължи на свойство за най-малко обръщане на скока в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$, аналогично на това в $\mathfrak{D}_\omega$, което не е в сила нито в $\mathfrak{D}_T$, нито в $\mathfrak{D}_e$. Именно:

**Теорема 14. (Теорема 3.5.3)** *За всяко $n < \omega$ и всеки две степени $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$, за които $\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{b}$, съществува най-малка степен $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$ със свойствата $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}$.*

По-нататък, ще означаваме тази най-малка степен с $\mathbf{I}^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$.

Наличието на това силно свойство за обръщане на скока позволява да се намери формула от първи ред в езика на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$, определяща изоморфното копие на Тюринговите степени.

**Теорема 15. (Теорема 3.6.2)** *Множеството $\mathbf{D}_{T,1}$ е определимо с формула от първи ред в $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$.*

Това ни позволява пренасянето на резултати, касаещи Тюринговите степени в структурата $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$. Един такъв пример е теоремата за кодирането на Slaman и Woodin, [**34**].

Отново основавайки се на теоремата за най-малко обръщане на скока, е установена силната връзка между автоморфизмите на Тюринговите степени и тези на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$. По-точно:

**Теорема 16. (Теорема 3.7.1)** *Групите $Aut(\mathfrak{D}_T)$ и $Aut(\mathfrak{D}'_{T,\omega})$ са изоморфни.*

По-нататък, по аналогия с $\omega$-номерационните степени, е въведен класът на *почти нулевите* ($a.z.$) степени. Именно, една $\omega$-Тюринговата степен $\mathbf{x}$ ще наричаме $a.z.$ точно тогава, когато съществува редица $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$ такава, че

$$(\forall k)[P^T_k(\mathcal{X}) \equiv_T \emptyset^{(k)}].$$

Следващото свойство за гъстота на $a.z.$ степените помага по-късно при характеризацията на минималните степени в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$.

**Теорема 17. (Теорема 3.8.2)** *За всяка ненулева $a.z.$ степен $\mathbf{a}$ съществува ненулева $a.z.$ степен $\mathbf{b} < \mathbf{a}$. В частност, не съществуват минимални $a.z.$ степени.*

Показано е също, че съществуват несравними помежду си $a.z.$ степени като при това, степените могат да се изберат под $\mathbf{0}'_{T,\omega}$.

**Теорема 18. (Теорема 3.8.3)** *Съществуват $a.z.$ степени $\mathbf{a}, \mathbf{b} \leq \mathbf{0}'_{T,\omega}$ такива, че $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}$.*

Като следствие е получена минимална двойка[4] от $a.z.$ степени. Оказва се, че подструктурата на $a.z.$ степените е достатъчно сложна за да вложи всяка изброима частична наредба.

Да припомним, че степента $\mathbf{a}$ в дадена степенна структура $\mathfrak{D}$ се нарича минимална, ако единствената степен строго под нея е най-малкият елемент на структурата $\mathfrak{D}$. Така, например, структурите на номерационните и $\omega$-номерационните степени не притежават минимални степени, [**38**]. От друга страна, в структурата на Тюринговите степени има континуум много минимални степени. Нещо повече, за всяка Тюрингова степен $\mathbf{a}$, съществуват минимални Тюрингови степени $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ и $\mathbf{m}_3$, за които

$$\mathbf{a} = (\mathbf{m}_0 \vee \mathbf{m}_1) \wedge (\mathbf{m}_2 \vee \mathbf{m}_3),$$

където $\wedge$ отбелязва точната долна граница на две степени. В частност, минималните степени в $\mathfrak{D}_T$ образуват база на автоморфизмите.

[4] Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$. Ще казваме, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуват минимална двойка, ако е в сила, че

$$(\forall \mathbf{c} \in \mathbf{D}_{T,\omega})[\mathbf{c} \leq \mathbf{a} \ \&\ \mathbf{c} \leq \mathbf{b} \ \rightarrow\ \mathbf{c} = \mathbf{0}_{T,\omega}].$$

Установените резултати показват близостта между структурата на $\omega$-Тюринговите степени и тази на Тюринговите степени, затова е естествено да се предположи, че $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ също притежава минимални степени. Оказва се, че това наистина е така. Обаче, направената характеризация на минималните $\omega$-Тюрингови степени разкрива, че те са строго ограничени от горе от $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ като има точно изброимо много минимални степени. Действително, показана е следната теорема.

**Теорема 19. (Теорема 3.9.1)** *$\omega$-Тюринговата степен $\mathbf{a}$ е минимална тогава и само тогава, когато съдържа редица от вида*

$$(\underbrace{\emptyset,\ldots,\emptyset}_{n}, A, \emptyset, \ldots),$$

*където Тюринговата степен на $A$ е минимално покритие на $\mathbf{0}_T^{(n)}$ и $A' \equiv_T \emptyset^{(n+1)}$.*

Последните два раздела от Глава 3 са посветени на локалната теория на $\omega$-Тюринговите степени, т.е. на теорията на степените, заключени в интервала между най-малката $\omega$-Тюрингова степен и нейния първи скок. Понататък, с $\mathbf{G}_{T,\omega}$ ще означаваме съвкупността на степените под $\mathbf{0}'_{T,\omega}$, а с $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ – структурата $(\mathbf{G}_{T,\omega}, \leq)$ с индуцирана наредба от $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Както е показано, минималните степени в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ са изцяло съсредоточени в $\mathbf{G}_{T,\omega}$.

Оказва се, че скок йерархията в $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ не се изражда на никое ниво, т.е. за всяко $n$, класовете $\mathbf{L}_{n+1} - \mathbf{L}_n$ и $\mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n$ са непразни. Освен това, класът $\mathbf{I}$ също е непразен.

Отново, също както при $\omega$-номерационните степени, благодарение на оператора за най-малко обръщане на скока, са посочени нетривиални, явно дефинирани елементи под $\mathbf{0}'_{T,\omega}$. Действително, нека за $n \geq 1$, да разгледаме степента

$$\mathbf{o}_n = \mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{0}^{(n+1)}_{T,\omega}),$$

т.е. $\mathbf{o}_n$ е най-малката степен, чийто $n$-ти скок съвпада с $n+1$-я скок на $\mathbf{0}_{T,\omega}$. В сила са следните свойства на степените $\mathbf{o}_n$:

(O1) $(\forall n < \omega)[\mathbf{o}_{n+1} \leq \mathbf{o}_n \mathbin{\&} \mathbf{o}_{n+1} \neq \mathbf{o}_n]$;
(O2) $(\forall n < \omega)[\mathfrak{D}_{T,\omega}[\mathbf{o}_{n+1}, \mathbf{o}_n] \cong \mathfrak{D}_T[\mathbf{0}_T^{(n)}, \mathbf{0}_T^{(n+1)}]]$;
(O3) $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_T)[\kappa_T(\mathbf{x}) \leq \mathbf{o}_1 \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}_T]$;

Получена е следната характеризация на класовете $\mathbf{L}_n$ и $\mathbf{H}_n$ в термините на степените $\mathbf{o}_n$.

**Теорема 20. (Теорема 3.10.4)** *Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$. Тогава:*

(1) $\mathbf{x} \in \mathbf{H}_n \iff \mathbf{o}_n \leq \mathbf{x}$;
(2) $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_n \iff \mathbf{x} \wedge \mathbf{o}_n = \mathbf{0}_{T,\omega}$.

Показано е също, че изоморфното копие на Тюринговите степени под $\mathbf{0}'_T$, получено под действието на влагането $\kappa_T$, е определимо в локалната теория в термините на степента $\mathbf{o}_1$.

**Лема 21. (Лема 3.10.6)** *Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$. Тогава*

$$\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,1} \iff (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega})[\mathbf{x} \vee \mathbf{o}_1 = \mathbf{a} \vee \mathbf{o}_1 \rightarrow \mathbf{a} \leq \mathbf{x}].$$

Също както в случая на $\omega$-номерационните степени, оказва се че, една степен $\mathbf{x}$ в локалната теория е *a.z.* тогава и само тогава, когато за всяко $n < \omega$, $\mathbf{x} < \mathbf{o}_n$. Допълнително, всяка *a.z.* степен в $\mathbf{G}_{T,\omega}$ е междинна. От доказаните по-рано свойства на $a.z.$ степените, следва, че съществува $a.z.$ степен под $\mathbf{0}'_{T,\omega}$. Нещо повече, от гъстотата на $a.z.$ степените следва, че има безброй много такива.

Намерени са и необходими условия за принадлежност съответно към класовете $\mathbf{L}$ и $\mathbf{H}$. Именно, показано е, че за всяко $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$:

(1) $\mathbf{a} \in \mathbf{H} \Rightarrow (\forall\, a.z.\, \mathbf{d})[\mathbf{d} \leq \mathbf{a}]$;
(2) $\mathbf{a} \in \mathbf{L} \Rightarrow (\forall\, a.z.\, \mathbf{d})[\mathbf{d} \leq \mathbf{a} \to \mathbf{d} = \mathbf{0}_{T,\omega}]$.

Остава открит въпросът дали тези условия са и достатъчни.

Показано е, че за всяко $n < \omega$ степента $\mathbf{o}_n$ е определима с формула от първи ред в локалната теория $\mathfrak{G}_{T,\omega}$. Основен момент в характеризацията на степените $\mathbf{o}_n$ играят така наречените *недопълними* степени (noncuppable).

**Определение 22. (Определение 3.11.1)** *Нека $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \mathbf{0}, \leq, \vee)$ е горна полурешетка и $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$. Ще казваме, че $\mathbf{a} \in \mathbf{D}$ е допълнима до $\mathbf{d}$, ако $\mathbf{a} < \mathbf{d}$ и $(\exists \mathbf{x} < \mathbf{d})[\mathbf{a} \vee \mathbf{x} = \mathbf{d}]$. Ако $\mathbf{a} < \mathbf{d}$ не е допълнима до $\mathbf{d}$, то ще казваме, че $\mathbf{a}$ е недопълнима до $\mathbf{d}$.*

За всяко $n < \omega$ е получена характеризация на $\mathbf{o}_{n+1}$ чрез степента $\mathbf{o}_n$.

**Теорема 23. (Лема 3.11.4)** *За всяко $n < \omega$, $\mathbf{o}_{n+1}$ е най-голямата степен под $\mathbf{o}_n$, която е недопълнима до $\mathbf{o}_n$.*

Понеже $\mathbf{o}_0 = \mathbf{0}'_{T,\omega}$, то за всяко $n < \omega$, степента $\mathbf{o}_n$ е определима с формула от първи ред в локалната теория $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ на $\omega$-Тюринговите степени. Изразяването на множеството $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$ в термините на степента $\mathbf{o}_1$, заедно с определимостта на последната, влече и определимостта на $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$.

**Теорема 24. (Теорема 3.11.6)** *Множетстовто $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$ е определимо с формула от първи ред в локалната структура $\mathfrak{G}_{T,\omega}$.*

По-нататък, използувайки характеризацията на класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$ от Теорема 20, е получена и определимостта на всеки един от тези класове.

**Теорема 25. (Теорема 3.11.7)** *За всяко $n < \omega$, всеко едно от множествата $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$ е определимо с формула от първи ред в $\mathfrak{G}_{T,\omega}$.*

Определимостта на $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$ показва, че съществува определима от първи ред подструктура на $\mathfrak{G}_{T,\omega}$, която е изоморфна на структурата на $\Delta^0_2$ Тюринговите степени (с други думи, на Тюринговите степени в локалната подструктура на $\mathfrak{D}_T$). Също както и при $\omega$-номерационните степени, [**8**], горното наблюдение осигурява определима от първи ред подструктура на $\mathfrak{G}_{T,\omega}$, която е изоморфна на структурата $\mathfrak{R}_{\mathbf{0}'_T}$ на Тюринговите степени рекурсивно номеруеми в и над ($r.e.a.$) първия скок $\mathbf{0}'_T$ на нулата,

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{0}'_T} = \{\deg_T(X) \mid \emptyset' \leq_T X \ \ \& \ \ X \leq_{r.e.} \emptyset'\}.$$

В [**21**] Nies, Shore и Slaman доказват, че аритметиката от първи ред е интерпретируема в $(\mathfrak{R}_{\mathbf{0}'_T}, \leq)$, откъдето е заключено, че теорията от първи ред на $(\mathbf{G}_{T,\omega}, \leq)$ е поне толкова сложна, колкото и теорията от първи ред на аритметиката.

**Теорема 26. (Теорема 3.11.9)** *Теорията от първи ред на аритметиката е интерпретируема в локалната теория на $\omega$-Тюринговите степени.*

За момента, сложността на локалната теория $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ на $\omega$-Тюринговите степени не е напълно характеризирана. За разлика от локалната теория на Тюринговите степени или тази на рекурсивно номеруемите Тюрингови степени, все още не е ясно дали $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ е интерпретируема в теорията от първи ред на аритметиката.

В заключение, изказвам сърдечна благодарност на всички членове на катедра "Математическа логика и приложенията ѝ" към ФМИ на СУ за доброто отношение към мен. Изключително съм признателен на проф. Иван Сосков, който провокира в мен желанието да се занимавам с теория на рекурсията. Специална благодарност изказвам на научния си ръководител доц. Христо Ганчев, чиито другарски напътствия допринесоха за развитието на немалка част от вижданията ми.

# Авторска справка

Като заключение ще направим обобщение на главните, по мнение на автора, приноси в дисертацията. Изследванията са съсредоточени върху структурите $\mathfrak{D}_\omega$ на $\omega$-номерационните и $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ на $\omega$-Тюринговите степени, които ще разгледаме поотделно.

($\alpha$) Структура $\mathfrak{D}_\omega$ на $\omega$-номерационните степени.

(1) Направена е характеризация на Калимулиновите двойки в глобалната структура $\mathfrak{D}_\omega$ на $\omega$-номерационните степени. Именно, показано е, че една такава $\mathcal{K}$-двойка се състои или от *почти нулеви* степени ($a.z.$ степени) или е наследена от структурата на номерационните степени.

(2) Показано е и как тези два непресичащи се класа от Калимулинови двойки могат да бъдат отделени със формула от първи ред.

(3) Намерена е формула от първи ред, определяща първия скок на най-малкия елемент на структурата.

(4) Установена е определимостта в локалната теория на класовете $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ и $\mathbf{I}$ съответно на високите, ниските и междинните степени.

($\beta$) Структура $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ на $\omega$-Тюринговите степени.

(1) Въведена е структурата на $\omega$-Тюринговите степени.

(2) Доказано е, че в структурата на $\omega$-Тюринговите степени може да се въведе операция за най-малко обръщане на скока.

(3) Показана е определимостта от първи ред на (естественото копие на) Тюринговите степени в структурата $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ с добавена операция за скок.

(4) Установено е, че $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ имат изоморфни групи на автоморфизмите.

(5) Направена е характеризация на минималните степени в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ като е показано, че те са изброимо много и всички са ограничени от първия скок на най-малкия елемент на структурата.

(6) В локалната подструктура е показана определимостта на всеки от класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$ от скок йерархията.

## Публикации във връзка с дисертацията

Дисертацията е основана на следващите две публикации:

($\alpha$) H. Ganchev and A. C. Sariev, *Definability of jump classes in the local theory of the $\omega$-enumeration degrees*, приета за печат в годишника на СУ.

В тази статия е показана определимостта от първи ред на първия скок на най-малкия елемент на структурата на $\omega$-номерационните степени. Също така са изследвани въпроси за определимост в локалната подструктура.

($\beta$) A. C. Sariev and H. Ganchev, *The $\omega$-Turing degrees*, Annals of Pure and Applied Logic 165(9), pp. 1512-1532.

В тази работа е въведена и изследвана структурата на $\omega$-Тюринговите степени.

## Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че дисертацията е оригинална научна разработка. Използването на предходни резултати е отразено с подходящи препратки.

# Библиография


[1] Мучник, А. А., *Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов*, ДАН СССР **108** (1956), 194-197.

[2] Cooper, S. B., *Minimal degrees and the jump operator*, Jour. Symb. Logic **38** (1973), 249-271.

[3] Cooper, S. B., *Partial degrees and the density problem. Part 2: The enumeration degrees of the $\Sigma_2$ sets are dense*, J. Symbolyc Logic **49** (1984), 503-513.

[4] Cooper, S. B., *Enumeration reducibility, nondeterministic computations and relative computability of partial functions*, Recursion theory week, Oberwolfach 1989, Lecture notes in mathematics (Heildelberg) (K. Ambos-Spies, G. Muler, and G. E. Sacks, eds.), vol. 1432, Springer-Verlag, 1990, pp.57-110.

[5] Friedberg, R. M., *Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability*, Proc. Nat. Ac. Sci. **43** (1957), 236-238.

[6] Ganchev, H., *Exact pair theorem for the $\omega$-enumeration degrees*, Computation and Logic in the Real World, Lecture Notes in Comp. Science (B. Loewe, S. B. Cooper and A. Sorbi, eds.), **4497** (2007), 316-324.

[7] Ganchev, H. and A. C. Sariev, *Definability of jump classes in the local theory of the $\omega$-enumeration degrees*, Annuaire de Université Sofia, to appear.

[8] Ganchev, H. and M. I. Soskova, *The High/Low Hierarchy in the Local Structure of the $\omega$-Enumeration Degrees*, Annals of Pure and Applied Logic **163**(5), 2012, 547-566.

[9] Ganchev, H. and M. I. Soskova, *Definability via Kalimullin Pairs in the structure of the enumeration degrees*, to appear in Transaction of American Mathematical Society.

[10] Kalimullin, I. Sh., *Definability of the jump operator in the enumeration degrees*, Journal of Mathematical Logic **3** (2003), 257-267.

[11] Kent, T. and A. Sorbi, *Bounding nonsplitting enumeration degrees*, Journal of Symbolic Logic Volume 72, Issue 4 (2007), 1405-1417.

[12] Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, N. Y., 1952.

[13] Kleene, S. C. and E. L. Post, *The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability*, Ann. of Math. (2), 59:379-407, 1954.

[14] Lachlan, A. H., *On a problem of G.E. Sacks*, Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 972-979.

[15] Lerman, M., *Degrees of unsolvability. Local and global theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[16] Martin, D. A., *On a question of G.E.Sacks*, J. Symbolic Logic **31** (1966), 66-69.

[17] McEvoy, K., *Jumps of quasi-minimal enumeration degrees*, J. Symbolic Logic **50** (1985), 839-848.

[18] McEvoy, K. and S. B. Cooper, *On minimal pairs of enumeration degrees*, J. Symbolic Logic **50** (1985), 839-848.

[19] Mostowski, A., *Über gewisse universelle Relationen*, Ann. Soc. Pol. Math. **17** (1938), 117-118.

[20] Myhill, J., *Note on degrees of partial functions*, Proc. Am. Math. Soc. **12** (1961), 519-521.

[21] Nies, A., R. A. Shore, and T. A. Slaman, *Interpretability and definability in the recursively enumerable degrees*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), 241-291.

[22] Odifreddi, P. G., *Classical recursion theory, Volume I*, Studies in logic and the foundations of mathematics (R. A. Soare, A. S. Troelstra, S. Abramsky, S. Artemov, eds.), vol. 125, Elsevier, 1989.

[23] Odifreddi, P. G., *Classical recursion theory, Volume II*, Studies in logic and the foundations of mathematics (R. A. Soare, A. S. Troelstra, S. Abramsky, S. Artemov, eds.), vol. 143, Elsevier, 1999.

[24] Posner, D. B., *The uppersemilattice of the degrees below* $\mathbf{0}'$ *is complemented*, J. Symbolic Logic **46** (1981), 705-713.

[25] Posner, D. B. and R. W. Robinson, *Degrees Joining to* $0'$, J. Symbolic Logic **46(4)** (1981), 714-722.

[26] Post, E. L., *Recursively enumerable sets and positive integers and their decision problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 84-316.

[27] Rogers, H. Jr., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

[28] Sacks, G. E., *On degrees less than* **0'**, Ann. Math. **77** (1963), 211-231.

[29] Sacks, G. E., *Recursive enumerability and the jump operator*, Trans. Amer. Math. Soc., 108, (1963), 223-239.

[30] Sariev, A. C. and H. Ganchev, *The* $\omega$*-Turing degrees*, Annals of Pure and Apllied Logic 165(9), pp. 1512-1532.

[31] Shore, R. A., *The Turing degrees: Global and Local Structure*, unpublished.

[32] Shore, R. A., *Direct and local definitions of the Turing jump*, Journal of Mathematical Logic **9** (2007), pp.229-262.

[33] Shore, R. A. and T. A. Slaman, *Defining the Turing jump*, Math. Res. Lett., 6(5-6): 711-722, 1999.

[34] Slaman, T. A. and W. H. Woodin, *Definability in degree structures*, preprint available at http://math.berkley.edu/slaman/talks/sw.pdf.

[35] Slaman, T. A. and W. H. Woodin, *Definability in the enumeration degrees*, Arch. Math. Logic **36** (1997), 255-267.

[36] Soare, R. I., *Recursively Enumerable Sets and Degrees: A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.

[37] Sorbi, A., *The enumeration degrees of the* $\Sigma^0_2$ *sets*, Complexity, Logic and Recursion Theory (New York) (A. Sorbi, ed.), Marcel Dekker, 1975, pp. 303-330.

[38] Soskov, I. N., *The* $\omega$*-enumeration degrees.*, Journal of Logic and Computation,2007 (17) pp. 1193-1214.

[39] Soskov, I. N. and H. Ganchev, *The jump operator on the* $\omega$*-numeration degrees*, Ann. Pure and Appl. Logic, Volume 160, Issue 30, September 2009, pp 289-301.

[40] Soskov, I. N. and B. Kovachev, *Uniform regular enumerations*, Mathematical Structures in Commp. Sci. **16** (2006), no. 5, 901-924.

[41] Soskov, I. N. and M. I. Soskova, *Kalimullin pairs of* $\Sigma^0_2$ $\omega$*-enumeration degrees*, Int. J. Software and Informatics **5(4)** (2011), 637-658.

[42] Soskova, M. I., *The automorphism group of the enumeration degrees*, to appear in Ann. Pure and Appl. Logic.

[43] Turing, A., *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 42, 1936-37, pages 230-265.

[44] Yates, C. E. M., *Initial segments of the degrees of unsolvability, Part II: Minimal degrees*, J. Symbolic Logic **35**, 243-266.