Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика
Катедра по математическа логика и приложенията ѝ

Категорни методи в теория на рекурсията и индуктивни дефиниции

Крайни модели чрез резолюция с термоиди

Антон Кирилов Зиновиев

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на образователна и научна степен
ДОКТОР
по професионално направление „Математика“ (4.3),
научна специалност „Математическа логика“

Научен ръководител: доц. д-р Любомир Иванов

София 2014

СЪДЪРЖАНИЕ

Дисертацията съдържа 245 страници, от които 40 страници уводни раздели, 196 страници основен текст и 9 страници заключителен материал, включително библиография с 33 заглавия.

§1. УВОД

Методът на резолюциите е добре известен метод, който е коректен и пълен. Ако множество от клаузи е изпълнимо, то от него няма да може да се изведе противоречие. Ако пък множество от клаузи е неизпълнимо, то със сигурност от него може да се изведе противоречие посредством правилото за резолюция.

Има случаи, когато методът на резолюциите се насища, т.е. генерира такова крайно множество от клаузи, че от него не може да се изведе никаква нова клауза, а същевременно не е изведено и противоречие. В тези случаи можем да се надяваме, че ще е възможно да използваме по някакъв начин информацията, съдържана в клаузите, с цел да построим краен модел на първоначалното множество от клаузи.

Оказва се, че това наистина ще бъде възможно, ако изменим метода на резолюцията да използва т.н. *термоиди* вместо термове. Ако резолюцията с термоиди се насити след като е генерирала краен брой клаузи, то краен модел със сигурност съществува. Нещо повече — информацията, която се съдържа в генерираните краен брой клаузи, ще бъде достатъчна, за да построим алгоритмично крайния модел.

Дисертацията не съдържа никакви формални алгоритми. Въпреки това всички доказателства за съществуването на крайни структури са конструктивни и не би трябвало да е трудно от доказателствата да се извлекат използваеми алгоритми.

Резолюцията с термоиди може да се използва и с цел да се получат някои чисто теоретични резултати. Например оказва се възможно да се докаже, че класът VED притежава свойството на крайните модели, т.е. че всяко изпълнимо множество от клаузи, принадлежащи на VED, има краен модел. Една клауза принадлежи на VED, ако е Хорнова клауза и за всяка променлива $\mathtt{x}$ всяко нейно срещане в клаузата е на една и съща дълбочина.

Друг интересен резултат, който можем да получим, е следният — алгоритъмът на Пролог има свойството на крайните модели. Нека Γ е крайно множество от Хорнови клаузи и да допуснем, че след като сме запитали Пролог дали φ следва от Γ след крайно време сме получили отговор „не“. В такъв случай ще съществува краен модел на Γ, в който φ не е вярна.

За четенето на дисертацията не са нужни никакви познания от теория на категорията. Но за да направя този автореферат по-кратък, в него съм си позволил да използвам категорни понятия.

§2. НЕФОРМАЛНИ РАЗДЕЛИ

Задачата за разрешимост

Класическата *задача за разрешимост* на Давид Хилберт е основополагаща задача за математическата логика. Един начин да формулираме тази задача е следният:

За дадена формула φ да се реши дали тя е изпълнима.
Или (което е равносилно) да се реши дали $\neg\varphi$ е общовалидна.

Забавно е в днешно време да четем колко високо са оценявали тази задача логиците от първата половина на 20-ти век. Например:[1]

– Според Хилберт и Акерман: „Задачата за разрешимост трябва да бъде считана за основната задача на математическата логика.“ [16]
– Според Бернайс и Шьонфинкел: „Централната задача на математическата логика, тясно свързана също с въпроса за аксиоматизацията, е задачата за разрешимост.“ [3]
– Според Ербран: „Следното може да бъде считано за най-фундаменталната математическа задача: Задача А: Какво е необходимото и достатъчно условие една теорема да бъде вярна в дадена теория, имаща краен брой предпоставки? [...] Решението на тази задача би произвело общ метод в математиката и би позволило на математическата логика да играе по отношение на класическата математика онази роля, която аналитичната геометрия има по отношение на класическата геометрия.“ [14]

По времето, когато Гьодел доказва знаменитите си теореми за непълнота, класическата задача за разрешимост вече притежава богата теория. Имало редица резултати, показващи, че определени подкласове на пълната предикатна логика са разрешими. За други класове се оказало възможно да се получат отрицателни резултати от следния вид: ако сме в състояние да решаваме дали формула, принадлежаща на подкласа, е изпълнима, то тогава бихме били в състояние да решаваме това за произволна формула.

Продължително време специфична черта на тази област било разнообразието от прилагани методи. Обикновено всеки нов резултат за разрешимост се получавал по напълно нов и оригинален метод. Това обаче се променило през 1964 година, когато Маслов за пръв път използвал дедуктивна система (т.н. „обратен метод“), за да докаже, че нареченият днес на негово име клас от формули е разрешим.

Да допуснем, че ни е дадена коректна и пълна дедуктивна система $\mathfrak{d}$. Поради неразрешимостта на предикатната логика, $\mathfrak{d}$ ще има следните две свойства:

[1]Цитатите са според [6].

– Ако φ е общовалидна, все някога $\mathfrak{D}$ ще докаже φ.

– Съществува формула φ, която не е общовалидна, но въпреки това $\mathfrak{D}$ не е в състояние да установи това (т.е. $\mathfrak{D}$ ще търси до безкрайност доказателство на φ).

Но да допуснем, че $\mathfrak{D}$ е тъй хитро направена, че в случаите, когато φ принадлежи на даден клас Γ, дедуктивната система $\mathfrak{D}$ няма да бъде в състояние да търси за доказателство до безкрайност. Ако това е така, то за произволна формула $\varphi \in \Gamma$ едно от следните две неща ще се случи:

– $\mathfrak{D}$ ще докаже φ след краен брой стъпки.

– След „краен брой стъпки“ $\mathfrak{D}$ няма да може да продължи търсенето на доказателство на φ. От тук, поради пълнотата на $\mathfrak{D}$, може да заключим, че φ не е общовалидна/доказуема.

През 1976 станало ясно, че този метод е доста общ. В една своя сравнително кратка статия Уилям Джойнер [18] успял да дефинира три резолютивни метода, които са в състояние да решат редица важни класове на предикатната логика: монадичния клас,[2] класа на Ербран[3], на Бернайс-Шьонфинкел[4], на Акерман,[5] на Гьодел,[6] на Маслов и разширен вариант на класа на Скулем. Въпреки, че никой от тези резултати не бил нов, преди Джойнер не съществувал метод, който да може да се използва за доказателство на разрешимостта на толкова много различни класове от формули.

За всяка формула, принадлежаща на някой от споменатите класове, резолютивните решаващи процедури на Джойнер или ще породят празната клауза (в който случай формулата не е изпълнима), или ще стигнат до насищане, така че нови клаузи да не могат да се пораждат (и значи формулата е изпълнима).

Изпълнимост в крайни структури

Всички крайни модели в краен език са конструктивно изброими с точност до изоморфизъм. Освен това въпросът дали дадена формула е вярна в краен модел е разрешим. Следователно въпросът дали дадена формула има краен модел е полуразрешим.

Затова да допуснем, че даден клас от затворени предикатни формули има свойството на крайните модели. За произволна формула от този клас следните два процеса могат да бъдат стартирани едновременно:

– Първо, опитваме се да намерим крайна структура, в която формулата е вярна.

[2]Формули без функционални символи, в които предикатните символи са унарни.

[3]Пренексни формули, чиято безкванторна матрица е конюнкция от литерали.

[4]Пренексни формули $\exists \mathtt{x}_1 \ldots \exists \mathtt{x}_n \forall \mathtt{y}_1 \ldots \forall \mathtt{y}_m \varphi$ без функционални символи.

[5]Пренексни формули $\exists \mathtt{x}_1 \ldots \exists \mathtt{x}_n \forall \mathtt{y} \exists \mathtt{z}_1 \ldots \exists \mathtt{z}_k \varphi$ без функционални символи.

[6]Пренексни формули $\exists \mathtt{x}_1 \ldots \exists \mathtt{x}_n \forall \mathtt{y}_1 \forall \mathtt{y}_2 \exists \mathtt{z}_1 \ldots \exists \mathtt{z}_k \varphi$ без функционални символи.

– Второ, опитваме се да докажем отрицанието на формулата посредством някоя коректна и пълна дедуктивна система.

Ако формулата е изпълнима, тя ще има краен модел, тъй че първият от тези два процеса ще спре. Ако пък формулата не е изпълнима, то отрицанието ѝ е доказуемо и значи вторият от тези процеси ще спре. По този начин получаваме решаваща процедура за формулите от този клас и значи следното твърдение е вярно:

Теорема. *Ако клас от предикатни формули има свойството на крайните модели, то той е разрешим клас.*

Изглежда математиците за пръв път се заинтересували от изпълнимостта в крайни структури, когато пожелали да се възползват от тази теорема с цел да докажат разрешимостта на даден клас. През 1933 год. Гьодел доказал, че т.н. клас на Гьодел има свойството на крайните модели. Въз основа на този резултат Гьодел заключил, че този клас е разрешим.

Резолюция в алгебра

Дефиниция. (1) Нека засега считаме неформално, че *алгебрата* е структура, която не задава интерпретация за предикатните символи.

(2) Ако $\mathbf{M}$ е структура, то единствената алгебра, чийто универсум съвпада с универсума на $\mathbf{M}$ и която интерпретира функционалните символи също като $\mathbf{M}$, се нарича *алгебричен фрагмент* на $\mathbf{M}$.

(3) Казваме, че формула, множество от формули или множество от клаузи е изпълнимо в алгебра $\mathbf{A}$, ако то има модел, чийто алгебричен фрагмент е $\mathbf{A}$.

Методът на резолюциите не е пълен, ако се ограничим в рамките на отделна алгебра.

Оказва се, че ако изследваме внимателно защо методът на резолюциите е непълен по отношение на изпълнимостта в крайна алгебра, ще установим, че това се дължи основно на една стъпка от алгоритъма за унификация. Това е стъпката, която свежда унификацията на

$$\mathtt{f}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \sim \mathtt{f}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \tag{1}$$

до едновременната унификация на

$$\left| \begin{array}{l} \tau_1 \sim \sigma_1 \\ \tau_2 \sim \sigma_2 \\ \ldots \\ \tau_n \sim \sigma_n \end{array} \right. \tag{2}$$

Ако системата (2) е вярна в някоя алгебра, равенството (1) също ще бъде вярно. Обратното обаче не е така. Равенства от типа на (1) са еквивалентни на системата (2) само в алгебри, където функционалните символи са интерпретирани с инективни функции. Една такава алгебра е *Ербрановата алгебра* (т.е. алгебричният фрагмент на коя да е Ербранова структура). Да забележим обаче, че в алгебри с краен универсум е почти невъзможно да интерпретираме функционалните символи с инективни функции. А ако в езика има поне един функционален символ с повече от един аргумент, тогава това със сигурност е невъзможно.

За да направим алгоритъма за унификация пълен по отношение на сравнително голям клас алгебри, се налага вместо с термове да работим с друг вид обекти, наречени *термоиди*.

Бета-термоиди

Бета-термоидите са може би най-простият вид термоиди. Да допуснем, че работим в език с единствен функционален символ, който е едноместен. Всеки затворен терм в този език има вида $\mathtt{f}(\mathtt{f}(\ldots(\mathtt{f}(\mathtt{c}))\ldots))$ за някоя индивидна константа $\mathtt{c}$. За краткост нека използваме записа $\mathtt{f}^k(\mathtt{c})$, за да означаваме терма с k на брой функционални символи и константа $\mathtt{c}$.

Дефиниция. (1) *Бета-термоидът* е израз от вида $n + \mathtt{f}^k(\mathtt{c})$, където $\mathtt{f}^k(\mathtt{c})$ е произволен терм, а n — естествено число.

(2) *Стойност* на бета-термоида $n + \mathtt{f}^k(\mathtt{c})$ в алгебрата $\mathbf{A}$ е произволен елемент $\alpha \in |\mathbf{A}|$, за който в $\mathbf{A}$ е вярно следното равенство:

$$\mathtt{f}^n(\ulcorner\alpha\urcorner) \sim \mathtt{f}^{n+k}(\mathtt{c})$$

(3) Нека $\tau[\![v]\!]^{\mathcal{P}\mathbf{M}}$ е множеството от всички стойности на τ в структурата $\mathbf{M}$ при оценка v.

Вижда се, че в общия случай един термоид може да има много различни стойности. Това е една от най-съществените разлики между термове и термоиди.

При бета-термоидите унификацията може да се извършва по такъв начин, че да бъде пълна в широк клас алгебри. Например ако $l > k$ и $M = \max\{n, m\}$, то можем да сведем унификацията на термоидите

$$n + \mathtt{f}^k(\mathtt{x}) \sim m + \mathtt{f}^l(\mathtt{y}) \tag{3}$$

до унификация от вида

$$\mathtt{x} \sim (k + M) + \mathtt{f}^{l-k}(\mathtt{y}) \tag{4}$$

Да забележим, че в коя да е алгебра ако при дадена оценка на променливите термоидите от двете страни на (3) имат поне една обща стойност, то термоидите от двете страни на (4) също ще имат поне една обща стойност, а именно — стойността на променливата $\mathtt{x}$.

§3. АЛГЕБРИ И ТЕРМОВЕ

Когато бъде открит нов интересен и полезен вид термоиди, не е достатъчно просто да формулираме тяхната дефиниция. Освен дефиниция, трябва да посочим също и как се прилагат термоидалните субституции, как термоидите могат да се унифицират, как да образуваме резолвенти, а след всичко това ще трябва още да докажем, че така дефинираната резолюция е пълна. Всички тези неща са сравнително дълги и затова би се оказало от полза, ако намерим начин колкото се може по-голяма част от тях да извършим само веднъж, а не по отделно за всеки вид термоиди. Това означава, че трябва да изследваме какви свойства трябва да имат термоидите, че да бъде полезна термоидалната резолюция. След това трябва да формулираме тези свойства и да развиваме теорията на термоидите аксиоматично. Най-сетне, трябва да покажем, че всеки от видовете термоиди, от които сме заинтересовани, удовлетворява вече формулираните аксиоми.

За да бъде читателят подготвен да възприеме по-лесно терминологията, с която са формулирани термоидалните аксиоми, дисертацията започва с раздели, в които се развива добре известната теория на термовете, но с използването на нова терминология. Една допълнителна полза от този подход е това, че когато по-късно бъде изложена теорията на термоидите ще бъде много по-лесно да се почувства по отношение на какво термоидите си приличат с термовете и по отношение на какво се различават.

А) Да фиксираме множество $\mathtt{Sort}$. Елементите му ще наричаме *сортове*. Специалният сорт $\mathtt{Log} \in \mathtt{Sort}$ се нарича *логически сорт*. Елементите на $\mathtt{Sort} \setminus \{\mathtt{Log}\}$ се наричат *алгебрични сортове*.

Ще предполагаме, че са дадени три фиксирани взаимно непресичащи се множества от символи. Елементите на първото множество се наричат *функционални символи*, а елементите на второто — *предикатни символи*. Третото множество е $\{\vee, \wedge, \neg, \bot, \top\}$; елементите му се наричат *логически символи*.

Освен това ще предполагаме, че е фиксиране функция задаваща *тип* на всеки функционален, предикатен и логически символ. Типовете на функционалните символи са елементи на $(\mathtt{Sort} \setminus \{\mathtt{Log}\})^n \times (\mathtt{Sort} \setminus \{\mathtt{Log}\})$ за някое n, а типовете на предикатните символи са елементи на $(\mathtt{Sort} \setminus \{\mathtt{Log}\})^n \times \{\mathtt{Log}\}$. Типът на $\vee$ и $\wedge$ е $\langle\langle \mathtt{Log}, \mathtt{Log}\rangle, \mathtt{Log}\rangle$, типът на $\neg$ е $\langle\langle \mathtt{Log}\rangle, \mathtt{Log}\rangle$, а типът на $\bot$ и $\top$ е $\langle\langle\rangle, \mathtt{Log}\rangle$.

Ще считаме, че индивидните константи са нулместни функционални символи, т.е. функционални символи, чийто тип е $\langle\langle\rangle, \kappa\rangle$ за някой сорт $\kappa \in \mathtt{Sort}$.

Б) $\mathtt{Sort}$-индексирано множество означава $\mathtt{Sort}$-индексирана фамилия от множества. $\mathtt{Sort}$-индексирана функция означава $\mathtt{Sort}$-индексирана фамилия от функции.

$\mathtt{Sort}$-индексираните множества заедно със $\mathtt{Sort}$-индексираните функции образуват категорията $\mathfrak{Set}^{\mathtt{Sort}}$.

В) **Дефиниция.** Да означим с Σ множеството от всички функционални, предикатни и логически символи. *Структурата* $\mathbf{M}$ е такава наредена двойка $\langle\{A_\kappa\}_{\kappa\in\mathtt{Sort}}, \{j_{\mathtt{d}}\}_{\mathtt{d}\in\Sigma}\rangle$, че $\{A_\kappa\}_{\kappa\in\mathtt{Sort}}$ е $\mathtt{Sort}$-индексирана фамилия от множества, $\{j_{\mathtt{d}}\}_{\mathtt{d}\in\Sigma}$ е Σ-индексирана фамилия от функции и за произволен символ $\mathtt{d}\in\Sigma$ от тип $\langle\langle\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_n\rangle,\lambda\rangle$, функцията $j_{\mathtt{d}}$ е с домейн $A_{\kappa_1}\times A_{\kappa_2}\times\cdots\times A_{\kappa_n}$ и кодомейн A_λ.

$\mathtt{Sort}$-индексираната фамилия $\{A_\kappa\}_{\kappa\in\mathtt{Sort}}$ се нарича *универсум* на $\mathbf{M}$ и се означава с $|\mathbf{M}|$. Множествата A_κ, означавани $\mathbf{M}_\kappa$, се наричат *носители* на $\mathbf{M}$. Носителите с алгебрични сортове са *алгебрични носители*, а $\mathbf{M}_{\mathtt{Log}}$ е *логическият носител*. Ако $\mathtt{d}$ е операционен символ, функцията $j_{\mathtt{d}}$, означавана $\mathtt{d}^{\mathbf{M}}$, се нарича *интерпретация* на $\mathtt{d}$ в $\mathbf{M}$. Интерпретациите на всички функционални, предикатни и логически символи се наричат *фундаментални операции* на $\mathbf{M}$.

Структурите заедно с хомоморфизмите между тях образуват категорията $\mathfrak{Str}$.

Г) Тъй като ще ни се налага да включваме в термовете и формулите произволни обекти, нека считаме, че разполагаме с достатъчно много формални символи, наречени *имена*. За произволен обект ξ с $\ulcorner\xi\urcorner$ ще означаваме името на ξ. Няма да се налага да фиксираме множество от променливи, тъй като за всяко нещо, за което традиционно се използват променливи, ще може да използваме имена.

Д) **Дефиниция.** (1) Нека е дадена $\mathtt{Sort}$-индексирана фамилия от множества X. *Термалните изрази* над X се дефинират индуктивно:

– Ако $\mathtt{y}\in X_\kappa$, то $\ulcorner\mathtt{y}\urcorner$ е термален израз от сорт κ над X.

– Ако $\mathtt{d}$ е операционен символ от тип $\langle\langle\kappa_1,\dots,\kappa_n\rangle,\lambda\rangle$, а $\tau_1,\dots,\tau_n$ са термални изрази над X със сортове съответно $\kappa_1,\dots,\kappa_n$, то низът $\mathtt{d}(\tau_1,\dots,\tau_n)$ е термален израз от сорт λ над X.

(2) *Терм* над X е термален израз над X от алгебричен сорт. *Формула* над X е такъв термален израз над X от логически сорт, че в него не се срещат имена от логически сорт.[7] *Атомарна формула* е формула без логически символи. *Литерал* е атомарна формула или отрицание на атомарна формула.

(3) Нека $[X]$ е термалната структура над X. С други думи, носителят от сорт κ на $[X]$ е множеството от всички термални изрази от сорт κ над X.

(4) За произволна $\mathtt{Sort}$-индексирана функция $f : X\to Y$ нека $[f] : [X]\to[Y]$ е преименуващият хомоморфизъм, който заменя всяко срещане на име $\ulcorner\xi\urcorner$ в аргумента си с $\ulcorner f\xi\urcorner$. За този хомоморфизъм ще

[7] Разбира се става въпрос за безкванторна формула.

използваме постфиксен запис, т.е. $\tau[f]$ означава да заменим всяко срещане на име $\ulcorner\xi\urcorner$ в термалния израз τ с $\ulcorner f\xi\urcorner$.

(5) За произволна структура $\mathbf{M}$ ако τ е термален израз над $|\mathbf{M}|$ (т.е. всички имена в τ са имена на елементи на универсума на $\mathbf{M}$, с $\tau^{\mathbf{M}}$ ще означаваме стойността на τ в $\mathbf{M}$.

Е) Изображение v от Sort-индексирано множество към универсума на структура $\mathbf{M}$ може да наричаме оценка. В този случай изразът $\tau[v]^{\mathbf{M}}$ представлява стойността на τ в структурата $\mathbf{M}$ при оценка v.

Термална субституция е оценка в термална структура $[X]$. Да забележим, че за всяка субституция $s : X \to |[X]|$ резултатът от прилагането ѝ към произволен термален израз τ е равен на $\tau[s]^{[X]}$. С други думи операцията прилагане на субституция към терм или формула е частен случай на операцията оценяване на формулата или терма в структура.

Ж) Изображението, което на всяка структура $\mathbf{M}$ съпоставя нейния универсум $|\mathbf{M}|$ и на всеки хомоморфизъм съпоставя съответната Sort-индексирана функция е функтор от категорията на структурите $\mathfrak{Str}$ към категорията на Sort-индексираните множества $\mathfrak{Set}^{\mathsf{Sort}}$.

З) Изображението, което на всяко Sort-индексирано множество X съпоставя термалната структура $[X]$ и на всяка Sort-индексирана функция f съпоставя преименуващия хомоморфизъм $[f]$ е функтор от категорията на Sort-индексираните множества $\mathfrak{Set}^{\mathsf{Sort}}$ към категорията на структурите $\mathfrak{Str}$. В частност $[f \circ g] = [f] \circ [g]$.

И) Изображението $\mathrm{nam}_X : X \to |[X]|$, което на всеки елемент ξ на Sort-индексираното множество X съпоставя неговото име $\ulcorner\xi\urcorner$, е естествена трансформация от функтора идентитет на категорията $\mathfrak{Set}^{\mathsf{Sort}}$ към функтора-композиция $|[\,.\,]|$.

С други думи, за произволна Sort-индексирана функция $f : X \to Y$ е в сила равенството $\mathrm{nam}_Y \circ f = [f] \circ \mathrm{nam}_X$, което записано нефункционално добива вида $\ulcorner f\xi\urcorner = \ulcorner\xi\urcorner[f]$.

Й) Изображението $\mathrm{val}_{\mathbf{M}} : [|\mathbf{M}|] \to \mathbf{M}$, което на всеки термален израз над универсума на структурата $\mathbf{M}$ съпоставя неговата стойност в $\mathbf{M}$, е естествена трансформация от функтора-композиция $[|\,.\,|]$ към функтора идентитет на категорията $\mathfrak{Str}$.

С други думи, за произволен хомоморфизъм $h : \mathbf{M} \to \mathbf{K}$ е в сила равенството $\mathrm{val}_{\mathbf{K}} \circ [h] = h \circ \mathrm{val}_{\mathbf{M}}$, което записано нефункционално добива вида $(\tau[h])^{\mathbf{K}} = h(\tau^{\mathbf{M}})$.

К) Функторите $[\,.\,] : \mathfrak{Set}^{\mathsf{Sort}} \to \mathfrak{Str}$ и $|\,.\,| : \mathfrak{Str} \to \mathfrak{Set}^{\mathsf{Sort}}$ образуват спрягане, при което $[\,.\,]$ е лявоспрегнатият функтор, а $|\,.\,|$ — дясноспрегнатият. От теория на категориите е известно, че този факт може да се изкаже по няколко еквивалентни начина:

- За всеки хомоморфизъм $h : [X] \to \mathbf{M}$ преименуването $[h \circ \mathrm{nam}_X]$ е единственият хомоморфизъм, за който $h = \mathrm{val}_{\mathbf{M}} \circ [h \circ \mathrm{nam}_X]$. Изказано по нефункционален начин това означава, че h изобразява произволен термален израз τ в стойността на τ при оценка $v\xi = h\ulcorner\xi\urcorner$.
- За всяка `Sort`-индексирана функция $f : X \to |\mathbf{M}|$ оценяването $[f]^{\mathbf{M}}$ е единственият хомоморфизъм, за който $f = [f]^{\mathbf{M}} \circ \mathrm{nam}_X$. Изказано нефункционално това означава, че f изобразява ξ в стойността на $\ulcorner\xi\urcorner[f]$ в $\mathbf{M}$.
- Функцията nam_X е единицата на това спрягане, а $\mathrm{val}_{\mathbf{M}}$ — коединицата. С други думи, $\mathrm{val}_{[X]} \circ [\mathrm{nam}_X]$ и $\mathrm{val}_{\mathbf{M}} \circ \mathrm{nam}_{|\mathbf{M}|}$ са идентитети. Изказано нефункционално това означава, че $\tau[\mathrm{nam}_X]^{[X]} = \tau$ и $(\ulcorner\mu\urcorner)^{\mathbf{M}} = \mu$ за произволен термален израз τ над X и елемент μ на универсума на $\mathbf{M}$.

Л) **Дефиниция.** Две структури са *алгебрично еквивалентни*, ако имат един и същ универсум и функционалните символи са интерпретирани по един и същ начин.

М) За всяка структура $\mathbf{M}$ може да разгледаме подкатегорията на $\mathfrak{Str}$, чиито обекти са всички алгебрично еквивалентни с $\mathbf{M}$ структури, а стрелки — онези хомоморфизми, които са идентитети върху алгебричните носители (т.е. могат да променят единствено елементите на логическия носител). Оказва се, че тази категория има инициален обект, който ще наричаме *алгебричен фрагмент* на $\mathbf{M}$ и ще означаваме с $\partial\mathbf{M}$. Единственият хомоморфизъм от $\partial\mathbf{M}$ към $\mathbf{M}$ в тази подкатегория ще означаваме с $\int_{\mathbf{M}}$.

Елементи на логическия носител на $\partial\mathbf{M}$ ще бъдат всички формули над $|\mathbf{M}|$, които не съдържат функционални символи. Хомоморфизмът $\int_{\mathbf{M}}$ е идентитет върху алгебричните носители, а всяка формула φ от логическия носител на $\partial\mathbf{M}$ се изобразява от $\int_{\mathbf{M}}$ в нейната стойност $\varphi^{\mathbf{M}}$.

Н) За всеки хомоморфизъм $h : \mathbf{M} \to \mathbf{K}$ съществува единствен хомоморфизъм от $\partial\mathbf{M}$ към $\partial\mathbf{K}$, който е идентичен с h върху алгебричните носители. Той се нарича *алгебричен фрагмент* на h и се означава с ∂h.

Изображението ∂, което изобразява всяка структура или хомоморфизъм в съответния алгебричен фрагмент, е идемпотентен функтор. В частност $\partial(h \circ g) = \partial h \circ \partial g$ и $\partial(\partial\mathbf{M}) = \partial\mathbf{M}$.

О) **Дефиниция.** Структура, която е алгебричен фрагмент, се нарича *алгебра*.

П) Две структури са алгебрично еквивалентни тогава и само тогава, когато имат един и същ алгебричен фрагмент.

Р) Хомоморфизмът $\int_{\mathbf{M}}$ е естествена трансформация от функтора ∂ към функтора идентитет на категорията на структурите. С други думи, $\int_{\mathbf{K}} \circ \partial h = h \circ \int_{\mathbf{M}}$ за произволен хомоморфизъм $h : \mathbf{M} \to \mathbf{K}$.

С) Структурата $\mathbf{M}$ е логическа, ако всеки от носителите ѝ е непразно множество, логическият ѝ носител е $\{0, 1\}$, а логическите символи са така интерпретирани, че да се получи стандартната двуелементна булева алгебра (0 е лъжа, а 1 — истина).

Т) **Дефиниция.** (1) Формула е общовалидна в логическа структура, ако при всяка оценка има стойност 1. Множество от формули е общовалидно в логическа структура, ако всеки от елементите му е общовалидна формула.

(2) Формула или множество от формули е универсално изпълнимо в алгебра $\mathbf{A}$, ако е общовалидно в някоя логическа структура, чийто алгебричен фрагмент е $\mathbf{A}$.

§4. АЛГЕБРИЧНА ТЕОРИЯ НА ТЕРМОИДИТЕ

А) **Дефиниция.** За произволна структура $\mathbf{M}$ с $\mathcal{P}\mathbf{M}$ ще означаваме структурата, чиито носители са множествата степени на носителите на $\mathbf{M}$. По формално: носителят от сорт κ на $\mathcal{P}\mathbf{M}$ е $\mathcal{P}(\mathbf{M}_\kappa)$ и за всеки операционен символ $\mathtt{d}$ е в сила

$$\mathtt{d}^{\mathcal{P}\mathbf{M}}\langle\Gamma_1, \dots, \Gamma_n\rangle = \{\mathtt{d}^{\mathbf{M}}\langle\mu_1, \dots, \mu_n\rangle : \mu_1 \in \Gamma_1, \dots, \mu_n \in \Gamma_n\}$$

За произволен хомоморфизъм $h : \mathbf{M} \to \mathbf{K}$ може да дефинираме хомоморфизъм $h^{\mathcal{P}} : \mathcal{P}\mathbf{M} \to \mathcal{P}\mathbf{K}$ по следния начин: $h^{\mathcal{P}}\Gamma = \{h\mu : \mu \in \Gamma\}$.

Б) Да си припомним, че най-забележимата разлика между термове и термоиди е това, че докато стойността на един терм е точно един елемент от универсума на структурата, в която оценяваме, термоидите могат да имат много различни стойности. За всяка структура $\mathbf{M}$ имаме такъв хомоморфизъм $\mathrm{val}_{\mathbf{M}} : [|\mathbf{M}|] \to \mathbf{M}$, че $\mathrm{val}_{\mathbf{M}}\,\tau = \tau^{\mathbf{M}}$ за всеки термален израз τ. При термоидите обаче не е възможно да се дефинира подобен хомоморфизъм. Вместо това имаме $\mathtt{Sort}$-индексирана функция $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}} : [\![|\mathbf{M}|]\!] \to \mathcal{P}\mathbf{M}$, такава че $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}\,\tau$ е множеството от стойностите на термоида τ. Тази $\mathtt{Sort}$-индексирана функция обаче не е дори и хомоморфизъм. Тя ще се окаже нещо, което можем да наречем квазиморфизъм.

В) **Дефиниция.** $\mathtt{Sort}$-индексираната функция $h : |\mathbf{M}| \to |\mathcal{P}\mathbf{K}|$ е *квазиморфизъм* от $\mathbf{M}$ към $\mathcal{P}\mathbf{K}$, ако за произволен функционален символ $\mathtt{f}$ от тип $\langle\langle\kappa_1, \dots, \kappa_n\rangle, \lambda\rangle$ и произволни $\alpha_1 \in \mathbf{M}_{\kappa_1}, \dots, \alpha_n \in \mathbf{M}_{\kappa_n}$ е в сила

$$\mathtt{f}^{\mathcal{P}\mathbf{K}}\langle h_{\kappa_1}\alpha_1, \dots, h_{\kappa_n}\alpha_n\rangle \subseteq h_\lambda(\mathtt{f}^{\mathbf{M}}\langle\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle)$$

Освен това за произволен предикатен или логически символ $\mathtt{d}$ е в сила

$$\mathtt{d}^{\mathcal{P}\mathbf{K}}\langle h_{\kappa_1}\alpha_1, \dots, h_{\kappa_n}\alpha_n\rangle = h_\lambda(\mathtt{d}^{\mathbf{M}}\langle\alpha_1, \dots, \alpha_n\rangle)$$

Г) **Дефиниция.** (1) За всяко $\mathtt{Sort}$-индексирано множество X, нека X° бъде $\mathtt{Sort}$-индексираното множество, за което $(X^\circ)_{\mathtt{Log}} = \varnothing$ и $(X^\circ)_\kappa = X_\kappa$, ако κ е алгебричен сорт.

(2) За всяка $\mathtt{Sort}$-индексирана функция $f : X \to Y$, нека $f^\circ : X^\circ \to Y^\circ$ бъде $\mathtt{Sort}$-индексираната функция, за която $(f^\circ)_{\mathtt{Log}}$ е единствената функция, чиито домейн и кодомейн са празното множество и $(f^\circ)_\kappa = f_\kappa$, ако κ е алгебричен сорт.

Изображението, което на всяко $\mathtt{Sort}$-индексирано множество X или функция f съпоставя X° или f°, е ендофунктор в категорията на $\mathtt{Sort}$-индексираните множества $\mathfrak{Set}^{\mathtt{Sort}}$.

Д) **Дефиниция.** Аксиомите на термоидите са формулирани като част от дефиницията на структура, наречена “терминатор”. Интуитивният смисъл на тези аксиоми е обяснен в (Ж).

Терминаторът е такава четворка $\langle [\![.]\!], \mathrm{Val}_{\mathbf{M}}, \mathrm{Vals}_X, \mathrm{Nam}_X \rangle$, че:

1. $[\![X]\!]$ е алгебра за всяко $\mathtt{Sort}$-индексирано множество X.
2. $[\![f]\!]$ е хомоморфизъм от $[\![X]\!]$ към $[\![Y]\!]$ за всяка $\mathtt{Sort}$-индексирана функция $f : X \to Y$. За този хомоморфизъм ще използвам постфиксен запис, така че $\tau[\![f]\!]$ ще означава да приложим $[\![f]\!]$ към τ.
3. $|[\![X]\!]| \cap |[\![Y]\!]| = |[\![X \cap Y]\!]|$ за произволни $\mathtt{Sort}$-индексирани множества X и Y.
4. За произволни $\mathtt{Sort}$-индексирани функции $f' : X' \to Y'$ и $f'' : X'' \to Y''$ ако $X' \subseteq X''$, $Y'' \subseteq Y'$ и $f'\xi = f''\xi$ за всяко $\xi \in X'$, то $\tau[\![f']\!] = \tau[\![f'']\!]$ за всяко $\tau \in |[\![X']\!]|$. Това в частност означава, че $[\![f \restriction X]\!] = [\![f]\!] \restriction [\![X]\!]$ стига X да бъде подмножество на домейна на f.
5. $[\![X]\!] = [\![X^\circ]\!]$ и $[\![f]\!] = [\![f^\circ]\!]$ за всяко $\mathtt{Sort}$-индексирано множество X и функция f.
6. $[\![\mathrm{id}_X]\!] = \mathrm{id}_{[\![X]\!]}$.
7. $[\![f \circ g]\!] = [\![f]\!] \circ [\![g]\!]$ ако домейнът на f съвпада с кодомейна на g.
8. Nam_X е $\mathtt{Sort}$-индексирана функция от X° към $|[\![X]\!]|$ за всяко $\mathtt{Sort}$-индексирано множество X.
9. $[\![f]\!] \circ \mathrm{Nam}_X = \mathrm{Nam}_Y \circ f^\circ$ за всяка $\mathtt{Sort}$-индексирана функция $f : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd} X^\circ \arrow[r, "\mathrm{Nam}_X"] \arrow[d, "f^\circ"'] & |[\![X]\!]| \arrow[d, "[\![f]\!]"] \\ Y^\circ \arrow[r, "\mathrm{Nam}_Y"] & |[\![Y]\!]| \end{tikzcd}$$

10. $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}$ е квазиморфизъм от $[\![|\mathbf{M}|]\!]$ към $\mathcal{P}\mathbf{M}$ за всяка структура $\mathbf{M}$.

11. $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}\,\tau = \mathrm{Val}_{\partial\mathbf{M}}\,\tau$ за всяко τ, принадлежащо на алгебричен носител на $\llbracket|\mathbf{M}|\rrbracket$. Да забележим, че от (Д5) следва, че $\llbracket|\mathbf{M}|\rrbracket = \llbracket|\partial\mathbf{M}|\rrbracket$.
12. За всяка структура $\mathbf{M}$ квазиморфизмът $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}$ изобразява само в непразни множества. За всяко `Sort`-индексирано множество X квазиморфизмът $\mathrm{Val}_{[X]}$ изобразява само в едноелементни множества.
13. $h^{\mathcal{P}} \circ \mathrm{Val}_{\mathbf{M}} \leq \mathrm{Val}_{\mathbf{K}} \circ \llbracket h \rrbracket$ за всеки хомоморфизъм $h : \mathbf{M} \to \mathbf{K}$.

$$\begin{tikzcd}
\llbracket|\mathbf{M}|\rrbracket \arrow[r, "\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}"] \arrow[d, "\llbracket h\rrbracket"'] \arrow[dr, phantom, "\geq"] & \mathcal{P}\mathbf{M} \arrow[d, "h^{\mathcal{P}}"] \\
\llbracket|\mathbf{K}|\rrbracket \arrow[r, "\mathrm{Val}_{\mathbf{K}}"] & \mathcal{P}\mathbf{K}
\end{tikzcd}$$

14. Vals_X е хомоморфизъм от $\llbracket|\llbracket X\rrbracket|\rrbracket$ към $\llbracket X\rrbracket$ за всяко `Sort`-индексирано множество X.
15. За произволно `Sort`-индексирано множество X, структура $\mathbf{K}$, `Sort`-индексирана функция $k : X \to |\llbracket|\mathbf{K}|\rrbracket|$ и `Sort`-индексирана функция $f : X \to |\mathbf{K}|$ ако $f \ll \mathrm{Val}_{\mathbf{K}} \circ k$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & |\llbracket|\mathbf{K}|\rrbracket| \arrow[d, "\mathrm{Val}_{\mathbf{K}}"] \\
|\mathbf{K}| \arrow[r, phantom, "\in"] & |\mathcal{P}\mathbf{K}|
\end{tikzcd}$$

то $\mathrm{Val}_{\mathbf{K}} \circ \llbracket f\rrbracket \leq \mathrm{Val}_{\mathbf{K}} \circ \mathrm{Vals}_{|\mathbf{K}|} \circ \llbracket k\rrbracket$.

$$\begin{tikzcd}
\llbracket X\rrbracket \arrow[r, "\llbracket k\rrbracket"] \arrow[dr, "\llbracket f\rrbracket"'] & \llbracket|\llbracket|\mathbf{K}|\rrbracket|\rrbracket \arrow[r, "\mathrm{Vals}_{|\mathbf{K}|}"] \arrow[d, phantom, "\leq"] & \llbracket|\mathbf{K}|\rrbracket \arrow[d, "\mathrm{Val}_{\mathbf{K}}"] \\
& \llbracket|\mathbf{K}|\rrbracket \arrow[r, "\mathrm{Val}_{\mathbf{K}}"] & \mathcal{P}\mathbf{K}
\end{tikzcd}$$

16. $\llbracket f\rrbracket \circ \mathrm{Vals}_X = \mathrm{Vals}_Y \circ \llbracket\llbracket f\rrbracket\rrbracket$ за всяка `Sort`-индексирана функция $f : X \to Y$.

$$\begin{tikzcd}
\llbracket|\llbracket X\rrbracket|\rrbracket \arrow[r, "\mathrm{Vals}_X"] \arrow[d, "\llbracket\llbracket f\rrbracket\rrbracket"'] & \llbracket X\rrbracket \arrow[d, "\llbracket f\rrbracket"] \\
\llbracket|\llbracket Y\rrbracket|\rrbracket \arrow[r, "\mathrm{Vals}_Y"] & \llbracket Y\rrbracket
\end{tikzcd}$$

17. $\mathrm{id}_{[\![X]\!]} = \mathrm{Vals}_X \circ [\![\mathrm{Nam}_X]\!]$ за всяко `Sort`-индексирано множество X.

$$[\![X]\!] = [\![X^\circ]\!] \xrightarrow{[\![\mathrm{Nam}_X]\!]} [\![|[\![X]\!]|]\!] \xrightarrow{\mathrm{Vals}_X} [\![X]\!]$$

18. $(\mathrm{Val}_{\mathbf{M}} \circ \mathrm{Nam}_{|\mathbf{M}|})\mu = \{\mu\}$ за всяка структура $\mathbf{M}$, алгебричен сорт κ и $\mu \in |\mathbf{M}|_\kappa$.

$$|\mathbf{M}|^\circ \xrightarrow{\mathrm{Nam}_{|\mathbf{M}|}} |[\![|\mathbf{M}|]\!]| \xrightarrow{\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}} |\mathcal{P}\mathbf{M}|$$

Е) **Дефиниция.** *Термоидален израз* от сорт κ над `Sort`-индексирано множество X е елемент на $|[\![X]\!]|_\kappa$. Ако κ е алгебричен сорт, този термоидален израз се нарича *термоид*. Ако $\kappa = \mathtt{Log}$, то той е *формулоид*. Да забележим, че от (Д1) и (ЗО) следва, че φ е формулоид над X тогава и само тогава, когато φ е формула над $|[\![X]\!]|$, която не съдържа функционални символи. *Атомарен формулоид* над X е атомарна формула над $|[\![X]\!]|$, която не съдържа функционални символи.

Ж) Формулоидите, които използвах в примерите от началото на този автореферат, представляваха просто формули, в които се използваха термоиди вместо термове. Това обаче означава, че за да бъдем в състояние да извършваме синтактичен анализ на формулоидите, термоидите трябва да бъдат редици от символи, удовлетворяващи някакви специални свойства. Това е неудобно. Затова по-добре е да дефинираме формулоидите да бъдат формули, в които аргументите на предикатните символи са имена на термоиди. По този начин нито се налага термоидите да бъдат редици от символи, нито пък се налага да си отвличаме вниманието с ненужни синтактични съображения. Една допълнителна полза от това решение е това, че така аксиомите на понятието „терминатор“ стават по-прости.

Термалната структура $[X]$ не е алгебра. Елементите на логическия носител на $[X]$ са термални изрази, така че ако например $\mathtt{p}$ е предикатен символ от подходящ тип и τ е терм, то $\mathtt{p}(\tau)$ ще бъде атомарна формула. От друга страна в (Д1) $[\![X]\!]$ е дефинирано да бъде алгебра. Поради това елементите на логическия носител на $[\![X]\!]$ са формули над $|[\![X]\!]|$ без функционални символи. В частност ако $\mathtt{p}$ е предикатен символ от подходящ тип и τ е термоид, то $\mathtt{p}(\ulcorner\tau\urcorner)$ ще бъде атомарен формулоид.

Съгласно (Д2), (Д6) и (Д7) $[\![\,.\,]\!]$ е функтор от категорията на `Sort`-индексираните множества $\mathfrak{Set}^{\mathtt{Sort}}$ към категорията на структурите $\mathfrak{Str}$. Да си припомним, че $[X]$ също е функтор.

Ако τ е термоид над X и $X \subseteq Y$, то от (Д3) можем да заключим, че τ също е термоид над Y.

Нека $f : X' \to Y'$ и $f'' : X'' \to Y'$ са две `Sort`-индексирани функции, $Z \subseteq X' \cap X''$, $f' \upharpoonright Z = f'' \upharpoonright Z$ и τ е термоид над Z. Тогава от (Д4) следва, че $\tau[\![f']\!] = \tau[\![f'']\!]$.

От (Д5) можем да заключим следното. Макар някои елементи на логическия носител на $[X]$ да не са формули, всички елементи на логическия носител на $[\![X]\!]$ са формули, така че имена от логически сорт не са позволени. Поради това $[\![X']\!] = [\![X'']\!]$ стига алгебричните компоненти на X' и X'' да са равни. Подобно свойство е в сила и за преименуваци морфизъм $[\![f]\!]$.

Също както nam_X е естествена трансформация от функтора идентитет на $\mathfrak{Set}^{\mathtt{Sort}}$ към функтора композиция $|[\,.\,]|$, така и Nam_X е естествена трансформация от функтора $(\,.\,)^{\circ}$ към функтора композиция $|[\![\,.\,]\!]|$. Това следва от (Д8) и (Д9).

При термоидите няма пълен аналог на остойностяващия морфизъм $\mathrm{val}_{\mathbf{M}}$. Вместо него разполагаме с два негови фрагмента: $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}$ и Vals_X.

Интуитивният смисъл на $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}\,\tau$ е $\tau^{\mathcal{P}\mathbf{M}}$. Съгласно (Д10) тази Sort-индексирана функция не е хомоморфизъм, а само квазиморфизъм. Съгласно (Д13) този квазиморфизъм се опитва да бъде нещо като естествена трансформация от функтора $[\![\,.\,]\!]$ към функтора $\mathcal{P}$, но вместо това си остава само тъй да се каже "квазитрансформация".[8]

Стойността на терм не зависи от интерпретацията на предикатните символи в структурата. Съгласно (Д11), същото е вярно и за термоидите.

В термалния случай можем да считаме прилагането на субституция за частен случай на намирането на стойност в структура — $\tau[s]^{[X]}$ е резултатът от прилагането на субституцията $s : X \to [X]$ към τ. При термоидите обаче не може да постъпим по същия начин, защото не можем да използваме квазиморфизма Val, за да пресметнем $\tau^{[\![X]\!]}$. Поради това се налага да постулираме наличието на допълнителна Sort-индексирана функция Vals_X. Съгласно (Д14) тази функция е хомоморфизъм, а съгласно (Д16) тя е естествена трансформация от функтора композиция $[\![|[\![\,.\,]\!]|]\!]$ към функтора $[\![\,.\,]\!]$.

Тъй като имаме две независими Sort-индексирани функции $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}$ и Vals_X, се нуждаем и от аксиома, която да ги свърже една с друга. Такава аксиома е (Д15) и тя се използва само за една цел — за да може да се докаже термоидален аналог на лемата за субституциите.

В термалния случай функторите $[\,.\,]$ и $|\,.\,|$ образуват спрягане. В термоидалния случай обаче това не е така. Онова, което остава вярно, е казано от (Д17) и (Д18). В нефункционална форма тези аксиоми казват, че $\tau[\![\mathrm{Nam}_X]\!]^{[\![X]\!]} = \tau$ за всеки термоид τ и $(\ulcorner\mu\urcorner)^{\mathcal{P}\mathbf{M}} = \{\mu\}$ за всяко $\mu \in |\mathbf{M}|$.

3) **Лема** ***(за субституциите за термоиди).*** *За всяка термоидална субституция $s : X \to |[\![Y]\!]|$ и оценки $v : Y \to |\mathbf{K}|$ и $w : X \to |\mathbf{K}|$ ако за всяко $\xi \in X$ $\;w\xi \in (s\xi)[\![v]\!]^{\mathcal{P}\mathbf{K}}$, то за всеки термоидален израз τ над X $\;\tau[\![w]\!]^{\mathcal{P}\mathbf{K}} \subseteq (\tau[\![s]\!]^{[\![Y]\!]})[\![v]\!]^{\mathcal{P}\mathbf{K}}$.*

Понятията верен, общовалиден, изпълним в алгебра и изпълним по принцип формулоид се дефинират подобно на съответните понятия за формули:

[8]За сравнение: $\mathrm{val}_{\mathbf{M}}$ е естествена трансформация.

И) **Дефиниция.** (1) Формулоид φ над $|\mathbf{M}|$ φ е *верен* в логическата структура $\mathbf{M}$, ако $\varphi^{\mathcal{P}\mathbf{M}} = \{1\}$.

(2) Формулоид φ над X е *общовалиден* в логическата структура $\mathbf{M}$, ако за всяка оценка $v : X \to |\mathbf{M}|$ формулоидът $\varphi[\![v]\!]$ е верен $\mathbf{M}$.

(3) Формулоид φ над $|\mathbf{A}|$ е *изпълним* в алгебрата $\mathbf{A}$, ако е верен в някой логически вариант на $\mathbf{A}$.

(4) Формулоид е *изпълним*, ако е общовалиден в някоя логическа структура.

(5) Формулоид е *универсално изпълним* в алгебра $\mathbf{A}$, ако е общовалиден в някой логически вариант на $\mathbf{A}$.

(6) Нека $\mathbf{A}$ е алгебра. Множество от формулоиди над $|\mathbf{A}|$ е *изпълнимо* в $\mathbf{A}$, ако съществува такъв логически вариант $\mathbf{M}$ на $\mathbf{A}$, че всички формулоиди от множеството са верни в $\mathbf{M}$.

(7) Множество от формулоиди е *универсално изпълнимо*, ако съществува логическа структура, в която всички формулоиди от множеството са общовалидни.

(8) Множество от формулоиди е *универсално изпълнимо в алгебра* $\mathbf{A}$, ако съществува такъв логически вариант $\mathbf{M}$ на $\mathbf{A}$, че всички формулоиди от множеството са общовалидни в $\mathbf{M}$.

Й) Оказва се, че термовете може да се разглеждат като специален вид термоиди — т.н. алфа-термоиди. Съответният им терминатор можем да наречем *алфа-терминатор*.

Както може да се очаква, алфа-терминаторът има по-хубави алгебрични свойства от останалите терминатори, които ще дефинираме. Например всеки алфа-термоид си има точно една определена стойност, квазиморфизмът $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}$ е хомоморфизъм, той при това е и естествена трансформация от функтора $[\![\,.\,]\!]$ към функтора $\mathcal{P}$. Но въпреки тези свои хубави свойства, за алфа-термоидите не може да се дефинира унификация, която да бъде полезна за нашите цели. Поради това не може да използваме алфа-термоиди за построяването на крайни модели.[9]

К) Светът на термовете и формулите може да се вложи изоморфно в света на термоидите и формулоидите (при всеки терминатор). Сако ако някой термален израз съдържа имена от логически сорт, той няма да има представител сред термоидалните изрази.

Да разгледаме например бета-термоидите, дефинирани във въведителния раздел. За всеки терм τ термоидът $0 + \tau$ има същия смисъл, както термът τ. Поради това бета-термоидите имащи вида $0 + \tau$ представляват изоморфно копие на термовете.

Оказва се, че съответствието между термове и термоиди може да се дефинира напълно алгебрично. $[\mathrm{Nam}_X]^{[\![X]\!]}$ е инективният хомоморфи-

[9]Всъщност ако това бе възможно, може би нямаше да е нужно да въвеждаме понятието термоид, защото бихме работили просто с термове.

зъм изобразяващ термове в термоиди. Има и обратен хомоморфизъм — $[\![\mathrm{nam}_X]\!]^{[X]}$ — той пък изобразява термоиди в термове и в общия случай не е инективен.

Л) В сила са някой важни връзки между манипулациите върху термоиди и съответните им манипулации върху термове.

(1) Няма значение дали ще приложим най-напред преименуващия морфизъм $[\![f]\!]$ към термоид и след това ще го преобразуваме в терм, или пък най-напред ще го преобразуваме в терм и после ще приложим $[f]$ към него. Нито пък има значение дали ще приложим преименуващия морфизъм $[f]$ към терм и после ще го преобразуваме в термоид, или пък най-напред ще го преобразуваме в термоид и после ще приложим $[\![f]\!]$ към него.

(2) Няма значение дали ще създадем термално име с nam_X и после ще го преобразуваме в термоид, или пък директно ще създаден термоидално име с Nam_X. Нито пък има значение дали ще създаден термоидално име с Nam_X и после ще го преобразуваме в терм, или пък ще създадем директно термално име с nam_X.

(3) Има ли значение дали ще преобразуваме даден терм в термоид и после ще го остойностим с $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}$, или пък директно ще го остойностим с $\mathrm{val}_{\mathbf{M}}$? Оказва се, че това няма значение само ако структурата $\mathbf{M}$ е такава, че $\mathrm{Val}_{\mathbf{M}}$ е не само квазиморфизъм, но и хомоморфизъм.

(4) Ако преобразуваме бета-термоида $5+\mathtt{f(c)}$ в терм, ще получим $\mathtt{f(c)}$. Стойността на $\mathtt{f(c)}$ е стойност и на първоначалния термоид $5+\mathtt{f(c)}$; този термоид обаче може да има и други стойности освен нея.

(5) Ако формулоид δ над X е общовалиден в някоя структура, то формулата $\delta[\![\mathrm{nam}_X]\!]^{[X]}$ също ще бъде общовалидна в тази структура.

(6) Ако множество Γ от формулоиди над X е универсално изпълнимо в някоя алгебра, то множеството $\{\delta[\![\mathrm{nam}_X]\!]^{[X]} : \delta \in \Gamma\}$ от формули над X също е универсално изпълнимо в $\mathbf{A}$.

(7) За всяка термоидална субституция $s : X \to [\![X]\!]$ имаме съответна на нея термална субституция $s' : X \to [X]$:

$$s' = [\![\mathrm{nam}_X]\!]^{[X]} \circ s$$

Няма значение дали ще приложим s към термоид и после ще го преобразуваме в терм, или първо ще преобразуваме термоида в терм и после ще приложим s' към него.

М) За всеки терм множеството от имена, които се срещат в терма, е крайно. Подобно свойство имат и всички термоиди, които са дефинирани в тази работа. От аксиомите в дефиницията на „терминатор“ (Д) обаче не следва, че това е вярно за всички видове термоиди.[10]

[10]Не е трудно да се даде пример за термоиди, в които се срещат безброй много имена. Да дефинираме омега-термоидите да бъдат изрази от вида “$\Theta + \tau$”, където Θ е произволно множество от имена, а τ — някой обикновен вид термоиди, напр. гама-

Н) **Дефиниция.** (1) Термоид τ над X е *финитарен*, ако съществува такова крайно подмножество Y на X, че τ да бъде термоид над Y.

(2) Термоид τ над X *зависи* от ξ, ако τ не е термоид над $X \setminus \{\xi\}$.

Предполагам, че следното твърдение може и да не е вярно, ако τ не е финитарен, но не разполагам с конкретен контрапример:

О) **Твърдение.** *Ако τ е финитарен термоид, то тогава множеството X от всички ξ, такива че τ зависи от ξ, е крайно и е най-малкото множество, за което τ е термоид над X.*

За да дефинираме резолютивен метод с термоиди вместо с термове, е нужно да разполагаме с някакъв тип унификация между термоидите.

П) **Дефиниция.** (1) *Термоидално равенство* е израз от вида $\tau \sim \sigma$, където τ и σ са термоидални изрази от един и същ сорт.

(2) *Термоидална система* е множество от термоидални равенства.

(3) Една система е *финитарна*, ако съществува такова крайно `Sort`-индексирано множество X, че всеки термоидален израз в системата да е израз над X.

(4) Равенство $\ulcorner \mathtt{x} \urcorner \sim \tau$ е *решаващо* за $\mathtt{x}$, ако τ не зависи от $\mathtt{x}$. Такова равенство е решаващо за системата Θ, ако принадлежи на Θ и никой от термоидалните изрази в останалите равенства на Θ не зависи от $\mathtt{x}$. В този случай също казваме, че Θ е *решена* по отношение на $\mathtt{x}$.

(5) Оценка v в структура $\mathbf{M}$ е *решение* на термоидалното равенство $\tau \sim \sigma$, ако $\tau[\![v]\!]^{\mathcal{P}\mathbf{M}} \cap \sigma[\![v]\!]^{\mathcal{P}\mathbf{M}} \neq \varnothing$. Да забележим следната особеност — v е решение на $\tau \sim \sigma$, ако поне една стойност на τ при оценка v е също стойност на σ при тази оценка.

(6) Оценката v е решение на системата Θ, ако v е решение на всяко от равенствата в Θ.

(7) Оценката v в $\mathbf{M}$ е *частен случай* на субституцията $s : X \to [\![X]\!]$, ако съществува такава оценка $w : X \to |\mathbf{M}|$, че $v\mathtt{x} \in (s\mathtt{x})[\![w]\!]^{\mathcal{P}\mathbf{M}}$ за всяко $\mathtt{x} \in X$.

(8) Една система е *термално съвместима*, ако има решение в Ербрановата алгебра (т.е. в алгебричния фрагмент на Ербранова структура). Една система е *термално противоречива*, ако не е термално съвместима.

(9) Две системи са *термално еквивалентни* ако имат едни и същи решения в Ербрановата алгебра.

(10) Системата Θ е *сводима* към системата Φ, ако двете системи са термално еквивалентни и всяко решение на на Θ (в коя да е структура), е решение и на Φ.

Р) **Дефиниция.** Частичната функция $\mathfrak{f}$ се нарича *термален (термоидален) редуктор*, ако:

термоид. Нека дефинираме така всички операции върху омега-термоидите, че те да игнорират напълно множеството Θ и да работят с омега-термоидите все едно, че са гама-термоиди.

(1) Аргументът на $\mathfrak{f}$ е термално (термоидално) равенство. Стойността на $\mathfrak{f}$ е крайно множество от термални (термоидални) равенства.

(2) Ако $\mathfrak{f}(\tau' \sim \tau'')$ е дефинирано, то системата $\{\tau' \sim \tau''\}$ е термално еквивалентна на системата $\mathfrak{f}(\tau' \sim \tau'')$.

(3) Ако $\mathfrak{f}(\tau' \sim \tau'')$ е дефинирано и някой от елементите му зависи от $\mathtt{x}$, то $\tau' \sim \tau''$ също зависи от $\mathtt{x}$.

(4) Ако равенството $\tau' \sim \tau''$ не е решаващо и $\mathfrak{f}(\tau' \sim \tau'')$ е недефинирано, то това равенство е термално противоречиво.

(5) Не съществува безкрайна редица $\tau_1 \sim \sigma_1, \tau_2 \sim \sigma_2, \tau_3 \sim \sigma_3, \dots$, за която $\tau_{i+1} \sim \sigma_{i+1} \in \mathfrak{f}(\tau_i \sim \sigma_i)$ за всяко i.

С) **Дефиниция.** Частичната функция $\mathfrak{f}$ е *силен редуктор*, ако $\mathfrak{f}$ е термоидален редуктор и винаги когато $\mathfrak{f}(\tau' \sim \tau'')$ е дефинирано, системата $\{\tau' \sim \tau''\}$ е сводима към системата $\mathfrak{f}(\tau' \sim \tau'')$.[11]

Т) Когато разполагаме с редуктор $\mathfrak{f}$, става възможно да дефинираме две специални преобразувания на системи над `Sort`-индексираното множество X. Ще наричаме тези преобразувания *специални решаващи преобразувания*.

Първо специално решаващо преобразувание. Ако системата съдържа поне едно равенство, за което функцията $\mathfrak{f}$ е дефинирана, то заменяме едновременно всяко едно такова равенство $\tau' \sim \tau''$ с равенствата принадлежащи на $\mathfrak{f}(\tau' \sim \tau'')$.

Второ специално решаващо преобразувание. Ако системата съдържа решаващо равенство $\ulcorner \mathtt{x} \urcorner \sim \tau$, което обаче не е решаващо за системата, нека s е субституцията, за която $s\mathtt{x} = \tau$ and $s\xi = \xi$ за всяко $\xi \neq \mathtt{x}$. Заменяме всяко равенство $\tau' \sim \tau''$ в системата (освен самото $\ulcorner \mathtt{x} \urcorner \sim \tau$) с равенството $\tau'[\![s]\!]^{[\![X]\!]} \sim \tau''[\![s]\!]^{[\![X]\!]}$.

У) **Твърдение.** (1) *Ако приложим специално решаващо преобразувание към системата Θ и получим системата Θ', всяко решение на Θ (в коя да е алгебра) е решение също и на Θ'.*

(2) *Ако приложим специално решаващо преобразувание към система и резултатът е термално противоречив, то и първоначалната система е термално противоречива.*

(3) *Ако се окаже невъзможно да приложим специално решаващо преобразувание към система, то или системата е решена, или термално противоречива.*

Ф) **Твърдение.** *Не е възможно да прилагаме безброй много пъти специално решаващи преобразувания към финитарна система от равенства.*

Х) **Дефиниция.** (1) *Термоидален еквалайзер* за X е такава функция $\mathfrak{e}$, че за произволна финитарна система Θ над X $\mathfrak{e}(\Theta)$ е крайно множество

[11] Да сравним това с (P2).

от термоидални субституции от X към $[\![X]\!]$.

(2) Еквалайзерът $\mathfrak{e}$ е *термално коректен*, ако за всяка система Θ всеки частен случай на елемент на $\mathfrak{e}(\Theta)$ в алгебричния фрагмент на структура от термове $[X]$, е решение на Θ в този алгебричен фрагмент.

(3) Еквалайзерът $\mathfrak{e}$ е *термално пълен*, ако за всяка система Θ всяко решение на Θ в алгебра от термове е частен случай на кой да е елемент на $\mathfrak{e}(\Theta)$.

(4) Еквалайзерът $\mathfrak{e}$ е *почти пълен*, ако за всяка термално съвместима система Θ всяко решение на Θ (в коя да е структура) е частен случай на кой да е елемент на $\mathfrak{e}(\Theta)$.

Ц) Сега да разгледаме следната процедура. Започваме да прилагаме специални решаващи преобразувания към някоя система (в произволен ред). След краен брой стъпки ще получим система, към която повече не може да се прилагат специални решаващи преобразувания. Ако получената система е термално противоречива, то и първоначалната система е такава (вж. У2). В противен случай получената система ще бъде решена (вж. У3) и следователно ще има вида $\{\ulcorner \mathtt{x}_1 \urcorner \sim \tau_1, \ldots, \ulcorner \mathtt{x}_n \urcorner \sim \tau_n\}$. В този случай всяко решение на първоначалната система, е решение и на така получената система, а всяко решение на получената система е частен случай на субституцията:

$$s\xi = \begin{cases} \tau_i, & \text{ако } \xi = \mathtt{x}_i, \\ \xi, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Описаната процедура дефинира еквалайзер, който можем да означим с $\mathfrak{e}_{\mathfrak{f}}$. Този еквалайзер е термално коректен и термално пълен. Ако пък даденият редуктор $\mathfrak{f}$ е силен, то тогава еквалайзерът $\mathfrak{e}_{\mathfrak{f}}$ ще бъде също така и почти пълен.

§5. РЕЗОЛЮТИВНА ИЗВОДИМОСТ С ТЕРМОИДИ

А) **Дефиниция.** (1) *Литералоид* е атомарен формулоид или отрицание на атомарен формулоид.

(2) Ще използваме следната нотация: ако φ е атомарен формулоид, то $\overline{\varphi} = \neg\varphi$ и $\overline{\neg\varphi} = \varphi$. Очевидно $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$ за кой да е литералоид λ.

(3) *Клаузоидите* над $\mathtt{Sort}$-индексирано множество X се дефинират индуктивно посредством следните правила: $\perp$ е клаузоид над X; всеки литералоид над X е клаузоид над X; ако λ е литералоид над X и δ е клаузоид над X и $\delta \neq \perp$, то $\lambda \vee \delta$ е клаузоид над X.

Аналогично се дефинира и понятието *клауза*.

(4) Ако е дадена алгебра $\mathbf{A}$ и клаузоид δ над X, всички клаузоиди, принадлежащи на множества от вида $\delta[\![v]\!]^{\mathcal{P}\mathbf{A}}$, където v е произволна $\mathtt{Sort}$-индексирана функция от X към $|\mathbf{A}|$, се наричат *частни случаи* на δ в $\mathbf{A}$. Да забележим, че частните случаи на кой да е клаузоид не са клаузоиди, а

клаузи, в които не се срещат функционални символи (т.е. всички термове са имена на елементи на универсума на $\mathbf{A}$).

Б) **Пример.** Да разгледаме клаузоида $\mathtt{p}(\ulcorner\ulcorner\mathtt{x}\urcorner\urcorner, \ulcorner\ulcorner\mathtt{y}\urcorner\urcorner)$, където $\mathtt{x} \in X$ и $\mathtt{y} \in X$. Частните случаи в алгебра $\mathbf{A}$ на този клаузоид са всички клаузи от вида $\mathtt{p}(\ulcorner\alpha\urcorner, \ulcorner\beta\urcorner)$, където $\alpha \in |\mathbf{A}|$ и $\beta \in |\mathbf{A}|$.

В) **Твърдение.** *Нека е дадена логическа структура* $\mathbf{M}$. *Един клаузоид δ над X е общовалиден в $\mathbf{M}$ тогава и само тогава, когато всичките му частни случаи в $\partial\mathbf{M}$ са верни в $\mathbf{M}$.*

Г) **Следствие.** *Ако множество от клаузоиди не е универсално изпълнимо в алгебра $\mathbf{A}$, то множеството от всичките частни случаи в $\mathbf{A}$ на елементите му не е изпълнимо в $\mathbf{A}$.*

Д) **Дефиниция.** Понятието *редица на клаузоид* се дефинира индуктивно: $\langle\rangle$ е редицата на $\bot$; ако λ е литералоид, то $\langle\lambda\rangle$ е редицата на λ; ако $\langle\lambda_1, \dots, \lambda_n\rangle$ е редицата на δ, то $\langle\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n\rangle$ е редицата на $\lambda \vee \delta$.

Аналогично може се дефинира и понятието *редица на клауза*.

Е) Всеки клаузоид притежава единствена редица от литералоиди и за всяка крайна редица от клаузоиди съществува единствен клаузоид, чиято редица е дадената.

Ж) Хомоморфизмите се държат правилно с клаузите и клаузоидите. Например ако $\mathbf{A}$ е алгебра, то произволен хомоморфизъм $h : [\![X]\!] \to [\![Y]\!]$ изобразява клаузоид в клаузоид, произволен хомоморфизъм $h : [\![X]\!] \to [Y]$ или $h : [\![X]\!] \to |\mathbf{A}|$ изобразава клаузоид в клауза, произволен хомоморфизъм $h : [X] \to [\![Y]\!]$ изобразява клауза в клаузоид, произволен хомоморфизъм $h : [X] \to [Y]$ или $h : [X] \to |\mathbf{A}|$ изобразява клауза в клауза, произволен хомоморфизъм $h : [\![X]\!] \to |\mathcal{P}\mathbf{A}|$ изобразява клаузоид в множество от клаузи. Във всеки един от тези случаи елементите на редицата на клаузата или клаузоида се изобразяват в съответните елементи на редицата на образа.

З) **Дефиниция.** (1) Два клаузоида — δ над X и ε над Y — са *варианти*, ако съществуват такива $\mathtt{Sort}$-индексирани функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, че $\delta[f] = \varepsilon$ и $\varepsilon[g] = \delta$. Дефиницията на понятието *клаузи варианти* е аналогична.

(2) Ако $\langle\lambda_1, \dots, \lambda_n\rangle$ е редицата на δ и $\langle\mu_1, \dots, \mu_n\rangle$ е редицата на ε, то за всяко i казваме, че литералът или литералоидът λ_i е *съответен* на μ_i.

И) **Твърдение.** (1) *Ако клаузоидите δ и ε са варианти, тогава δ и ε имат едни и същи частни случаи във всяка алгебра.*

(2) *За произволен клаузоид δ над X и субституция $s : X \to [\![Y]\!]$, всички частни случаи на $\delta[\![s]\!]^{[\![Y]\!]}$ са частни случаи на δ.*

Й) **Следствие.** *Ако клаузоид е общовалиден в логическа структура, то всичките му варианти също са общовалидни в тази структура.*

К) По-нататък ще фиксираме $\mathtt{Sort}$-индексирано множество $\mathbb{X}$ и ще използваме само клаузи и клаузоиди над $\mathbb{X}$. Ще бъде достатъчно да поискаме от $\mathbb{X}$ да изпълнява следните две свойства:

– Компонентите на $\mathbb{X}$ са достатъчно голяма мощност, така че всеки клаузоид δ, който желаем да използваме, да притежава вариант, който е клаузоид над $\mathbb{X}$.

– Всеки компонент на $\mathbb{X}$ е безкрайно множество.

Л) **Дефиниция.** (1) *Хорнов клаузоид (клауза)* е клаузоид (клауза) над $\mathbb{X}$, в чиято редица единствено първият литералоид (литерал) може да бъде положителен.

(2) *Избираща функция* е такава функция $\mathfrak{sel}$, че за всяка непразна крайна редица от литерали $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ над $\mathbb{X}$ $\mathfrak{sel}(\langle \lambda_1, \dots, \lambda_k \rangle)$ е естествено число измежду $1, 2, \dots, k$. Ще предполагаме, че $\mathfrak{sel}(\langle \lambda_1, \dots, \lambda_k \rangle) = \mathfrak{sel}(\langle \lambda_1[f], \dots, \lambda_k[f] \rangle)$ за всяка биективна $\mathtt{Sort}$-индексирана функция f.

Всяка избираща функция $\mathfrak{sel}$ може да бъде разширена стандартно и за литералоиди над $\mathbb{X}$ по следния начин: ако $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ са литералоиди над $\mathbb{X}$, нека $\mathfrak{sel}(\langle \lambda_1, \dots, \lambda_k \rangle) = \mathfrak{sel}(\langle \lambda_1 [\![\mathrm{nam}_{\mathbb{X}}]\!]^{[\mathbb{X}]}, \dots, \lambda_k [\![\mathrm{nam}_{\mathbb{X}}]\!]^{[\mathbb{X}]} \rangle)$.

(3) Нека е дадена избираща функция $\mathfrak{sel}$, еквалайзер $\mathfrak{e}$, отрицателна Хорнова клауза δ над $\mathbb{X}$ с редица $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_k \rangle$ и неотрицателна Хорнова клауза ε над $\mathbb{X}$ с редица $\langle \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m \rangle$. Ако $j = \mathfrak{sel}(\langle \lambda_1, \dots, \lambda_k \rangle)$ и $s \in \mathfrak{e}(\{\overline{\lambda}_j \sim \mu_0\})$, тогава клаузата, чиято редица е

$$\langle \lambda_1[s]^{[\mathbb{X}]}, \dots, \lambda_{j-1}[s]^{[\mathbb{X}]}, \mu_1[s]^{[\mathbb{X}]}, \dots, \mu_m[s]^{[\mathbb{X}]}, \lambda_{j+1}[s]^{[\mathbb{X}]}, \lambda_k[s]^{[\mathbb{X}]} \rangle,$$

се нарича $\mathfrak{e}$-$\mathfrak{sel}$-*SLD резолвента* на δ и ε.

Понятието $\mathfrak{e}$-$\mathfrak{sel}$-SLD резолвента на клаузоиди се дефинира аналогично.

М) Дедуктивната машина на Пролог използва SLD-резолюция със следната тривиална избираща функция: $\mathfrak{sel}(\zeta) = 1$ за произволна редица ζ. С други думи, Пролог винаги избира първия литерал от клаузата.

Следната теорема казва, че ако Пролог не успее да докаже, че целта φ следва от програмата Γ, и при това не се зацикли, то съществува краен модел на $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$:

Н) **Теорема.** *Нека Γ е крайно множество от неотрицателни Хорнови клаузи над $\mathbb{X}$, $\mathfrak{sel}$ е избираща функция и $\mathfrak{t}$ е такова крайно $\mathfrak{mgu}$-$\mathfrak{sel}$-SLD търсещо дърво за Γ, че никое от листата на $\mathfrak{t}$ не е етикетирано с $\perp$. Ако коренът на $\mathfrak{t}$ е етикетиран с ζ, то множеството $\Gamma \cup \{\zeta\}$ е универсално изпълнимо в някоя алгебра с крайни носители.*

О) **Дефиниция.** (1) Нека е даден клаузоид δ с редица $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$ и литералоид λ, който се среща в δ. С $\delta \setminus \lambda$ ще означаваме клаузоидът, чиято редица се получава от $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle$ с отстраняване на всички срещания на λ.

(2) Нека е даден клаузоид δ и множество Γ от литералоиди, срещащи се в δ. С $\delta \setminus \Gamma$ ще означаваме клаузоидът, чиято редица се получава от редицата на δ с отстраняване на всички срещания на елементи на Γ.

(3) *Клаш-редица* е редица $\langle \delta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$, в която $n \geq 1$, δ е неположителна клауза и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ са положителни клаузи.

П) **Дефиниция.** (1) Клаузоид δ *поглъща* клаузоида ε, ако всички литералоиди на δ се срещат в ε.

(2) Нека е дадена алгебра $\mathbf{A}$. Клаузоидът δ над $\mathbb{X}$ *поглъща* в $\mathbf{A}$ клаузоида ε, ако всеки частен случай на ε в $\mathbf{A}$ се поглъща от някой частен случай на δ в $\mathbf{A}$.

(3) *Сгъстяваща функция* е функция $\mathfrak{f}$ изобразяваща клаузоиди над $\mathbb{X}$ в такива клаузоиди над $\mathbb{X}$, че за всеки клаузоид δ $\mathfrak{f}(\delta)$ поглъща δ и броят на отрицателните литерали в $\mathfrak{f}(\delta)$ е не по-голям от броя им в δ.

(4) Нека е дадена логическа структура $\mathbf{M}$. Състяващата функция $\mathfrak{f}$ е $\mathbf{M}$-*коректна*, ако за всеки общовалиден в $\mathbf{M}$ клаузоид δ над $\mathbb{X}$ клаузоидът $\mathfrak{f}(\delta)$ също е общовалиден в $\mathbf{M}$.

Р) **Дефиниция.** (1) Нека са дадени термоидален еквалайзер $\mathfrak{e}$, клаузоид δ над $\mathbb{X}$ с редица $\langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle$, положителен клаузоид ε над $\mathbb{X}$ и непразно множество Γ от литералоиди, срещащи се в ε. Ако λ_i е такъв отрицателен литерал, че сред $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ няма други отрицателни литерали, и

$$s \in \mathfrak{e}(\{\lambda_i \sim \overline{\mu} : \mu \in \Gamma\}),$$

то клаузоидът, чиято редица се получава от редицата на $\delta[s]^{[\mathbb{X}]}$ чрез замяна на литералоидът, съответен на λ_i, с редицата на $(\varepsilon \setminus \Gamma)[s]^{[\mathbb{X}]}$, се нарича *положителна* $\mathfrak{e}$-*резолвента* на δ и ε.

(2) Нека $\mathfrak{e}$ е еквалайзер и $\mathfrak{f}$ е сгъстяваща функция. Нека $\langle \delta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$ е клаш-редица от клаузоиди над $\mathbb{X}$. Нека $\delta_0, \ldots, \delta_n$ са такива, че $\delta_0 = \delta$ и δ_{i+1} е резултатът от прилагането на $\mathfrak{f}$ към някоя положителна $\mathfrak{e}$-резолвента на вариант на δ_i и вариант на ε_{i+1} (като и двата варианта са без общи зависимости). Ако δ_n е положителен клаузоид, то δ_n се нарича *положителна* $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$-*хиперрезолвента* дефинирана чрез клаш-редицата $\langle \delta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \rangle$.

С) **Дефиниция.** (1) *Редуцираща функция* $\mathfrak{g}$ е функция, изобразяваща всяко множество Γ от клаузоиди над $\mathbb{X}$ в множество $\mathfrak{g}(\Gamma)$ от клаузоиди над $\mathbb{X}$.

(2) Нека е дадена алгебра $\mathbf{A}$. Редуциращата функция $\mathfrak{g}$ е $\mathbf{A}$-коректна, ако за всяко множество Γ от клаузоиди над $\mathbb{X}$ всеки елемент на $\mathfrak{g}(\Gamma)$ се поглъща в $\mathbf{A}$ от някой елемент на Γ.

(3) Нека е дадена алгебра $\mathbf{A}$. Редуциращата функция $\mathfrak{g}$ е $\mathbf{A}$-пълна, ако за всяко множество Γ от клаузоиди над $\mathbb{X}$ всеки елемент на Γ се поглъща в $\mathbf{A}$ от някой елемент на $\mathfrak{g}(\Gamma)$.

Т) **Дефиниция.** (1) Нека е даден еквалайзер $\mathfrak{e}$, състяваща функция $\mathfrak{f}$, редуцираща функция $\mathfrak{g}$ и множество Γ от клаузоиди над $\mathbb{X}$. Нека Γ' е множеството от всички положителни $\mathfrak{ef}$-хиперрезолвенти, дефинирани чрез клаш-редици, чиито елементи принадлежат на Γ. Множеството $\mathfrak{g}(\Gamma \cup \Gamma')$ ще бъде означавано посредством $\mathfrak{res}(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma)$.

(2) За всяко естествено число n $\mathfrak{res}^n(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma)$ е итеративното прилагане на оператора $\mathfrak{res}$. По-точно $\mathfrak{res}^0(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma) = \Gamma$ и $\mathfrak{res}^{n+1}(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma) = \mathfrak{res}(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \mathfrak{res}^n(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma))$.

(3) Нека $\mathfrak{res}^*(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma)$ е обединението на всички $\mathfrak{res}^n(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma)$ за всяко n.

Да забележим, че поради използването на редуцираща функция операторът $\mathfrak{res}^n$ не е със сигурност монотонен по n.

Следната теорема казва, позитивната хиперрезолюция е коректна в логически структури от термове (т.е. в Ербранови структури). Тъй като множество от клаузоиди е универсално изпълнимо тогава и само тогава, когато е общовалидно в някоя Ербранова структура, можем да заключим, че положителната хиперрезолюция запазва универсалната изпълнимост. Ако множество Γ е универсално изпълнимо и добавим към него положителни хиперрезолвенти, полученото множество също ще бъде универсално изпълнимо.

У) **Теорема.** *Нека е дадена логическа структура* $\mathbf{M}$ *от термове, термално коректен еквалайзер* $\mathfrak{e}$*,* $\mathbf{M}$*-коректна състяваща функция* $\mathfrak{f}$ *и* $\partial\mathbf{M}$*-коректна редуцираща функция* $\mathfrak{g}$*. Ако* Γ *е множество от общовалидни в* $\mathbf{M}$ *клаузоиди над* $\mathbb{X}$*, то* $\bot \notin \mathfrak{res}^*(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma)$.

Ф) **Дефиниция.** Множество Γ от клаузоиди е *по същество крайно*, ако съществува такова крайно подмножество Δ на Γ, че за всяко $\delta \in \Gamma$ някой вариант на δ принадлежи на Δ.

Х) **Дефиниция.** Казваме, че някое свойство е вярно за *почти всяка* нормална алгебра, ако съществува такова крайно множество от термално противоречиви системи, че свойството е вярно за всяка нормална алгебра, в която никоя от системите принадлежащи на това множество няма решение.

Следната теорема е причината да можем да използваме положителната хиперрезолюция с термоиди за построяване на крайни модели.

Ц) **Теорема.** *Нека е даден почти пълен еквалайзер* $\mathfrak{e}$*, състяваща функция* $\mathfrak{f}$*, редуцираща функция* $\mathfrak{g}$ *която е* $\mathbf{A}$*-пълна за почти всяка нормална алгебра* $\mathbf{A}$ *и множество* Γ *от клаузоиди. Ако* $\mathfrak{res}^*(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma)$ *е по същество крайно и* $\bot \notin \mathfrak{res}^*(\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}\,; \Gamma)$*, то* Γ *е универсално изпълнимо в почти всяка алгебра.*

§6. ГАМА-, ДЕЛТА- И ЕПСИЛОН-ТЕРМОИДИ

А) За всеки функционален символ $\mathtt{f}$ от тип $\langle\langle\kappa_1,\dots,\kappa_n\rangle,\lambda\rangle$ нека $\mathtt{f}_1^{-1},\dots,\mathtt{f}_n^{-1}$ са нови символи, различни от всички други формални символи, които използваме (операционни символи, скоби, запетая). За всеки сорт κ нека $\triangle_\kappa$ е нов символ, също различен от останалите формални символи, които използваме.

Б) **Дефиниция.** *Гама-полутермоидите* са термове в разширен език — език, при който символът $\mathtt{f}_i^{-1}$ се използва като функционален символ от тип $\langle\langle\lambda\rangle,\kappa_i\rangle$ и символът $\triangle_\kappa$ се използва като функционален символ от тип $\langle\langle\rangle,\kappa\rangle$.

В) **Пример.** Нека κ е сорт, типът на $\mathtt{f}$ е $\langle\langle\kappa,\kappa\rangle,\kappa\rangle$ и типът на $\mathtt{c}$ е $\langle\langle\rangle,\kappa\rangle$. Тогава $\mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{c})$, $\mathtt{f}(\mathtt{c},\triangle_\kappa)$ и $\mathtt{f}_2^{-1}(\mathtt{f}(\mathtt{c},\triangle_\kappa))$ са гама-полутермоиди от сорт κ.

Г) **Дефиниция.** Нека $\mathbf{M}$ е структура. Ще дефинираме индуктивно множеството от *стойностите на гама-полутермоид* над $|\mathbf{M}|$ в $\mathbf{M}$:

(1) μ е единствената стойност на $\ulcorner\mu\urcorner$.

(2) Целият носител $\mathbf{M}_\kappa$ е множеството от стойностите на $\triangle_\kappa$.

(3) Множеството от стойностите на $\mathtt{f}(\tau_1,\dots,\tau_n)$ е

$$\{\mathtt{f}^{\mathbf{M}}\langle\mu_1,\dots,\mu_n\rangle : \mu_1\in A_1,\dots,\mu_n\in A_n\},$$

където $A_1,\dots,A_n$ са множествата от стойностите съответно на $\tau_1,\dots,\tau_n$ в $\mathbf{M}$.

(4) Множеството от стойностите на $\mathtt{f}_i^{-1}(\tau)$ е

$$\{\mu_i : \text{съществуват такива } \mu_1,\dots,\mu_{i-1},\mu_{i+1},\dots,\mu_n, \text{ че } \mathtt{f}^{\mathbf{M}}\langle\mu_1,\dots,\mu_n\rangle\in A\},$$

където A е множеството от стойностите на τ в $\mathbf{M}$.

Д) Не е възможно да се дефинира терминатор въз основа на гама-полутермоидите поради следната причина. Нека $\mathtt{f}$ е бинарен функционален символ от подходящ тип и $\mathtt{c}$ е индивидна константа. Тогава $\mathtt{f}_1^{-1}(\mathtt{c})$ е гама-полутермоид. Нека структурата $\mathbf{M}$ бъде такава, че стойността на функцията $\mathtt{f}^{\mathbf{M}}$ никога не е равна на $\mathtt{c}^{\mathbf{M}}$. Не е трудно да се забележи, че в този случай множеството от стойностите на $\mathtt{f}_1^{-1}(\mathtt{c})$ е празното множество. Съгласно (4Д12) обаче, стойността на всеки термоид в коя да е структура трябва да бъде непразно множество. Това е причината, поради която гама-термоидите се дефинират като специален вид термоиди.

Е) **Дефиниция.** Неформално казано, τ е гама-термоид, ако τ е гама-полутермоид и символите като $\mathtt{f}_i^{-1}$ са приложени само към изрази, които са стойности на $\mathtt{f}$. По-точно казано, гама-полутермоидът τ е гама-термоид, ако има точно една стойност в Ербрановата алгебра.

Ж) **Пример.** Нека $\mathtt{f}$, $\mathtt{g}$, $\mathtt{a}$ и $\mathtt{c}$ са функционални символи с подходящи типове.

(1) Всеки терм над X е гама-термоид над X.

(2) $\mathtt{f}_2^{-1}(\mathtt{g}_1^{-1}(\mathtt{g}(\mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{a}),\mathtt{c})))$ е гама-термоид и стойността му в Ербрановата алгебра е термът $\mathtt{a}$, а $\mathtt{f}_2^{-1}(\mathtt{g}_2^{-1}(\mathtt{g}(\mathtt{f}(\mathtt{c},\mathtt{c}),\mathtt{c})))$ не е гама-термоид, защото множеството от стойностите му в Ербрановата алгебра е празното множество.

(3) $\mathtt{f}_1^{-1}(\mathtt{f}(\mathtt{c},\triangle_\kappa))$ е гама-термоид и стойността му в Ербрановата алгебра е термът $\mathtt{c}$, а $\mathtt{f}_2^{-1}(\mathtt{f}(\mathtt{c},\triangle_\kappa))$ не е гама-термоид, защото всеки терм от сорт κ е негова стойност в Ербрановата алгебра.

Гама-термоидите допускат полезна унификация. Например равенството $\mathtt{f}(\tau_1,\dots,\tau_n) \sim \mathtt{f}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ може да бъде сведено към системата

$$\left|\begin{array}{l} \tau_1 \sim \mathtt{f}_1^{-1}(\mathtt{f}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)) \\ \tau_2 \sim \mathtt{f}_2^{-1}\mathtt{f}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)) \\ \dots \\ \tau_n \sim \mathtt{f}_n^{-1}\mathtt{f}(\sigma_1,\dots,\sigma_n)) \end{array}\right.$$

Да забележим, че всяко решение на горното равенство (в коя да е алгебра) е решение и на системата.

З) **Дефиниция.** Нека X е произволно $\mathtt{Sort}$-индексирано множество. Множеството на *делта-термоидите* над X се дефинира индуктивно:

(1) Ако $\mathtt{y} \in X_\kappa$, то $\ulcorner\mathtt{y}\urcorner$ е делта-термоид от сорт κ над X.

(2) Ако $\mathtt{f}$ е функционален символ от тип $\langle\langle\kappa_1,\dots,\kappa_n\rangle,\lambda\rangle$ и $\tau_1,\dots,\tau_n$ са делта-термоиди над X със сортове съответно $\kappa_1,\dots,\kappa_n$, то низът $\mathtt{f}(\tau_1,\dots,\tau_n)$ е делта-термоид от сорт λ над X.

(3) Ако τ е делта-термоид от сорт κ и n е естествено число, то низът $+(\ulcorner n\urcorner,\tau)$ също е делта-термоид от сорт κ. За да подобрим четливостта, ще пишем $\ulcorner n\urcorner+\tau$ вместо $+(\ulcorner n\urcorner,\tau)$.

И) Например следният израз е делта-термоид: $\ulcorner 1\urcorner{+}\mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{c}),\ulcorner 3\urcorner{+}\mathtt{g}(\mathtt{d}),\mathtt{c})$. Смисълът на числата при делта-термоидите е подобен на смисъла им при бета-термоидите, но точната дефиниция е по-трудна за изказване.

Ако е дадена структура $\mathbf{M}$, всеки гама-термоид с n свободни променливи дефинира многозначна функция $\mathtt{t} : |\mathbf{M}|^n \to \mathcal{P}|\mathbf{M}|$. Грубо казано μ е *стойност на делта-термоида* $n+\tau$, ако $\mu \in \mathtt{t}(\nu,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k)$ за някои $\nu,\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k$, такива че ν е стойност на τ и многозначната функция $\mathtt{t}$ е дефинирана посредством гама-термоид, чиято „височина“ е по-малка или равна на n.

Делта-термоидите допускат полезна унификация. Например равенството $\mathtt{f}(\tau_1, \dots, \tau_n) \sim n + \mathtt{f}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ може да се преобразува в системата

$$\left|\begin{array}{l} \tau_1 \sim (n+1) + \sigma_1 \\ \tau_2 \sim (n+1) + \sigma_2 \\ \dots \\ \tau_n \sim (n+1) + \sigma_n \end{array}\right.$$

Да забележим, че всяко решение на горното равенство (в коя да е алгебра) е решение и на системата.

Й) **Дефиниция.** *Епсилон-термоид* над X от сорт κ е израз от вида $\ulcorner n \urcorner + \tau$, където n е произволно естествено число и τ е терм над X от сорт κ.

К) Очевидно всеки епсилон-термоид е и делта-термоид. Семантиката, която имаме пред вид при епсилон-термоидите, обаче е по-различна. Грубо казано, за да намерим стойностите на $n + \tau$, трябва да прилагаме многозначни функции, дефинирани посредством гама-термоиди не само към τ, но също и към подтермовете на τ. Всъщност за всеки епсилон-термоид можем да намерим делта-термоид, който е еквивалентен на него. Например епсилон-термоидът

$$\ulcorner 3 \urcorner + \mathtt{f}(\mathtt{g}(\mathtt{h}(\mathtt{c}), \mathtt{g}(\mathtt{c}, \mathtt{h}(\mathtt{d}))))$$

е еквивалентен на делта-термоида

$$\ulcorner 3 \urcorner + \mathtt{f}(\ulcorner 4 \urcorner + \mathtt{g}(\ulcorner 5 \urcorner + \mathtt{h}(\ulcorner 6 \urcorner + \mathtt{c}), \ulcorner 5 \urcorner + \mathtt{g}(\ulcorner 6 \urcorner + \mathtt{c}, \ulcorner 6 \urcorner + \mathtt{h}(\ulcorner 7 \urcorner + \mathtt{d}))))$$

Да забележим, че колкото по-дълбок е подтермът, толкова по-голямо става числото пред него.

Епсилон термоидите също допускат полезна унификация.

§7. СВОЙСТВО НА КРАЙНИТЕ МОДЕЛИ НА КЛАСА VED

А) **Теорема.** *Ако крайна термална система над $\mathbb{X}$ няма решения в някоя нормална алгебра, то тя няма решения и някоя нормална алгебра с крайни алгебрични носители.*

По същество тази теорема е доказана за пръв път от Гладстоун (за обичайния частен случай на едносортни алгебри) в [12].[12] Според Гладстоун този резултат (в по-различен вид) се твърди за пръв път от Ербран

[12] Всъщност резултатът на Гладстоун не е за произволни крайни термални системи, а само за едно термално равенство. Това ограничение лесно се преодолява. Да предположим, че системата $\{\tau_1 \sim \sigma_1, \dots, \tau_n \sim \sigma_n\}$ няма решения в нормалната алгебра $\mathbf{A}$. Нека $\mathtt{f}$ е някой нов n-арен функционален символ. Тогава равенството $\mathtt{f}(\tau_1, \dots, \tau_n) \sim \mathtt{f}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ няма да има решения в $[|\mathbf{A}|]$. Следователно от резултата на Гладстоун можем да заключим, че това равенство е нерешимо в някоя алгебра с краен носител. Очевидно в същата крайна алгебра ще бъде нерешима и системата.

в [15]. Ербран обаче не дава негово доказателство. В бележка под линия на стр. 161 в [17], Хилберт и Бернайс отбелязват, че този резултат изглежда измамливо правдоподобен и цитират Шуте, според когото доказателството му никак не е очевидно.

В дисертацията съм дал свое, по-кратко доказателство на този резултат (публикувано е в [32]).

Като следствие от тази теорема може да бъде доказано и аналогично свойство, но за крайни термоидални системи:

Б) **Теорема.** *Ако крайна делта- или епсилон-термоидална система над $\mathbb{X}$ няма решения в някоя нормална алгебра, то тогава тя няма решения и в някоя нормална алгебра с крайни алгебрични носители.*

Всъщност аналогичен резултат е верен и за алфа-, бета- и гама-термоидалните системи, но в дисертацията това не е доказано.

В) В (5Ц) видяхме, че ако положителната хиперрезолюция се насити, то първоначалното множество от клаузоиди е били универсално изпълнимо в почти всяка нормална алгебра. Съгласно (7Б) и (7Б) това означава, че ако положителната хиперрезолюция с клаузоиди се насити, то първоначалното множество от клаузоиди е било универсално изпълнимо в някоя нормална алгебра с крайни алгебрични носители. Този резултат може да бъде използван, за да доказваме, че определени класове от предикатни формули притежават свойството на крайните модели. В дисертацията е показано, че положителната хиперрезолюция с клаузоиди, приложена към клаузи, принадлежащи на класа VED, винаги се насища, откъдето следва, че този клас има свойството на крайните модели.

Г) **Дефиниция.** Клауза δ над $\mathbb{X}$ принадлежи на класа *VED*, ако δ е Хорнова клауза и за всяко $\mathtt{x} \in \mathbb{X}$ всички срещания на $\mathtt{x}$ в δ са на една и съща дълбочина.

Д) **Теорема.** *Класът VED има свойството на крайните модели. С други думи, ако крайно множество от клаузи, принадлежащи на VED, има модел, то тогава то има краен модел.*

§8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методът на резолюциите е добре известен метод, който е коректен и пълен. Ако множество от клаузи е универсално изпълнимо, противоречие няма да може да се изведе. Ако пък множество от клаузи не е универсално изпълнимо, то тогава с резолюцията е възможно да се изведе противоречие.

Унификацията е важен компонент на метода на резолюцията. Обичайният алгоритъм за унификация на термове е коректен и пълен само за Ербранови структури. Поради това обичайната резолюция е пълна само по отношение на изпълнимостта в такива структури. Тъй като Ербрановите структури почти никога не са крайни, трудно е да използваме резолюция, за да строим крайни модели или да доказваме свойството на крайните модели. Ето защо в дисертацията е въведено понятието „изпълнимост в алгебра“ и са изследвани модификации на резолюцията, които са пълни по отношение на изпълнимостта в алгебри, различни от Ербрановата.

Основният принос в тази дисертация е въвеждането на понятието „термоид“, което е далеч отиващо обобщение на класическото понятие „терм“. Доказано е, че за определени видове термоиди има унификация, която е пълна по отношение на голям клас от алгебри, включително и някои крайни. Наличието на такава унификация позволява да бъде развита техниката на резолюция с термоиди, с която се доказват основните резултати в дисертацията, отнасящи се до наличието на свойство на крайните модели.

Съществуващите до момента резултати за наличие на свойството на крайните модели обикновено изглеждат по следния начин — ако елементите на някое изпълнимо множество от логически формули или клаузи отговарят на определени синтактични изисквания, то тогава то със сигурност има краен модел. В дисертацията е предложен нов, алгоритмичен подход към изследване на свойството на крайните модели. Ако даден алгоритъм, приложен към множество от формули или клаузи даде определен резултат, то тогава то има краен модел. Доказано е, че ако резолюцията с термоиди приключи след краен брой стъпки без да е стигнала до противоречие, то множеството има краен модел.

Като приложение на развитата теория е получен следният основен резултат: ако Пролог не успее да докаже, че целта φ следва от програма Γ, състояща се от Хорнови клаузи, и опитвайки се да направи това не се зацикли, то тогава съществува краен модел на $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Силата и приложимостта на алгоритмичния подход към свойството на крайните модели е демонстрирана за известен синтактично зададен клас от формули — VED (Хорнови формули, в които всяко срещане на дадена променлива е на една и съща дълбочина). Доказано е, че всяко изпълнимо крайно множество от формули от класа VED има краен модел.

Разработена е аксиоматична теория на термоидите (§14 и §16). Аксиомите за термоиди са вградени в дефиницията на понятието „терминатор“. Посочени са редица конкретни видове термоиди: алфа-термоиди в §15, бета-термоиди в §7 (неформално), гама-термоиди в §24, делта-термоиди в §25 и епсилон-термоиди в §26.

Предложена е сравнително обща процедура за унификация на термоиди. (§17 и §18)

Развита е теория на резолюцията с термоиди. Детайлно са изучени два варианта на резолюцията — SLD-резолюцията (§21) и положителната хиперрезолюция (§22 и §23).

Едно отличително свойство на резолюцията с термоиди е това, че макар да запазва изпълнимостта, в общия случай тя не запазва логическото следване. С други думи, след прибавяне на резолвенти към дадено множество може да се получи нееквивалентно множество. Въпреки това разширеното множество е изпълнимо тогава и само тогава, когато е изпълнимо първоначалното множество.

В математическата логика е обичайно да се счита, че пълнотата на една изводимост е жалано свойство, а коректността — напълно задължително. Термоидалната резолюция обаче е пълна, но не и коректна по отношение на логическото следване. Доколкото ми е известно в дисертацията за пръв път е предложена и използвана изводимост, имаща това свойство.

Всички доказателства за крайни структури са конструктивни и затова от тях може да се извлекат практически използваеми алгоритми за строене на крайни модели. Разбира се, много неща остават предмет на бъдещи изследвания. Например нужно е да се оцени размерът на построените модели, както и да се изследва дали не е възможно моделите да се строят с по-малък размер, отколкото се подразбира от дадените в дисертацията доказателства.

Публикации

Авторът разполага със следните публикации, свързани с дисертацията:

1. Anton Zinoviev. Negation as failure is finite controllable. In P. Peppas, C. Drossos, and C. Tsinakis, editors, *Proceedings of the 7th Panhellenic Logic Symposium*, pages 210–214. Patras University Press, 2009

Дадено е доказателство на (5H). Нека Γ е крайно множество от Хорнови клаузи. Да предположим, че питаме Пролог дали φ следва от Γ и след крайно време Пролог отговори с „не“. В този случай съществува краен модел на Γ, в който клаузата φ не е общовалидна.

2. Anton Zinoviev. Termal equations and finite controllability. *Annuaire de Université de Sofia, Faculté de Mathématiques et Informatique*, 93:49–54, 1999

В тази работа е предложено ново по-късо доказателство на (7A).

Декларация

Авторът декларира, че дисертацията е оригинална научна разработка. Използването на предходни резултати е отразено с подходящи препратки.

ПРЕДМЕТЕН УКАЗАТЕЛ

ЛИТЕРАТУРА

[1] Arnon Avron. Gentzen-type systems, resolution and tableaux. *J. Autom. Reasoning*, 10(2):265–281, 1993.

[2] Peter Baumgartner, Ulrich Furbach, and Ilkka Niemelä. Hyper tableaux. In José Júlio Alferes, Luís Moniz Pereira, and Ewa Orlowska, editors, *Logics in Artificial Intelligence, European Workshop, JELIA '96, Évora, Portugal, September 30 - October 3, 1996, Proceedings*, volume 1126 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–17. Springer, 1996.

[3] Paul Bernays and Moses Schönfinkel. Zum entscheidungsproblem der mathematischen logik. *Math. Annalen*, 99:342–372, 1928.

[4] George Boolos. Trees and finite satisfiability: proof of a conjecture of Burgess. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 25(3):193–197, 1984.

[5] Chad E. Brown and Gert Smolka. Analytic tableaux for simple type theory and its first-order fragment. *Logical Methods in Computer Science*, 6(2), 2010.

[6] Egon Börger, Erich Grädel, and Yuri Gurevich. *The Classical Decision Problem.* Springer, 1997.

[7] R. Caferra and N. Zabel. Extending resolution for model construction. In J. van Eijck, editor, *Logics in AI: Proc. of the European Workshop JELIA'90*, pages 153–169. Springer, Berlin, Heidelberg, 1991.

[8] Ricardo Caferra, Aalexander Leitsch, and Nicholas Peltier. *Automated Model Building*, volume 31 of *Applied Logic Series.* Springer, 2004/2010.

[9] Dimiter Dobrev. Strawberry Prolog. `http://dobrev.com/`, 1997–2013.

[10] Christian G. Fermüller and Alexander Leitsch. Hyperresolution and automated model building. *J. Log. Comput.*, 6(2):173–203, 1996.

[11] Christian G. Fermüller, Alexander Leitsch, Tanel Tammet, and N. K. Zamov. *Resolution Methods for the Decision Problem*, volume 679 of *Lecture Notes in Computer Science.* Springer, 1993.

[12] M. D. Gladstone. Finite models for inequations. *The Journal of Symbolic Logic*, 31(4):581–592, Dec., 1966.

[13] John Harrison. *Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning.* Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1st edition, 2009.

[14] Jacques Herbrand. Recherches sur la théorie de la démonstration. In *Travaux de la société des Sciences et des Lettres de Varsovie*, page 128. Classe III, Warszawa, 1930.

[15] Jacques Herbrand. Sur le problème fundamentalde la logique mathématique. *Comptes Rendus des Seances de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie, Class III*, 24:12–56, 1931.

[16] David Hilbert and Wilhelm Ackermann. *Grundzüge der theoretischen Logic.* Springer, 1928/1938.

[17] David Hilbert and Paul Bernays. *Grundlagen der Mathematik*, volume 2. Springer, 1939.

[18] William H. Joyner. Resolution strategies as decision procedures. *J. ACM*, 23:398–417, 1976.

[19] S. L. Katretchko. Maslov's inverse method. *Logika i kompjuter*, 2:62–75, 1995. (in Russian).

[20] R. Kowalski and P. J. Hayes. Semantic trees in automatic theorem-proving. In J. Siekmann and G. Wrightson, editors, *Automation of Reasoning 2: Classical Papers on Computational Logic 1967-1970*, pages 217–232. Springer, Berlin, Heidelberg, 1983.

[21] Rainer Manthey and François Bry. SATCHMO: A theorem prover implemented in Prolog. In Ewing L. Lusk and Ross A. Overbeek, editors, *9th International Conference on Automated Deduction, Argonne, Illinois, USA, May 23-26, 1988, Proceedings*, volume 310 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 415–434. Springer, 1988.

[22] S. Y. Maslov. An inverse method for establishing deducibility of nonprenex formulas of the predicate calculus. In J. Siekmann and G. Wrightson, editors, *Automation of Reasoning 2: Classical Papers on Computational Logic 1967-1970*, pages 48–54. Springer, Berlin, Heidelberg, 1983.

[23] William McCune. Automatic proofs and counterexamples for some ortholattice identities. *Information Processing Letters*, 65:285–291, 1998.

[24] William McCune. MACE 2.0 reference manual and guide. *CoRR*, cs.LO/0106042, 2001.

[25] Timothy Nelson, Daniel J. Dougherty, Kathi Fisler, and Shriram Krishnamurthi. On the finite model property in order-sorted logic.

[26] John Alan Robinson. A machine-oriented logic based on the resolution principle. *J. ACM*, 12(1):23–41, 1965.

[27] Tanel Tammet. Using resolution for deciding solvable classes and building finite models. In Janis Barzdins and Dines Bjørner, editors, *Baltic Computer Science*, volume 502 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 33–64. Springer, 1991.

[28] Tanel Tammet. *Resolution Methods for Decision Problems and Finite-Model Building*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1992.

[29] Christoph Weidenbach. Combining superposition, sorts and splitting. In John Alan Robinson and Andrei Voronkov, editors, *Handbook of Automated Reasoning*, pages 1965–2013. Elsevier and MIT Press, 2001.

[30] Jian Zhang. Constructing finite algebras with FALCON. *J. Autom. Reasoning*, 17(1):1–22, 1996.

[31] Jian Zhang and Hantao Zhang. SEM: a system for enumerating models. In *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI 95, Montréal Québec, Canada, August 20-25 1995, 2 Volumes*, pages 298–303. Morgan Kaufmann, 1995.

[32] Anton Zinoviev. Termal equations and finite controllability. *Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. et Mec.*, 93:49–54, 1999.

[33] Anton Zinoviev. Negation as failure is finite controllable. In C. Drossos, P. Peppas, and C. Tsinakis, editors, *Proceedings of the 7th Panhellenic Logic Symposium*, pages 210–214. Patras University Press, 2009.