Софийски университет „Св. Климент Охридски”
Факултет по математика и информатика
Катедра „Математическа логика и приложенията ѝ”

Теории за време и пространство, основани на региони

Динамична релационна мереотопология

Владислав Владимиров Ненчев
e-mail: lucifer.dev.0@gmail.com

АВТОРЕФЕРАТ
на дисертация за придобиване на
образователна и научна степен „доктор” по
научно направление 4.5 Математика,
научна специалност 01.01.01 Математическа логика

Научен ръководител: проф. д.м.н. Димитър Вакарелов
Ръководител катедра: доц. д-р Александра Соскова

14 юни 2014 г.

Абстракт

Дисертацията е научно изследване в сферата на *алтернативните теории за пространство и време*. Тук *алтернативни* може да се счита като синоним на *регионални* (базирани на региони) или *безточкови*, или *Уайтхедови*. Целта е да се комбинират *регионални* пространствени теории с времеви теории, като тези комбинации удовлетворяват следните изисквания:

- пространството да бъде безточково;
- да се приложи същият безточков подход и към времето (*безмоментно* време);
- да има единен пространствено-времеви език;
- да се използват само релационни езици.

Тези изисквания са подкрепени както и от философски доводи, изказани от Алфред Уайтхед и други автори, развивали областта на алтернативни теории за пространство и време, така и от практически съображения относно приложимост в други области на математическата логика и за описване на естествени процеси и ситуации.

Ще изучаваме релационни системи, които се състоят от времеви/динамични (*стабилни* и *нестабилни*) варианти на четири популярни релации от мереотопологията: *част-от* (part-of), *припокриване* (overlap), *взаимно отстъпване* (underlap) и *контакт*. Ще бъде представена естествена семантика за стабилните и нестабилни релации, която ги описва като динамични варианти на основните мереотопологични релации. Стабилните релации са описани като такива, които са винаги в сила (т.е. релациите са в сила във всеки един момент от времето или, алтернативно, във всички възможни ситуации). Нестабилните релации, от друга страна, са в сила понякога (поне веднъж), но не непременно винаги. Така, *стабилност* и *нестабилност* могат да се възприемат като прости времеви оператори, съответстващи на *винаги* и *понякога*. След като дефинираме тези динамични релации, ще работим само с тях и ще изключим от езика всички други понятия, които са базирани на (пространствени) точки или (времеви) моменти.

Стабилни и нестабилни мереотопологични релации са дефинирани също и в изследванията на Димитър Вакарелов, но там те се използват в по-силни системи, които имат по-богат език. Така, представените в дисертацията изследвания могат да се възприемат като релационно обобщение на разработките на Вакарелов. Използването на по-слаби езици/системи тук, води до значително усложняване на основните техники и доказателства на резултатите.

Основният език тук ще се състои от следните осем релации - четири стабилни версии на част-от, застъпване, взаимно отстъпване и контакт и четири нестабилни версии на тези релации. Също така ще бъде разгледан и един подезик на този основен набор от релации, а именно мереологичната редукция на основния език, която се състои от шест релации (по два динамични варианта на част-от, застъпване и взаимно отстъпване). Ще бъде отделено внимание на този подезик, тъй като той предлага по-олекотени системи, които могат да се използват в повече случаи и при по-леки предпоставки. Например, за да се дефинират мереотопологичните релации е нужна контактна алгебра, която съответства на топологично пространство. Така че, ако не можем да се уповаваме на наличието на топология, тогава няма да можем да дефинираме

всички мереотопологични релации. Релациите от мереологичния език, обаче, не изискват топологично пространство, а се нуждаят само от Булева алгебра.

Също така в развитието на регионалните пространствени теории, мереологията е била разглеждана отделно от мереотопологията. Тъй че е възможно да има специален интерес само към мереологичния подезик, като се изключат чисто топологичните релации. Така, в дисертацията ще се разгледат два набора от резултати. Всеки съществен резултат, който се покаже за основния език от осем динамични мереотопологични релации, ще бъде допълван (когато е възможно) със съответстващ резултат за мереологичната редукция от шест релации.

Получените резултати могат да се групират в четири основни теми. Ето резюмирани описания на тези четири теми.

Резултати за изразителност. Това са резултати за изразителността на двата езика. Ясно е, че мереологичният език е със строго по-слаба изразителност от мереотопологичния.Освен това се показва, че мереотопологичният език е по-слаб от езика на динамичните контактни алгебри и от комбинация между линейната темпорална логика LTL и фрагмент на RCC.

Резултати за представимост. Развиват се варианти на теорията на Стоун за представяне за Булеви алгебри и дистрибутивни решетки. Това се прави и за мереотопологичния и за мереологичния езици.

Резултати за аксиоматизиране. Представят се аксиоматизации и се доказва пълнота за логика от първи ред, безкванторен фрагмент на тази логика и модална логика за всеки от двата основни езика.

Резултати за (не)разрешимост. Показват се разрешимост или неразрешимост за логиките от предната група, с изключение на модалната логика за динамични мереотопологични релации. Но, за сметка на това, е показана разрешимост на две редукции на тази логика.

Структура на автореферата.

Авторефератът се състои от пет части. Първата част е кратък увод в идеите на безточковите пространство и време. Тя съдържа и началните понятия и резултати за теории за пространството и времето, които са нужни за последващите части. Следващите три части съдържат новите резултати от дисертацията. Част II съдържа основните дефиниции на динамични мереотопологични и мереологични релации, а също и резултатите за изразимост и представимост. Част III съдържа резултатите за аксиоматизации и пълнота. Резултатите за разрешимост и неразрешимост се представени в Част IV. Последната част е кратко резюме на дисертацията и на нерешените задачи и бъдещо развитие на темата. Авторефератът завършва с декларация на автора за оригиналност на представените резултати.

Благодарности

Благодаря на моите учители от Софийския университет, Димитър Вакарелов и Тинко Тинчев, за тяхното наставничество през годините и за значителните познания, на които ме научиха. Те ме въведоха в света на математическата логика и на тях дължа интереса си към тази област. Благодаря и на Филип Балбиани за продуктивните обсъждания на някои идеи от темата на текущата дисертация. Благодарен съм и на колегите си от катедрата по математическа логика и приложенията ѝ към Факултета по математика и информатика на Софийския университет, за чудесната научна атмосфера, която ми помогна да развия математическите си способности.

Благодаря на близките си хора и, най-много от всички, на моята любима Дили, за страхотните подкрепа, кураж и обич, с които ме дариха. *Благодаря ти, обич моя!*

Благодаря на всички!

Част I. Увод

1. Безточкова геометрия

Развитието на безточковата геометрия води началото си от изследванията на Уайтхед (виж [51], [49], [50]). Той изхожда от предпоставката, че точките са чисто абстрактни обекти, които не съществуват обособено в реалността. Ето защо той смята, че точките трябва да не са основни обекти в пространствените теории, а те трябва да са по-сложни конструкции, които се дефинират посредством съществуващи материални обекти. Така, в [51] Уайтхед предлага програма за реконструиране на геометрията така, че да не се базира на *точка* и *права* като основни понятия, както е в Евклидовата геометрия, но вместо това да се базира на понятието *регион*. Идеята е, че регионите представляват математически абстракции на естествени обекти, които могат да се наблюдават в реалността. Този подход към пространствените теории е известен като *Регионален Подход към Пространството (РПП)*. Изследванията на Уайтхед са продължени от де Лагуна [7], Тарски [44] и други. За повече информация относно Регионалния Подход към Пространството да се гледат [4], [37], [45].

Уайтхед показва, че точките могат да се дефинират посредством множества от региони и чрез релациите между тези региони. За тази цел той използва основни похвати от *мереологията* за да развие "безточкова" геометрия (виж [40] за повече информация относно мереологията). Например, някои от използваните мереологичните релации са *част-от* и *припокриване*. В дисертацията се използва още една мереологична релация - *взаимно отстъпване*. Тарски показва, че математическите модели на мереологията са пълните Булеви алгебри без нулевия елемент (виж [40] за подробности). Ако възприемаме елементите на алгебрата като региони, тогава мереологичните релации, като част-от, припокриване и отстъпване, могат да се дефинират формално с Булеви формули.

Мереологията, обаче, е слаба система по отношение на изразителност относно границата на регионите. Например, в мереологията не може да се направи разлика между припокриване и (външен) контакт. За да се преодолеят тези недостатъци е нужно да се разшири мереологията. Това разширение се нарича *мереотопология* и се получава чрез добавяне на релации с топологичен характер.

$$\text{Мереотопология} = \text{Мереология} + \text{топологични релации.}$$

Релациите, които се добавят, обикновено са базирани на топологичния *контакт*. Така, получаваме и математическите модели на мереотопологията, като разширяваме Булевите алгебри с топологични релации и получаваме понятието контактни алгебри (виж [8], [10], [9], [41]).

$$\text{Контактна алгебра} = \text{Булева алгебра} + \text{контактна релация.}$$

Ето и формалната дефиниция, която отразява тази конструкция.

Дефиниция 1. Контактни алгебри *наричаме системи от вида* $(\underline{B}, \mathsf{C})$ *където* $\underline{B} = (B, 0, 1, ., +, *)$ *е неизродена Булева алгебра ('.' е Булевото умножение, '+' е Булевото събиране, а '$*$' е Булевото допълнение) и* C *е двуместна релация* *над B, удовлетворяваща следните условия:*

$$
\begin{aligned}
x \,\mathsf{C}\, y &\Longrightarrow x \neq 0 \;\&\; y \neq 0,\\
x \,\mathsf{C}\, y &\Longrightarrow y \,\mathsf{C}\, x,\\
x \,\mathsf{C}\, (y+z) &\Longleftrightarrow x \,\mathsf{C}\, y \text{ или } x \,\mathsf{C}\, z,\\
x.y \neq 0 &\Longrightarrow x \,\mathsf{C}\, y.
\end{aligned}
$$

Ако смятаме елементите на B за региони виждаме, че горната дефиниция ги използва като базови обекти без да предполага, че те се състоят от точки. Така, ще считаме горната дефиниция за обща *безточкова* дефиниция на контактни алгебри. Стандартни модели на контактните алгебри са топологичните контактни алгебри. От всяко топологично пространство може да се построи контактна алгебра, която се състои от Булевата алгебра на регулярно затворените множества в пространството и релацията топологичен контакт. Построяването се прави по следния начин.

Нека $\mathbb{X} = (X, \tau)$ е топологично пространство, като $\mathbb{C}$ и $\mathbb{I}$ са операторите за затворена обвивка и вътрешност на множество. Първо, построяваме Булевата част от контактната алгебра. Носителят на алгебрата е:

$$RC(\mathbb{X}) = \{\ x \mid x \subseteq X, x = \mathbb{C}(\mathbb{I}(x))\ \}.$$

Дефинираме Булевата алгебра $\underline{B} = (RC(\mathbb{X}), 0, 1, ., +, *)$, като константите и операциите в нея се определят така:

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset,\\
1 &= \mathbb{X},\\
x.y &= \mathbb{C}(\mathbb{I}(x \cap y)),\\
x + y &= x \cup y,\\
x^* &= \mathbb{C}(\mathbb{X} \setminus x).
\end{aligned}
$$

Накрая, контактът между произволни регулярно затворени множества x и y се дефинира така:

$$x \,\mathsf{C}\, y \quad \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \quad x \cap y \neq \emptyset.$$

Лесно се проверява, че C удовлетворява условията от Дефиниция 1. Така имаме следния вид контактни алгебри

Дефиниция 2. *Контактна алгебра $(\underline{B}, \mathsf{C})$, построена по топологично пространство по гореописания начин, се нарича* топологична контактна алгебра.

Всяка топологична контактна алгебра е контактна алгебра (от общ вид). Обратното отношение е показано в следната теорема от [8].

Теорема 1. *За всяка контактна алгебра $(\underline{B}, \mathsf{C})$ съществува топологична контактна алгебра $(\underline{B}^t, \mathsf{C}^t)$ и изоморфно влагане от $(\underline{B}, \mathsf{C})$ в $(\underline{B}^t, \mathsf{C}^t)$.*

Ще разгледаме и още един метод за построяване на стандартни (точкови) контактни алгебри. Нека имаме релационна структура (X, R), където $X \neq \emptyset$ е множеството от всички точки. R е рефлексивна и симетрична двуместна релация над X, която ще интерпретираме като *релация на близост* между точките. Чрез нея ще дефинираме контакта. По всяка такава релационна структура може да се построи контактна алгебра по следния начин

Лема 1. *Нека (X, R) е структура с рефлексивна и симетрична релация R. Тогава $(\underline{B}, \mathsf{C})$ е контактна алгебра, където $\underline{B}$ е Булевата алгебра на подмножествата на X, а C е дефинирана за $x, y \subseteq X$:*

$$(\mathsf{C}_{\mathrm{def}}) \qquad x \mathrel{\mathsf{C}} y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad \exists a \in x, \exists b \in y, a \mathrel{\mathsf{R}} b.$$

Така, имаме друг тип стандартни контактни алгебри, които ще считаме като точково дефинирани контактни алгебри.

Дефиниция 3. *Контактна алгебра $(\underline{B}, \mathsf{C})$, построена по рефлексивна и симетрична релационна структура, се нарича* релационна контактна алгебра.

Както беше в случая с топологичните контактни алгебри, тук също имаме теорема, която показва дуалността между релационните контактни алгебри и общите безточкови контактни алгебри (за подробности виж [9]).

Теорема 2. *За всяка контактна алгебра $(\underline{B}, \mathsf{C})$ съществува релационна контактна алгебра $(\underline{B}^r, \mathsf{C}^r)$ и изоморфно влагане от $(\underline{B}, \mathsf{C})$ в $(\underline{B}^r, \mathsf{C}^r)$.*

Мереологията и мереотопологията често се използват за развиване на *регионални пространствени теории.* Една от най-популярните системи е Region Connection Calculus (RCC) представена от Рандъл, Чуи и Коун [38]. Две разпространени под-системи на RCC са системата на Егенхофер и Францоза RCC-8 от [11] и нейната мереологична редукция RCC-5. Логики, базирани на RCC-8, са изучени в [21] и [53]. Логики за RCC-5 могат да се намерят в [21] и [19]. За повече примери за пространствени теории могат да се погледнат [2], [52], [20], [12], [42], [43].

Когато се разглеждат подобни безточкови пространствени теории ([35], [47], [46]), е обичайно да се представя и дуално съответствие между безточковите системи и класически точкови системи. Едната посока от това съответствие е построяването на безточкова система по дадена точкова система. Обикновено това се прави като вземем множества от точки (региони), като основни обекти. Това считаме за стандартна дефиниция на безточковите системи. Другата посока от съответствието е като изходим от начална безточкова система, в която не разполагаме с точки, и реконструираме точките. Така получаваме точкова система от безточковата. Такива техники се наричат *теории за представяне.* Най-често те са обобщения или варианти на теорията на Стоун за представяне на Булеви алгебри и дистрибутивни решетки (виж [1]). В теориите за представяне се използват множества от региони за да се пресъздадат точките. Такива множества наричаме *абстрактни точки.* Всяка абстрактна точка, всъщност, е множеството от всички региони, на които тя би трябвало да принадлежи при точковата дефиниция. След реконструирането на точките се извършва предефиниране на регионите (с точкови дефиниции) и на релациите между тях (такива предефинирания се наричат още и *характеризации*).

2. Единен език за пространство и време

Изследванията на Уайтхед включват също и разсъждения за това, как трябва да се подходи към теорията на времето (виж [50], [51]). Неговите идеи са, че теорията на времето не може да бъде отделена от теорията на пространството и също, че времето трябва да се определя със същия безточков подход, както и пространството Така, получаваме понятието *безмоментно време.* Уайтхед също така казва и, че пространството и времето не трябва да се дефинират по отделно, ами трябва да се дефинират едновременно чрез обекти, които имат и пространствени и времеви характеристики.

Обичайните техники за получаване на комбинирани времево-пространствени системи не удовлетворяват изискванията на Уайтхед. Тук ще дадем няколко примера от [17] и [16]. Във всеки от тях имаме отделени езици за пространство и време, а също така времето не е дефинирано чрез безточков подход (обикновено се използва езика на линейната темпорална логика LTL; виж [3], [36], [22] и [23]).

В [17] са представени няколко времево-пространствени езика. Един от тях е езикът ST_0. В него се използват езикът на BRCC-8 (това е системата RCC-8, разширена с Булеви термове) за атомарни формули и върху тях се прилагат темпорални оператори от LTL. Не се позволява употребата на пространствени релации и операции от BRCC-8 върху темпорални формули. В [16] за такива езици е представена обща техника, която се нарича *темпорализиране* на дадена (пространствена) логика. Ако имаме пълна логика L (L може да е модална или съждителна логика или логика от първи ред) и $\mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}$ е темпоралната логика LTL, пълна относно някакъв клас T от потоци от време. Така, формираме нов език в който, както и при ST_0, не се позволява употребата на символи от L върху оператори since и until. Резултатът се нарича *темпорализация на L* и се означава с $\mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}(\mathrm{L})$. В [16] е показано, че $\mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}(\mathrm{L})$ е консервативно разширение на L и също, че $\mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}(\mathrm{L})$ запазва пълнотата и разрешимостта на L. Така, имаме че $\mathrm{ST}_0 = \mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}(\mathrm{BRCC\text{-}8})$.

В [47] и [48] е представена техника за построяване на времево-пространствени езици, която е по-близка до идеите на Уайтхед. Там се разглежда множеството от всички времеви моменти I и за всеки момент се разглежда състоянието на пространството в този момент. След това операциите и релациите в новия език се дефинират върху цялото множество от състояния на пространството, без дефинициите да зависят от конкретни моменти $i \in I$ (така моментите не участват явно в езика). Ето и формалната конструкция от [47]

Дефиниция 4. *Нека $I \neq \emptyset$ и за всяко $i \in I$, $(\underline{B}_i, \mathsf{C}_i)$ е контактна алгебра. Нека $\underline{B}$ е подалгебра на $\prod_{i \in I} \underline{B}_i$ (тъй като $\underline{B}_i$ са Булеви алгебри, то тогава $\prod_{i \in I} \underline{B}_i$ също е Булева алгебра). Тогава за всеки $x, y \in \underline{B}$:*

$$x \,\mathsf{c}\, y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad \forall i \in I, x_i \,\mathsf{C}_i\, y_i \qquad \text{стабилен контакт,}$$

$$x \,\mathsf{C}\, y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad \exists i \in I, x_i \,\mathsf{C}_i\, y_i \qquad \text{нестабилен контакт.}$$

$(\underline{B}, \mathsf{c}, \mathsf{C})$ *наричаме* стандартна динамична контактна алгебра.

Обектите, с които работим в новия език, са вектори x от $\prod_{i \in I} \underline{B}_i$, които интерпретираме като динамични региони или като *истории* на регионите. Така, операциите от $\underline{B}$ работят върху историите на регионите и по този начин работят върху целия период от време, вместо да се дефинират за конкретни състояния на региони в дадени моменти. Същото важи и за двете версии на релациите - *стабилни* и *нестабилни* релации. В [47] и [48] се използват още и означенията $\mathsf{c}{=}\mathsf{C}^{\forall}$ и $\mathsf{C}{=}\mathsf{C}^{\exists}$.

Също както и за статичните контактни алгебри, тук имаме обща безточкова дефиниция на динамичните контактни алгебри и също имаме съответната кореспонденция, в Стоунов стил, между общите безточкови и стандартните алгебри (виж [47]).

Дефиниция 5. $(\underline{B}, \mathsf{c}, \mathsf{C}) = (B, 0, 1, ., +, *, \mathsf{c}, \mathsf{C})$ *се нарича* динамична контактна алгебра *ако* $(\underline{B}, \mathsf{C})$ *е контактна алгебра и* c *е двуместна релация за която:*

$$1 \,\mathsf{c}\, 1,$$
$$0 \,\overline{\mathsf{c}}\, 0,$$
$$x \,\mathsf{c}\, y \;\&\; z \,\overline{\mathsf{c}}\, t \Longrightarrow x.z^* \,\mathsf{C}\, y.z^* \text{ или } x.t^* \,\mathsf{C}\, y.t^*.$$

Теорема 3. *За всяка динамична контактна алгебра* $(\underline{B}, \mathsf{c}, \mathsf{C})$ *съществува изоморфна на нея стандартна динамична контактна алгебра* $(\underline{B}^s, \mathsf{c}^s, \mathsf{C}^s)$.

Тази конструкция за стабилни и нестабилни релации ще се използва и за релационните езици в текущата дисертация. Така, за всяка статична релация R ще дефинираме два варианта по следния начин:

$$aR^{\forall}b \quad \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \quad \forall i \in I, a_i R_i b_i,$$
$$aR^{\exists}b \quad \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \quad \exists i \in I, a_i R_i b_i,$$

където a и b са динамични региони, а I е множеството от всички моменти от време. Тъй като в езика ще работим само със стабилните и нестабилни релации имаме, че моментите от времето са скрити в конструкцията на релациите. Така, те не се използват директно в езика и можем да считаме, че развитите теории са "безмоментни". Това води до усложняване на теориите за представяне, тъй като сега вече ще трябва да се реконструират и времевите моменти (ще дефинираме абстрактни моменти), освен че се налага да се реконструират пространствените точки.

Гореописаната конструкция е една от най-простите възможни, за дефиниране на стабилни и нестабилни релации. Алтернативно, можем да използваме изрази/формули за моментите от време, които да са по-сложни от еднократното квантифициране над I. Например, можем да използваме модален подход (описан и в [46]) за да дефинираме стабилност и нестабилност:

$$aR^{\forall}b \quad \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \quad \Box(aRb),$$
$$aR^{\exists}b \quad \stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} \quad \Diamond(aRb).$$

При този подход имаме, че текущата конструкция съответства на S5 модалност. Така, всъщност, нямаме подредба между моментите от времето. Можем да дефинираме динамични релации и чрез по-сложни темпорални оператори, които използват подредби на времето - линейно време, разклоняващо се време, др. (виж [48]), модалната логика S4 (разгледана като темпорална логика в [18]). Т.е. можем да използваме модалност, различна от S5. В текущата дисертация се използва само S5.

3. Релационни езици

В тази секция ще отделим внимание на последното изискване към текущото изследване - да развиваме само системи с релационни езици. Случаи, в които езика не е само релационен, са изучени в [47], [48] и [46]. Там, чрез конструкцията от предишната секция, се разглеждат динамични версии на езика на контактните алгебри. Тук ще преминем към релационни езици по няколко причини.

Релационните системи за по-подходящи за Крипке семантика за модални логики (виж [21] и [35] за такива модални логики за мереологични и мереотопологични системи), а също и за интерпретиране на дескриптивни логики. Също така има чисто философски аргументи срещи използване на функционални операции в езика. Те гласят, че функциите не винаги могат да са дефинирани върху всички региони и в някои случаи резултатът от функцията не е естествен обект и може и да не съществува. В този случай ще се прибегне до работа с частични функции и тогава релационните езици са по-подходящи. Също така при моделирането на естествени процеси и събития, може да се наложи да прибегнем към частични функции. В текущата дефиниция използва Декартови произведения от статични системи и работим с вектори (които наричаме истории). В реалността не всички вектори може да са съществуващи обекти. Това ще доведе то ограничаване на множеството от векторите, което може да наруши тоталността на функциите.

Разбира се, прибягването до чисто релационни езици си има цена. Както ще се види в Част II, Секция 1, релационните езици са строго по-слаби (като изразителна способност) от *алгебричните* езици (Булеви алгебри, контактни алгебри, динамични контактни алгебри). Това води до значително усложнение на много от конструкциите и доказателствата. Най-голям ефект има върху теорията за представяне на динамичните мереотопологични и мереологични релации. Също това, че се отказваме от Булевите функционални операции, води до увеличаване на броя на условията с които аксиоматизираме релациите. От това следва и значително утежняване на някои от доказателствата. Например, за копиращите и филтриращи техники при модалните логики.

До края на секцията ще разгледаме пример за прехода от алгебричен език (т.е. език с функции и константи) към релационен език. Ще разгледаме как се прави това за (статичните) мереотопология и мереология (за подробности и доказателствата да се гледа [35]). Започваме от езиците на контактни и Булеви алгебри и получаваме чисто релационни мереотопологичен и мереологичен езици. Ето дефинициите на релационните структури, за тези езици.

Дефиниция 6. *Нека* $(B, 0, 1, ., +, *, \mathsf{C})$ *е контактна алгебра. Тогава релационната структура* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ *наричаме* (статична) стандартна мереотопологична структура *ако* $W \neq \emptyset$, $W \subseteq B$, C *е релацията контакт, а* $\leq$, O *и* U *са двуместни релации над* W*, които се дефинират така*

$$\begin{aligned} x \leq y &\quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad x.y* = 0, \\ x \,\mathsf{O}\, y &\quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad x.y \neq 0, \\ x \,\mathsf{U}\, y &\quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad x + y \neq 1. \end{aligned}$$

Дефиниция 7. *Нека* $(B, 0, 1, ., +, *)$ *е Булева алгебра. Тогава релационната структура* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *наричаме* (статична) стандартна мереологична структура *ако* $W \neq \emptyset$, $W \subseteq B$ *и* $\leq$, O *и* U *са двуместни релации над* W*, които* *се дефинират така*

$$x \leq y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad x.y* = 0,$$
$$x \mathsf{O} y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad x.y \neq 0,$$
$$x \mathsf{U} y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad x + y \neq 1.$$

За да аксиоматизираме (определим чрез формули от първи ред) тези структури ще използваме следните условия.

(M1)	$x \leq x$		
(M2)	$x \leq y \,\&\, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$	(M3)	$x \leq y \,\&\, y \leq x \Longrightarrow x = y$
(M4)	$x \mathsf{O} y \Longrightarrow y \mathsf{O} x$	(M8)	$x \mathsf{U} y \Longrightarrow y \mathsf{U} x$
(M5)	$x \mathsf{O} y \Longrightarrow x \mathsf{O} x$	(M9)	$x \mathsf{U} y \Longrightarrow x \mathsf{U} x$
(M6)	$x \mathsf{O} y \,\&\, y \leq z \Longrightarrow x \mathsf{O} z$	(M10)	$x \leq y \,\&\, y \mathsf{U} z \Longrightarrow x \mathsf{U} z$
(M7)	$x \mathsf{O} x$ или $x \leq y$	(M11)	$y \mathsf{U} y$ или $x \leq y$
(M12)	$x \leq y$ или $x \mathsf{O} z$ или $y \mathsf{U} z$	(M13)	$x \mathsf{O} x$ или $x \mathsf{U} x$
(C1)	$x \mathsf{C} y \Longrightarrow y \mathsf{C} x$	(C3)	$x \mathsf{C} y \Longrightarrow x \mathsf{O} x$
(C2)	$x \mathsf{O} y \Longrightarrow x \mathsf{C} y$	(C4)	$x \mathsf{C} y \,\&\, y \leq z \Longrightarrow x \mathsf{C} z$

Така, получаваме следните общи дефиниции на мереотопологични и мереологични структури.

Дефиниция 8. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ *е релационна структура, такава че* $W \neq \emptyset$. *Тогава* $\underline{W}$ *наричаме* (статична) мереотопологична структура *ако удовлетворява* (M1) − (M13), (C1) − (C4).

Дефиниция 9. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *е релационна структура, такава че* $W \neq \emptyset$. *Тогава* $\underline{W}$ *наричаме* (статична) мереологична структура *ако удовлетворява* (M1) − (M13).

Теорията за представяне за мереотопологични и мереологични структури показва, че всяка обща мереотопологична структура може да се представи като стандартна мереотопологична структура и също, че всяка обща мереологична структура може да се представи като стандартна. За да постигнем това, трябва да се реконструират точките в общите структури и чрез тях да дефинираме стандартни структури. За целта се използват варианти на теоретико-множествените понятия *(прости) филтри* и *(прости) идеали*. Именно, простите филтри ще служат като *абстрактни пространствени точки*.

Дефиниция 10. *Нека* $\underline{W}$ *е мереотопологична или мереологична структура и нека* $F \subseteq W$.

- *F се нарича* растящо множество *ако за всички* $x, y \in W$, $x \in F$ *и* $x \leq y$ *дават* $y \in F$;
- *F се нарича* филтър *ако F е растящо множество и за всички* $x, y \in W$ *имаме, че от* $x \in F$ *и* $y \in F$ *следва* $x \mathsf{O} y$;
- *F се нарича* прост филтър *ако F е филтър и за всички* $x, y \in W$ *имаме, че от* $x \notin F$ *и* $y \notin F$ *следва* $x \mathsf{U} y$.

Простите филтри ще наричаме още абстрактни пространствени точки *или само* абстрактни точки.

Нека $I \subseteq W$. *Тогава дуалното понятие за (прост) идеал се дефинира така:*

- *I се нарича* намаляващо множество *ако за всички $x, y \in W$, от $y \in I$ и $x \leq y$ следва $x \in I$;*
- *I се нарича* идеал *ако I е намаляващо множество и за всички $x, y \in W$ имаме, че от $x \in I$ и $y \in I$ следва $x \mathsf{U} y$;*
- *I се нарича* прост идеал *ако I е идеал и за всички $x, y \in W$ имаме, че от $x \notin I$ и $y \notin I$ следва $x \mathsf{O} y$.*

Означение. *Множеството от всички абстрактни точки за дадена структура $\underline{W}$ бележим с $AP(\underline{W})$.*

Дефиниция 11. *Нека $\underline{W}$ е мереотопологична структура. Дефинираме релацията R върху филтрите в тази структура, така:*

$$F \mathsf{R} G \quad \longleftrightarrow \quad \forall x \in F, \forall y \in G, x \mathsf{C} y.$$

R е и релация над простите филтри (т.е. абстрактните точки). Така имаме че, $(AP(\underline{W}), \mathsf{R})$ е рефлексивна и симетрична релационна структура, която може да се използва за да се предефинират релациите (това се прави чрез релационната контактна алгебра, породена от $(AP(\underline{W}), \mathsf{R})$).

Твърдение 1 (Статична характеризация)**.** *Нека $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ е мереотопологична структура и $x, y \in W$. Тогава*

$(\leq)$ $\qquad x \leq y \quad \longleftrightarrow \quad \forall F \in AP(\underline{W}), x \in F \Longrightarrow y \in F;$

(O) $\qquad x \mathsf{O} y \quad \longleftrightarrow \quad \exists F \in AP(\underline{W}), x \in F \,\&\, y \in F;$

(U) $\qquad x \mathsf{U} y \quad \longleftrightarrow \quad \exists F \in AP(\underline{W}), x \notin F \,\&\, y \notin F;$

(C) $\qquad x \mathsf{C} y \quad \longleftrightarrow \quad \exists F, G \in AP(\underline{W}), x \in F \,\&\, y \in G \,\&\, F \mathsf{R} G.$

Така, получаваме следната теорема за представяне (доказана в [35]) на мереотопологичните структури от Дефиниция 8 като мереотопологични структури, дефинирани с контактни алгебри (виж Дефиниция 6)

Теорема 4. *За всяка мереотопологична структура $\underline{W}$ съществува контактна алгебра $(\underline{B}, \mathsf{C})$ и изоморфно влагане h от $\underline{W}$ в $(\underline{B}, \mathsf{C})$. Т.е. h е инективна функция от W (носителя на $\underline{W}$) в B (носителя на $(\underline{B}, \mathsf{C})$), за което:*

$$\begin{aligned} x \mathsf{C} y \quad &\longleftrightarrow \quad h(x) \mathsf{C} h(y), \\ x \leq y \quad &\longleftrightarrow \quad h(x).h(y)^* = 0, \\ x \mathsf{O} y \quad &\longleftrightarrow \quad h(x).h(y) \neq 0, \\ x \mathsf{U} y \quad &\longleftrightarrow \quad h(x) + h(y) \neq 1. \end{aligned}$$

Основната стъпка в доказателството на тази теорема е използването на **Статичната Характеризация**. Вариант на тази теорема, показва и съответствието между мереологични структури и Булеви алгебри.

Ако в горната теорема използваме топологични контактни алгебри (от Дефиниция 2), тогава получаваме следната

Теорема 5. *За всяка мереотопологична структура $\underline{W}$ съществува* топологична *контактна алгебра $(\underline{B}, \mathsf{C})$ и изоморфно влагане h от $\underline{W}$ в $(\underline{B}, \mathsf{C})$.*

Тази теорема показва, че релациите от Дефиниция 8 наистина имат топологичен характер и употребата на определението *мереотопологични* за тях е оправдано.

Част II. Динамична релационна мереотопология и мереология

1. Динамични мереотопологични и мереологични релации

В тази част ще дефинираме езиците на динамичните мереотопологични релации и на динамичните мереологични релации. По подобие на статичния случай, даваме два вида дефиниции за структури с динамични релации. Първият тип се счита за стандартен, тъй като в тези дефиниции пространството и/или времето може да са точкови. Вторият тип ще бъде обща дефиниция, която представя структурите като произволни релационни структури, удовлетворяващи определени условия от първи ред (подобно на Дефиниция 8).

Стандартната дефиниция, която следва, използва множество от статични структури за да дефинира динамичните мереотопологични релации. Всяка от тези структури се счита като моментното състояние на пространството в даден момент от времето. Така, времето в тази дефиниция може да се счита като *точково/моментно време*.

Дефиниция 12. *Нека I е непразно множество от моменти от времето. За всеки момент $i \in I$, нека $\underline{W}_i = (W_i, \leq_i, \mathsf{O}_i, \mathsf{U}_i, \mathsf{C}_i)$ е статична мереотопологична структура (виж Дефиниция 8). Нека $W \subseteq \prod_{i \in I} W_i$ е такова, че $W \neq \emptyset$. Тогава стабилните и нестабилни мереотопологични релации се дефинират за $x, y \in W$ така:*

$$
\begin{array}{rclr}
x \leq y & \stackrel{def}{\longleftrightarrow} & \forall i \in I, x_i \leq_i y_i & \text{стабилна част-от,} \\
x \,\mathsf{o}\, y & \stackrel{def}{\longleftrightarrow} & \forall i \in I, x_i \,\mathsf{O}_i\, y_i & \text{стабилно припокриване,} \\
x \,\mathsf{u}\, y & \stackrel{def}{\longleftrightarrow} & \forall i \in I, x_i \,\mathsf{U}_i\, y_i & \text{стабилно отстъпване,} \\
x \,\mathsf{c}\, y & \stackrel{def}{\longleftrightarrow} & \forall i \in I, x_i \,\mathsf{C}_i\, y_i & \text{стабилен контакт,} \\
x \preceq y & \stackrel{def}{\longleftrightarrow} & \exists i \in I, x_i \leq_i y_i & \text{нестабилна част-от,} \\
x \,\mathsf{O}\, y & \stackrel{def}{\longleftrightarrow} & \exists i \in I, x_i \,\mathsf{O}_i\, y_i & \text{нестабилно припокриване,} \\
x \,\mathsf{U}\, y & \stackrel{def}{\longleftrightarrow} & \exists i \in I, x_i \,\mathsf{U}_i\, y_i & \text{нестабилно отстъпване,} \\
x \,\mathsf{C}\, y & \stackrel{def}{\longleftrightarrow} & \exists i \in I, x_i \,\mathsf{C}_i\, y_i & \text{нестабилен контакт.}
\end{array}
$$

$\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \mathsf{c}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ *наричаме* стандартна динамична мереотопологична структура *или просто* стандартна структура.

Означение. *Допълненията на осемте стабилни и нестабилни мереотопологични релации ще означаваме с $\nleq$, $\overline{\mathsf{o}}$, $\overline{\mathsf{u}}$, $\overline{\mathsf{c}}$, $\npreceq$, $\overline{\mathsf{O}}$, $\overline{\mathsf{U}}$ и $\overline{\mathsf{C}}$.*

Използвайки означенията $R^\forall$ и $R^\exists$ от Част I имаме следните съответствия

$$
\leq = \leq^\forall, \quad \mathsf{o} = \mathsf{O}^\forall, \quad \mathsf{u} = \mathsf{U}^\forall, \quad \mathsf{c} = \mathsf{C}^\forall,
$$
$$
\preceq = \leq^\exists, \quad \mathsf{O} = \mathsf{O}^\exists, \quad \mathsf{U} = \mathsf{U}^\exists, \quad \mathsf{C} = \mathsf{C}^\exists .
$$

Съответно, имаме и дефиниция за динамични мереотопологични структури, в чийто език не фигурират релациите c и C.

Дефиниция 13. *Нека I е непразно множество от моменти от времето. За всеки момент $i \in I$, нека $\underline{W}_i = (W_i, \leq_i, \mathsf{O}_i, \mathsf{U}_i)$ е статична мереологична* *структура (виж Дефиниция 9). Нека $W \subseteq \prod_{i\in I} W_i$ е такова, че $W \neq \emptyset$. Тогава стабилните и нестабилни мереологични релации се дефинират за $x, y \in W$ така:*

$$x \leq y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad \forall i \in I, x_i \leq_i y_i \qquad \text{стабилна част-от,}$$

$$x \mathsf{o} y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad \forall i \in I, x_i \mathsf{O}_i y_i \qquad \text{стабилно припокриване,}$$

$$x \mathsf{u} y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad \forall i \in I, x_i \mathsf{U}_i y_i \qquad \text{стабилно отстъпване,}$$

$$x \preceq y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad \exists i \in I, x_i \leq_i y_i \qquad \text{нестабилна част-от,}$$

$$x \mathsf{O} y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad \exists i \in I, x_i \mathsf{O}_i y_i \qquad \text{нестабилно припокриване,}$$

$$x \mathsf{U} y \quad \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \quad \exists i \in I, x_i \mathsf{U}_i y_i \qquad \text{нестабилно отстъпване.}$$

$\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *наричаме* стандартна динамична мереологична структура.

Така, имаме стандартни точкови дефиниции за динамичните мереотопологични и мереологични структури. За да дадем общи безточкови дефиниции, имаме нужда от условия от първи ред, с които да аксиоматизираме динамичните релации. Ще използваме условията (M1) – (M13), (C1) – (C4) от статичните структури и ще разширим това множество с още условия за новите релации. Ето въпросните нови условия и общи дефиниции.

(M14) $x \preceq x$

(M15) $x \leq y \,\&\, y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$

(M16) $x \preceq y \,\&\, y \leq z \Longrightarrow x \preceq z$

(M17) $x \mathsf{o} y \Longrightarrow y \mathsf{o} x$

(M18) $x \mathsf{o} y \Longrightarrow x \mathsf{o} x$

(M19) $x \mathsf{o} y \,\&\, y \leq z \Longrightarrow x \mathsf{o} z$

(M20) $x \mathsf{o} y \,\&\, y \preceq z \Longrightarrow x \mathsf{O} z$

(M21) $x \mathsf{o} x$ или $x \preceq y$

(M22) $x \mathsf{o} z$ или $y \mathsf{U} z$ или $x \preceq y$

(M23) $x \mathsf{u} y \Longrightarrow y \mathsf{u} x$

(M24) $x \mathsf{u} y \Longrightarrow x \mathsf{u} x$

(M25) $x \leq y \,\&\, y \mathsf{u} z \Longrightarrow x \mathsf{u} z$

(M26) $x \preceq y \,\&\, y \mathsf{u} z \Longrightarrow x \mathsf{U} z$

(M28) $y \mathsf{u} y$ или $x \preceq y$

(M27) $x \mathsf{O} z$ или $y \mathsf{u} z$ или $x \preceq y$

(M29) $x \mathsf{o} x$ или $x \mathsf{U} x$

(M30) $x \mathsf{O} x$ или $x \mathsf{u} x$

(C5) $x \mathsf{c} y \Longrightarrow y \mathsf{c} x$

(C6) $x \mathsf{o} y \Longrightarrow x \mathsf{c} y$

(C7) $x \mathsf{c} y \Longrightarrow x \mathsf{o} x$

(C8) $x \mathsf{c} y \,\&\, y \leq z \Longrightarrow x \mathsf{c} z$

(C9) $x \mathsf{c} y \,\&\, y \preceq z \Longrightarrow x \mathsf{C} z$

(C10) $z \mathsf{c} t \,\&\, x \overline{\mathsf{u}} y \,\&\, z \overline{\mathsf{O}} y \,\&\, t \overline{\mathsf{O}} x \Longrightarrow x \mathsf{C} y$

Дефиниция 14. *Нека $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \mathsf{c}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ е релационна структура, такава че $W \neq \emptyset$. Тогава $\underline{W}$ наричаме* динамична мереотопологична структура *(или просто* динамична структура*) ако удовлетворява* (M1) – (M30), (C1) – (C10).

Дефиниция 15. *Нека $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ е релационна структура, такава че $W \neq \emptyset$. Тогава $\underline{W}$ наричаме* динамична мереологична структура *ако удовлетворява* (M1) – (M30).

Така, ще работим със следните два основни езика:

- езикът на *стабилните и нестабилни мереотопологични релации*, който се състои от $\leq$, o, u, c, $\preceq$, O, U и C;
- езикът на *стабилните и нестабилни мереологични релации*, който се състои от $\leq$, o, u, $\preceq$, O и U.

Първият език ще бъде означаван на места с DMt, за краткост, а вторият език ще се означава с DM. При нужда, езикът на статичните мереотопологични релации ще се означава с Mt, докато означението за езика на статичните мереологични релации ще е просто M. Що се отнася до изразителността на тези езици, имаме следни включвания:

$$\mathrm{M} \subset \mathrm{Mt}, \mathrm{DM} \subset \mathrm{DMt}.$$

Например, $\mathrm{M} \subset \mathrm{Mt}$ означава, че изразите, които могат да се запишат чрез езика M, са собствено подмножество на тези, които могат да се запишат чрез Mt.

Следващите две подсекции са предназначени за изследването на изразителността на езиците DMt и DM. За тази цел ще ги сравним с някои от езиците, разгледани в увода.

1.1. **Сравнение с динамичните контактни алгебри.**

Езикът на динамичните контактни алгебри ще означаваме с DCA. Релациите c и C са част и от DMt и от DCA (в DCA те са означени с $\mathsf{C}^{\forall}$ и $\mathsf{C}^{\exists}$). За останалите релации от DMt имаме следната

Лема 2. *Релации $\leq$, o ,u, $\preceq$, O и U са определими в DCA.*

Така, получаваме резултата $\mathrm{DM} \subset \mathrm{DMt} \subseteq \mathrm{DCA}$. За да проверим обратното включване $\mathrm{DCA} \subseteq \mathrm{DMt}$ ще покажем следната

Лема 3. *Константите 0 и 1 и Булевото допълнение * са (частично) определими в DMt. Булевите умножение . и събиране $+$ не са определими.*

Така, получаваме крайния резултат

Следствие 1. *Езиците на динамичните мереотопологични и мереологични релации са собствени подезици на езика на динамичните контактни алгебри. Т.е.*

$$DM \subset DMt \subset DCA.$$

1.2. **Сравнение с темпорализираната теория на статичната мереотопология $\mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}$(Mt).**

Нека разгледаме теорията на статичната мереотопология с език Mt и нейната темпорализация $\mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}(\mathrm{Mt})$. S5 модалността е изразима в езика на $\mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}$. Така получаваме, че релациите от DM и DMt са определими в $\mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}(\mathrm{Mt})$. Оператори since $\mathcal{S}$ и until $\mathcal{U}$ не са изразими с S5, обаче. Така, имаме следния сравнителен резултат

Твърдение 2. *Езиците DM и DMt са собствени подезици на езика $\mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}(Mt)$, който на свой ред е собствен подезик на ST_0 (тъй като $ST_0 = \mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}(BRCC\text{-}8)$).*

$$DM \subset DMt \subset \mathcal{TL}_{\mathcal{SU}}(Mt) \subset ST_0.$$

2. Теория за представяне на динамичните мереотопологични релации

Целта е да покажем, че всяка динамична структура може да се представи като (изоморфна на) стандартна. За да постигнем това ще развием още едно обобщение на техниката на Стоун. Статичната теория за представяне от Част I позволява да се представят статичните структури. Така, можем да използваме абстрактните точки (Дефиниция 10 и за динамичните структури. За да реконструираме моментите от времето, ще използваме специални множества от пространствени точки. Всяко такова множество, всъщност, ще представлява множеството от всички пространствени точки, които съществуват в този момент от времето. По този начин, реконструираме всички времеви моменти за дадена динамична структура и след това от всеки от тях реконструираме по една статична структура. Накрая, използваме тези статични структури за да дефинираме стандартна динамична структура.

Дефиниция 16. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \mathsf{c}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ *е динамична мереотопологична структура. Нека* $\mathcal{F} \subseteq AP(\underline{W})$ *е такова, че* $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *и* $\mathcal{R}$ *е рефлексивна и симетрична двуместна релация над* $\mathcal{F}$*. Тогава релационната система* $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ *наричаме* абстрактен момент от времето *(или просто* абстрактен момент*) ако* $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ *удовлетворява следните условия за всички* $x, y \in W$*:*

(1) от $x \not\preceq y$ *следва* $\exists F \in \mathcal{F}, x \in F \ \&\ y \notin F$*;*
(2) от $x \,\mathsf{o}\, y$ *следва* $\exists F \in \mathcal{F}, x \in F \ \&\ y \in F$*;*
(3) от $x \,\mathsf{u}\, y$ *следва* $\exists F \in \mathcal{F}, x \notin F \ \&\ y \notin F$*;*
(4) от $x \,\mathsf{c}\, y$ *следва* $\exists F, G \in \mathcal{F}, x \in F \ \&\ y \in G \ \&\ F \,\mathcal{R}\, G$*;*

и също така за всички $F, G \in \mathcal{F}$*:*

(5) $F \,\mathcal{R}\, G$ *дава* $F \,\mathsf{R}\, G$ *(т.е.* $\mathcal{R}$ *е подрелация на* R*).*

Означение. *Множеството от всички абстрактни моменти за* $\underline{W}$ *ще означаваме с* $AM(\underline{W})$*.*

Така, като имаме понятията за абстрактни пространствени точки и абстрактни времеви моменти можем да характеризираме и динамичните мереотопологични релации, както следва

Твърдение 3 (Динамична Характеризация)**.** *За всяка динамична структура* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \mathsf{c}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ *и за всеки* $x, y \in W$ *следните еквивалентности са в сила:*

$$(\leq) \quad x \leq y \quad \longleftrightarrow \quad \forall (\mathcal{F}, \mathcal{R}) \in AM(\underline{W}), \forall F \in \mathcal{F}, x \in F \Longrightarrow y \in F;$$
$$(\mathsf{o}) \quad x \,\mathsf{o}\, y \quad \longleftrightarrow \quad \forall (\mathcal{F}, \mathcal{R}) \in AM(\underline{W}), \exists F \in \mathcal{F}, x \in F \ \&\ y \in F;$$
$$(\mathsf{u}) \quad x \,\mathsf{u}\, y \quad \longleftrightarrow \quad \forall (\mathcal{F}, \mathcal{R}) \in AM(\underline{W}), \exists F \in \mathcal{F}, x \notin F \ \&\ y \notin F;$$
$$(\mathsf{c}) \quad x \,\mathsf{c}\, y \quad \longleftrightarrow \quad \forall (\mathcal{F}, \mathcal{R}) \in AM(\underline{W}), \exists F, G \in \mathcal{F}, x \in F \ \&\ y \in G \ \&\ F \,\mathcal{R}\, G;$$
$$(\preceq) \quad x \preceq y \quad \longleftrightarrow \quad \exists (\mathcal{F}, \mathcal{R}) \in AM(\underline{W}), \forall F \in \mathcal{F}, x \in F \Longrightarrow y \in F;$$
$$(\mathsf{O}) \quad x \,\mathsf{O}\, y \quad \longleftrightarrow \quad \exists (\mathcal{F}, \mathcal{R}) \in AM(\underline{W}), \exists F \in \mathcal{F}, x \in F \ \&\ y \in F;$$
$$(\mathsf{U}) \quad x \,\mathsf{U}\, y \quad \longleftrightarrow \quad \exists (\mathcal{F}, \mathcal{R}) \in AM(\underline{W}), \exists F \in \mathcal{F}, x \notin F \ \&\ y \notin F;$$
$$(\mathsf{C}) \quad x \,\mathsf{C}\, y \quad \longleftrightarrow \quad \exists (\mathcal{F}, \mathcal{R}) \in AM(\underline{W}), \exists F, G \in \mathcal{F}, x \in F \ \&\ y \in G \ \&\ F \,\mathcal{R}\, G.$$

Чрез **Динамичната Характеризация** се доказват следните теореми.

Теорема 6 (Теорема за влагане)**.** *Нека* $\underline{W}^d = (W^d, \leq^d, \mathsf{o}^d, \mathsf{u}^d, \mathsf{c}^d, \preceq^d, \mathsf{O}^d, \mathsf{U}^d, \mathsf{C}^d$ $)$ *е динамична структура. Тогава съществува стандартна структура* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \mathsf{c}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ *и изоморфно влагане* h *от* $\underline{W}^d$ *в* $\underline{W}$.

Теорема 7 (Теорема за представяне)**.** *Нека* $\underline{W}^d$ *е динамична структура. Тогава съществува стандартна структура* $\underline{W}$ *изоморфна на* $\underline{W}^d$.

3. Теория за представяне на динамичните мереологични релации

В тази секция ще покажем теорията за представяне на динамичните мереологични структури. Тя е вариация на теорията за представяне от предната секция. Използва се същата дефиниция за абстрактни пространствени точки, но се дава нова дефиниция за абстрактните времеви моменти.

Дефиниция 17. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \mathsf{c}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ *е динамична мереологична структура. Нека* $\mathcal{F} \subseteq AP(\underline{W})$ *е такова, че* $\mathcal{F} \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ *наричаме* мереологичен абстрактен момент *ако* $\mathcal{F}$ *удовлетворява следните условия за всички* $x, y \in W$:

(1) от $x \not\preceq y$ *следва* $\exists F \in \mathcal{F}, x \in F \;\&\; y \notin F$;
(2) от $x \,\mathsf{o}\, y$ *следва* $\exists F \in \mathcal{F}, x \in F \;\&\; y \in F$;
(3) от $x \,\mathsf{u}\, y$ *следва* $\exists F \in \mathcal{F}, x \notin F \;\&\; y \notin F$.

Означение. *Множеството от всички мереологични абстрактни моменти за* $\underline{W}$ *ще означаваме с* $MAM(\underline{W})$.

Така, чрез новите понятия имаме следната характеризация на динамичните мереологични релации $\leq$, o, u, $\preceq$, O и U и две нови теореми за представяне.

Твърдение 4 (Динамична Характеризация)**.** *За всяка динамична мереологична структура* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *и за всеки* $x, y \in W$ *следните еквивалентности са в сила:*

$(\leq)\quad x \leq y \longleftrightarrow \forall \mathcal{F} \in MAM(\underline{W}), \forall F \in \mathcal{F}, x \in F \Longrightarrow y \in F;$

$(\mathsf{o})\quad x \,\mathsf{o}\, y \longleftrightarrow \forall \mathcal{F} \in MAM(\underline{W}), \exists F \in \mathcal{F}, x \in F \;\&\; y \in F;$

$(\mathsf{u})\quad x \,\mathsf{u}\, y \longleftrightarrow \forall \mathcal{F} \in MAM(\underline{W}), \exists F \in \mathcal{F}, x \notin F \;\&\; y \notin F;$

$(\preceq)\quad x \preceq y \longleftrightarrow \exists \mathcal{F} \in MAM(\underline{W}), \forall F \in \mathcal{F}, x \in F \Longrightarrow y \in F;$

$(\mathsf{O})\quad x \,\mathsf{O}\, y \longleftrightarrow \exists \mathcal{F} \in MAM(\underline{W}), \exists F \in \mathcal{F}, x \in F \;\&\; y \in F;$

$(\mathsf{U})\quad x \,\mathsf{U}\, y \longleftrightarrow \exists \mathcal{F} \in MAM(\underline{W}), \exists F \in \mathcal{F}, x \notin F \;\&\; y \notin F.$

Теорема 8 (Теорема за влагане)**.** *Нека* $\underline{W}^d = (W^d, \leq^d, \mathsf{o}^d, \mathsf{u}^d, \preceq^d, \mathsf{O}^d, \mathsf{U}^d)$ *е динамична мереологична структура. Тогава съществува стандартна динамична мереологична структура* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *и изоморфно влагане* h *от* $\underline{W}^d$ *в* $\underline{W}$.

Теорема 9 (Теорема за представяне)**.** *Нека* $\underline{W}^d$ *е динамична мереологична структура. Тогава съществува стандартна динамична мереологична структура* $\underline{W}$ *изоморфна на* $\underline{W}^d$.

Част III. Логики за динамични мереотопологични и мереологични релации

В тази част ще разгледаме логики базирани на стабилните и нестабилни мереотопологични и мереологични релации. Това са логики от първи ред, за които използваме динамични мереотопологични и мереологични структури като интерпретации, и модални логики за, където динамичните структури се използват за Крипке семантика.

1. Логики от първи ред

Езикът на тези логики е езика от първи ред без функционални символи, без константи и с предикатни символи за всяка от динамичните мереотопологични и мереологични релации и за формалното равенство. Стандартните динамични структури от Дефиниции 12 и 13 ще бъдат използвани за модели на логиката.

Ще разгледаме четири логики за динамични мереотопологични и мереологични релации:

- логиката от първи ред на динамичните мереотопологични релации;
- логиката от първи ред на динамичните мереологични релации;
- безкванторния фрагмент на логиката на динамичните мереотопологични релации;
- безкванторния фрагмент на логиката на динамичните мереологични релации.

Безкванторните фрагменти се разглеждат за да имаме разрешими алтернативи на основните логики от първи ред, които се оказват наследствено неразрешими. Чрез употреба на **Теоремата за представяне** можем да докажем пълнота за всяка от тези четири логики. Ето съответните теореми.

Теорема 10. *Логиката от първи ред на динамичните мереотопологични релации е пълна по отношение на* (M1) – (M30)*,* (C1) – (C10)*.*

Теорема 11. *Логиката от първи ред на динамичните мереологични релации е пълна по отношение на* (M1) – (M30)*.*

Теорема 12. *Безкванторният фрагмент на логиката на динамичните мереотопологични релации е пълен по отношение на* (M1) – (M30)*,* (C1) – (C10)*.*

Теорема 13. *Безкванторният фрагмент на логиката на динамичните мереологични релации е пълен по отношение на* (M1) – (M30)*.*

2. Модални логики

В тази секция ще разгледаме полимодалните логики за динамичните мереотопологични и мереологични релации. Първата логика има модални оператори за осемте стабилни и нестабилни мереотопологични релации, за обратните релации на $\leq$ и $\preceq$, а също и за универсалната релация, означена с A: $[\leq]$, $[\geq]$, $[\mathsf{o}]$, $[\mathsf{u}]$, $[\mathsf{c}]$, $[\preceq]$, $[\succeq]$, $[\mathsf{O}]$, $[\mathsf{U}]$, $[\mathsf{C}]$ и $[\mathsf{A}]$. За втората, мереологичната, модална логика имаме всички от изброените модалности, с изключение на $[\mathsf{c}]$ и $[\mathsf{C}]$. Дуалните оператори $\langle R\rangle$ се дефинират стандартно чрез $\neg[R]\neg$. Остатъкът от езика се състои от съждителни променливи и Булевите логически операции. Семантиката за тези модални логики е Крипке семантика, за която използваме динамичните структури от Дефиниции 12, 14, 13 и 15.

Почти всички условия от (M1) – (M30), (C1) – (C10) са модално определими със Салквистови формули. Единствения проблем идва от (M3) (условието за антисиметричност). За да се справим с това, заменяме (M3) с три други условия, които са модално определими:

(M3′) $x \, \overline{\mathsf{O}} \, x$ и $y \leq x \Longrightarrow x = y$

(M3″) $x \, \overline{\mathsf{U}} \, x$ и $x \leq y \Longrightarrow x = y$

(M3‴) $z \, \overline{\mathsf{O}} \, x$ и $z \, \overline{\mathsf{U}} \, y$ и $y \leq x \Longrightarrow x = y$

Те са следствия от (M1) – (M30), (C1) – (C10).

Така, получаваме нов набор от условия от първи ред за Крипке структурите за модалните логики и имаме нови дефиниции.

Дефиниция 18. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \mathsf{c}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$ *е релационна структура, такава че* $W \neq \emptyset$ *и* $\leq$, o, u, c, $\preceq$, O, U *и* C *са двуместни релации над* W. *Тогава* $\underline{W}$ *наричаме* обобщена динамична мереотопологична структура *(или просто* обобщена структура*) ако удовлетворява* (M1), (M2), (M3′) – (M3‴), (M4) – (M30), (C1) – (C10).

Дефиниция 19. *Нека* $\underline{W} = (W, \leq, \mathsf{o}, \mathsf{u}, \preceq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$ *е релационна структура, такава че* $W \neq \emptyset$ *и* $\leq$, o, u, $\preceq$, O *и* U *са двуместни релации над* W. *Тогава* $\underline{W}$ *наричаме* обобщена динамична мереологична структура *ако удовлетворява* (M1), (M2), (M3′) – (M3‴), (M4) – (M30).

За да аксиоматизираме модалните логики използваме модалните формули, които определят (M1), (M2), (M3′) – (M3‴), (M4) – (M30), (C1) – (C10). Също използваме формулите за обратните релации на $[\geq]$ и $[\succeq]$ и формулите, които определят универсалната релация като релация на еквивалентност, включваща останалите релации. Така, имаме следните теореми за пълнота на модалните логики.

Теорема 14. *Следните условия са еквивалентни за всяка формула* α:

(1) α *е теорема на мереотопологичната модална логика;*
(2) α *е вярна във всички обобщени структури;*
(3) α *е вярна във всички динамични структури;*
(4) α *е вярна във всички стандартни структури.*

Теорема 15. *Следните условия са еквивалентни за всяка формула* α:

(1) α *е теорема на мереологичната модална логика;*
(2) α *е вярна във всички обобщени динамични мереологични структури;*
(3) α *е вярна във всички динамични мереологични структури;*
(4) α *е вярна във всички стандартни динамични мереологични структури.*

(1) $\longleftrightarrow$ (2) се доказва чрез стандартната техника на породени канонични модели (виж [5], [6]). (2) $\longleftrightarrow$ (3) се доказва посредством копираща конструкция, която е усложнена вариация на булдозер конструкцията на Сегерберг от [39] (подобна техника се използва и в [35]). (3) $\longleftrightarrow$ (4) следва от теоремите за представяне.

Част IV. Разрешимост и неразрешимост на логики за динамични релации

Тук представяме някои резултати за разрешимостта на логиките от предната част. Показва се, че основните логики от първи-ред за динамични мереотопологични и мереологични релации са *наследствено неразрешими*. Това става чрез обща конструкция, която всъщност показва неразрешимост не само за тези логики, но и за цял клас логики, които имат релациите припокриване и контакт в езика си.

Показваме още, че безкванторните фрагменти на логиките от първи ред за динамични мереотопологични и мереологични релации са разрешими и изпълнимостта им е NP-пълна задача. Също показваме, че мереологичната модална логика е разрешима, както и две редукции на мереотопологичната модална логика. Разрешимостта на цялата мереотопологична модална логика все още е нерешена задача.

1. Наследствена неразрешимост на припокриването и контакта

Ще използваме метод, представен от Ершов, за да докажем наследствена неразрешимост на въпросните логики. Изхождаме от това, че логиката от първи ред на структурите с единствена симетрична и иррефлексивна релация $\Sigma^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{sym,irref}}$ е наследствено неразрешима. Тогава за всяка от логиките в следващото твърдение показваме, че има *относителна елементарна интерпретация* на $\Sigma^{\mathrm{fin}}_{\mathrm{sym,irref}}$ в класа от модели на логиката. Това дава, като резултат, наследствената неразрешимост (виж [13], [14] и [15]).

Твърдение 5. *За всяка от следните логики от първи ред, има относителна елементарна интерпретация на $\Sigma^{fin}_{sym,irref}$ в класа на моделите на логиката:*

- *логиката от първи ред на RCC-5 релациите;*
- *логиката от първи ред на статичните мереологични структури от вида $(W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U})$;*
- *логиката от първи ред на статичните структури $(W, \leq, \mathsf{O}, \mathsf{U}, \mathsf{C})$;*
- *логиката от първи ред на стандартните динамични структури;*
- *логиката от първи ред на стандартните динамични мереологични структури;*
- *логиката от първи ред на контактните алгебри;*
- *логиката от първи ред на динамичните контактни алгебри;*
- *логиката от първи ред на RCC-8 релациите.*

От това твърдение получаваме тези следствия.

Следствие 2. *Логиката от първи ред на RCC-5 релациите е наследствено неразрешима.*

Следствие 3. *Логиката от първи ред на статичните мереологични релации е наследствено неразрешима.*

Следствие 4. *Логиката от първи ред на статичните мереотопологични релации е наследствено неразрешима.*

Следствие 5. *Логиката от първи ред на динамичните мереотопологични релации е наследствено неразрешима.*

Следствие 6. *Логиката от първи ред на динамичните мереологични релации е наследствено неразрешима.*

Следствие 7. *Логиката от първи ред на контактните алгебри е наследствено неразрешима.*

Следствие 8. *Логиката от първи ред на динамичните контактни алгебри е наследствено неразрешима.*

Следствие 9. *Логиката от първи ред на RCC-8 релациите е наследствено неразрешима.*

2. Разрешимост на безкванторните фрагменти

За разрешимостта на двата безкванторни фрагменти имаме следното

Твърдение 6. *Безкванторните фрагменти на логиките от първи ред за динамични мереотопологични и мереологични релации имат свойството на полиномиални крайни модели.*

Така, получаваме следните резултати за разрешимост и сложност.

Следствие 10. *Безкванторният фрагмент на логиката от първи ред за динамични мереотопологични релации е разрешим.*

Следствие 11. *Изпълнимостта на безкванторния фрагмент на логиката от първи ред за динамични мереотопологични релации е NP-пълна задача.*

Следствие 12. *Безкванторният фрагмент на логиката от първи ред за динамични мереологични релации е разрешим.*

Следствие 13. *Изпълнимостта на безкванторния фрагмент на логиката от първи ред за динамични мереологични релации е NP-пълна задача.*

3. Разрешимост на модалните логики

По отношение на модалните логики имаме следното

Твърдение 7. *Две редукции на модалната логика на динамичните мереотопологични релации допускат филтрация. Това са фрагментът без модалността* c *и фрагментът без модалност* $\preceq$*. Също така модалната логика на динамичните мереологични релации допуска филтрация.*

Следствие 14. *Фрагментът на модалната логика на динамичните мереотопологични релации без модалност* c *е разрешим.*

Следствие 15. *Фрагментът на модалната логика на динамичните мереотопологични релации без модалност* $\preceq$ *е разрешим.*

Следствие 16. *Модалната логика на динамичните мереологични релации е разрешима.*

Част V. Заключение

В заключение ще направим кратко резюме на понятията и резултатите от тази дисертация. Основните характеристики на изучените пространствено-времеви системи са, че системите са: *базирани на региони* (т.е. те са *безточкови*), *релационни* и имат *единен пространствено-времеви език*. Тук също ще обобщим и нерешените задачи по темата.

Резултатите от изследването на динамичните релационни мереотопология и мереология са представени в три части - Части II, III и IV. Основните резултати са включени в Част II. Там се дава формална дефиниция на стабилните и нестабилни мереотопологически и мереологически релации. Дефинициите на стабилни и нестабилни релации ги представят като прости темпорални варианти на основните релации. Стабилните релации са в сила във всички моменти от времето, докато нестабилните са в сила в някои моменти. По този начин, *стабилна* и *нестабилна* се възприемат като синоними за *винаги* и *понякога*. Работим с два основни езика:

- мереотопологичен език, състоящ се от динамичните релации $\leq$, o, u, c, $\preceq$, O, U и C;
- мереологичен език, състоящ се от $\leq$, o, u, $\preceq$, O и U.

След това дефинираме релационни структури за тези езици. Имаме два основни типа структури. Структурите от първия тип наричаме *стандартни* и те се възприемат като *точкови* дефиниции за динамичните релации. В тези дефиниции използваме множества от мереотопологични структури (които са релационни алтернативи на топологични пространства) за да дефинираме първия език, а за втория език използваме мереологични структури (алтернативи на Булеви алгебри). Структурите от втория тип представляват *безточковите* дефиниции на динамичните релации. В тези дефиниции възприемаме елементите на структурите като атомарни обекти/региони, вместо като съставени от точки, и след това описваме действието на релациите върху тях чрез условия от първи ред.

Главният резултат за горните езици и структури е теорията за представяне, която дава дуална (в смисъл на Стоунова дуалност) кореспонденция между стандартните точкови и общите безточкови дефиниции на динамичните релации. Тази кореспонденция показва, че можем да възстановим точките и класическите дефиниции, базирани на тях, от безтоковите, алтернативни теории за времето и пространството. Това става чрез основните теореми които доказват, че всяка структура от втория, безточков тип може да се представи изоморфно като структура от първия, точков тип.

В Части III и IV се изучават аксиоматизациите и разрешимостта на логики от първи ред и модални логики за динамичните релации. Структурите от двата типа служат като интерпретации или като Крипке структури за тези логики. Пълнотата на тези логики се доказва главно чрез използване на теорията за представяне (и също чрез копиращи техники в модалния случай). Имаме че логиките от първи ред са *наследствено неразрешими* и че някои техни фрагменти (безкванторни фрагменти, модални логики, редукции на модалните логики) са разрешими. Тези резултати са показани в Таблица 1, където използваме съкращенията DMt и DM, за динамичните мереотопологични и мереологични релационни системи от Част II, Секция 1.

	Аксиоматизация	Разрешимост	Сложност
DMt от първи ред	Крайна	Насл. неразрешима	
Безкванторна DMt	Крайна	Разрешима	NP-пълна
Модална DMt	Крайна	?	
Модална DMt без c	-	Разрешима	?
Модална DMt без $\preceq$	-	Разрешима	?
DM от първи ред	Крайна	Насл. неразрешима	
Безкванторна DM	Крайна	Разрешима	NP-пълна
Модална DM	Крайна	Разрешима	?

Таблица 1. Резултати за логики за динамични мереотопологични и мереологични релации.

Нерешените задачи за динамични релационни мереотопология и мереология могат да се разделят в три основни теми. Всяка от тези теми представлява и обособена насока за бъдещи изследвания.

Първата насока е разширяването на езиците по отношение на изразните средства и за пространството и за времето. Както е показано в Част II, Секция 1, настоящите релационни системи са по-слаби от други формални системи, които работят с пространство и време (например, контактни алгебри и темпорализации на логики). Така, има нужда да се добавят още комбинирани пространствено-времеви релации към езика, така че да се достигнат, като изразителна способност, системи като контактни алгебри, $S4_u$, LTL и техни комбинации. Това може да стане както чрез добавяне на още пространствени релации към статичните релационни структури, така и чрез използване на по-сложни темпорални оператори, като *since*, *until*, оператори от интервалните темпорални логики или дори представяне на времето като мереотопологична/мереологична структура.

Втората тема за развитие е да се довършат изследванията на логиките за настоящите динамични мереотопологични и мереологични релации. Например, въпросът за разрешимостта на модалната логика на динамичните мереотопологични релации (DMt) все още няма отговор. Сложността на разрешимите модални логики и/или техни редукции също е неизвестна. Друга перспектива за бъдещи изследвания е да се търсят други разрешими фрагменти на логиките от първи ред, освен безкванторните фрагменти.

Накрая, последната тема за развитие е да се потърси по-обща теория за представяне на мереотопологичните и мереологичните релации. Неудобството на настоящите теории за представяне е, че липсва общо (може би теоритико-моделно) описание на представянето на релационни системи за такива релации. Вместо това за всяка нова система, потенциално, се налага да се доказва цялата теория за представяне отначало. Наличието на обща теория може значително да улесни както и разширяването на изразителната способност на езиците, така и да подобри (да намали сложността) на някои от доказателствата за резултатите за структури и логики за динамичните релации (например, доказателства на копиращи и филтриращи техники).

Декларация за оригиналност

Авторът заявява, че настоящата дисертация представлява оригинален научен труд. Дисертацията е подготвена самостоятелно и без помощ. Употребата на предишни резултати на други автори е отразена коректно, като съответните източници са цитирани според условията на авторските права за тях.

Пълен списък на резултатите, които представляват приноса на тази дисертация, е даден в следващата секция. Тези резултати са групирани в четири основни теми - *резултати за изразителност*, *резултати за представимост*, *резултати за аксиоматизации и пълнота* и *резултати за разрешимост и неразрешимост*.

Принос

Тук ще изброим основните развития и резултати в тази дисертация (от Част II, Част III и Част IV). Те са приноса на текущите разработки към областта на *алтернативни* и *регионални* теории за пространството и времето. Повечето от основните резултати са в комплекти от по два (когато е възможно) - един резултат за основния мереотопологичен език и съответен резултат за вторичния мереологически подезик.

Резултатите са групирани в четири основни теми - *резултати за изразителност*, *резултати за представимост*, *резултати за аксиоматизации и пълнота* за логиките за двата езика и *резултати за разрешимост и неразрешимост* за тези логики. Следват по-подробни описания и връзки с публикации за тези резултати.

Резултати за изразителност.

Тези резултати се намират в Част II. Имаме, че мереологичният език е собствен подезик на основния мереотопологичен език. Основният език, на свой ред, е сравнен с езиците на динамичните контактни алгебри и с темпорализацията на статичната мереотопология (виж [16]) и с езика ST_0 (виж [17]). Основните резултати от тази тема са:

- Следствие 1, стр. 14 - това е сравнението между мереологичния и мереотопологичния езици и езика на динамичните контактни алгебри;
- Твърдение 2, стр. 14 - това е сравнението между двата основни езици и темпорализацията на мереотопологията и ST_0.

Резултати за представимост.

Тази тема е относно теориите за представяне за двата разгледани езика. Тези теории за представяне са обобщени варианти на теорията на Стоун за представяне на Булевите алгебри и дистрибутивни решетки. Основните резултати са две динамични *характеризации* и два набора от *теореми за представяне*. Те се намират в Част II.

- Твърдение 3, стр. 15 - това твърдение показва характеризацията на мереотопологичните релации чрез *абстрактни точки и моменти*;
- Теорема 6, стр. 16, Теорема 7, стр. 16 - тези теореми показват, че безточково дефинираните динамични мереотопологични релации могат да се представят по стандартния точков начин;
- Твърдение 4, стр. 16 - характеризация на динамичните мереологични релации чрез *абстрактни точки и моменти*;
- Теорема 8, стр. 16, Теорема 9, стр. 16 - доказват, че безточково дефинираните динамични мереологични релации могат да се представят чрез точки.

Резултати за аксиоматизации.

Това са резултатите от Част III. Те дават аксиоматизации и доказателства за пълнота за логики, чийто език се състои от динамични релации. Първо се разглеждат две логики от първи ред за мереотопологичния език и мереологичния език. След това се изучават техните безкванторни фрагменти и, накрая, се разглеждат модалните логики за двата релационни езика. Резултатите са, както следва:

- Теорема 10, стр. 17 - тази теорема дава пълнотата на логиката от първи ред за динамични мереотопологични релации;
- Теорема 12, стр. 17 - показва пълнотата на безкванторния фрагмент на логиката от първи ред за динамични мереотопологични релации;
- Теорема 11, стр. 17 - пълнотата на логиката от първи ред за динамични мереологични релации;
- Теорема 13, стр. 17 - пълнотата на безкванторния фрагмент на мереологичната логика от първи ред;
- Теорема 14, стр. 18 - пълнотата на мереотопологичната модална логика;
- Теорема 15, стр. 18 - пълнотата на мереологичната модална логика.

Резултати за (не)разрешимост.

Част IV представя резултатите от последната тема. Те са за разрешимостта и неразрешимостта на логиките от предната част. Имаме че логиките от първи ред за езици с припокриване и контакт са *наследствено неразрешими*. За безкванторните фрагменти имаме, че са разрешими и че тяхната изпълнимост е NP-пълна задача. За модалните логики имаме, че две редукции на модалната логика на динамичните мереотопологични релации са разрешими, а също така и мереологичната модална логика е разрешима. Ето списъка с резултатите:

- Следствие 5, стр. 19 - показва наследствена неразрешимост на логиката от първи ред на динамичните мереотопологични релации;
- Следствие 6, стр. 20 - показва наследствена неразрешимост на логиката от първи ред на динамичните мереологични релации;
- Следствие 2, стр. 19, Следствие 3, стр. 19, Следствие 4, стр. 19, Следствие 7, стр. 20, Следствие 8, стр. 20, Следствие 9, стр. 20 - наследствена неразрешимост за други логики от първи ред за езици, съдържащи релации за припокриване и контакт;
- Следствие 10, стр. 20, Следствие 11, стр. 20 - резултати за разрешимост и сложност на безкванторния фрагмент на логиката от първи ред за динамични мереотопологични релации;
- Следствие 12, стр. 20, Следствие 13, стр. 20 - резултати за разрешимост и сложност на безкванторния фрагмент на логиката от първи ред за динамични мереологични релации;
- Следствие 14, стр. 20, Следствие 15, стр. 20 - разрешимост на двете редукции на модалната логика на динамичните мереотопологични релации;
- Следствие 16, стр. 20 - разрешимост на мереологичната модална логика.

Публикации

Резултатите и разработките от тази дисертация са публикувани в няколко реферирани статии (в научни журнали и сборници на конференции) и освен това са представени на множество международни конференции и семинари, както и на научна сесия на ФМИ към Софийския Университет. Следват пълни списъци на тези публикации.

Реферирани статии.

Реферираните публикации се състоят от две основни журнални статии и от четири по-кратки публикации в сборници към конференции - за три последователни конференции *Panhellenic Logic Symposium* и за конференцията *Advances in Modal Logic (2012)*. Журналните статии са публикувани в *Central European Journal of Mathematics* (с импакт фактор 0.44 за година 2011) и в специално издание на *Logic and Logical Philosophy*, което е посветено на безточкова геометрия и топология.

***An axiomatization of dynamic ontology of stable and unstable mereological relations*, в съавторство с Димитър Вакарелов, Proceedings of 7-th Panhellenic Logic Symposium (референция [34]).**

Тази статия представя стабилните и нестабилните мереологични релации (Дефиниция 13) и тяхната теория за представяне (Твърдение 4, Теорема 8, Теорема 9).

***Undecidability of logics for mereological and mereotopological relations*, Proceedings of 8-th Panhellenic Logic Symposium (референция [27]).**

Тази статия е за наследствената неразрешимост на логики от първи ред за релациите припокриване и контакт (Следствие 2, Следствие 3, Следствие 4, Следствие 5, Следствие 6, Следствие 7, Следствие 8, Следствие 9).

***Logics for stable and unstable mereological relations*, Central European Journal of Mathematics 9 (2011) (референция [26]).**

Тази статия представя стабилните и нестабилните мереологични релации (Дефиниция 13), теорията за представяне за тях (Твърдение 4, Теорема 8, Теорема 9) и резултати за логики от първи ред и модални логики за тези релации (Теорема 11, Теорема 13, Следствие 6, Следствие 12, Следствие 13, Теорема 15, Следствие 16).

***Dynamic relational mereotopology: A modal logic for stable and unstable relations*, Proceedings of Advances in Modal Logic 2012 (референция [29]).**

Тази статия представя стабилните и нестабилните мереотопологични релации (Дефиниция 12), тяхната теория за представяне и пълнотата на тяхната модална логика (Твърдение 3, Теорема 6, Теорема 7, Теорема 14).

***Dynamic relational mereotopology: Logics for stable and unstable relations*, Logic and Logical Philosophy 22 (2013) (референция [33]).**

Тази статия съдържа развитието на стабилните и нестабилните мереотопологични релации (Дефиниция 12), тяхната теория за представяне и резултатите за пълнота, разрешимост и неразрешимост за техните логиките от първи ред (Твърдение 3, Теорема 6, Теорема 7, Теорема 10, Теорема 12, Следствие 5, Следствие 10, Следствие 11).

***Decidability of modal logics for dynamic contact relations*, Proceedings of 9-th Panhellenic Logic Symposium (референция [31]).**

Тази статия представя резултатите за разрешимост на двете редукции на модалната логика за динамични мереотопологични релации (Следствие 14, Следствие 15).

Цитати.

Две от горните статии са цитирани в други публикации. Ето списъка на тези цитирания.

An axiomatization of dynamic ontology of stable and unstable mereological relations (референция [34]*) е цитирана в:*

- Димитър Вакарелов, **Dynamic Mereotopology: A Point-free Theory of Changing Regions. I. Stable and unstable mereotopological relations**, Fundamenta Informaticae 100 (2010) 1-4, pp. 159-180 (референция [47]).

Logics for stable and unstable mereological relations от CEJM (референция [26]*) е цитирана в:*

- Димитър Вакарелов, **Dynamic Mereotopology II: Axiomatizing some Whiteheadean Type Space-time Logics**, Advances in Modal Logic 9, pp. 538-558 (референция [48]).

Доклади на конференции и семинари.

Разработките за динамични мереологични и мереотопологични релации и резултатите за тях са представени чрез доклади на девет международни конференции в областта на математическата логика (на четири издания на *Logic Colloquium*, на три на *Panhellenic Logic Symposium*, веднъж на *Advances in Modal Logic* и на един *MASSEE* International Congress on Mathematics), на два семинара за логики за пространство и време и на научна сесия на Факултета по Математика и Информатика към Софийския Университет.

7-th Panhellenic Logic Symposium, Патра, Гърция, 15-19 Юли 2009 (референция [34]).

Теорията за представяне на динамичните мереологични релации е представена.

MASSEE International Congress on Mathematics, Охрид, Македония, 16-20 Септември 2009 (референция [24]).

Теорията за представяне на динамичните мереологични релации и резултатите за логики за тях са представени.

Logic Colloquium 2010, Париж, Франция, 25–31 Юли 2010 (референция [25]).

Докладът представя резултатите за теорията за представяне и логиките за динамичните мереологични релации.

8-th Panhellenic Logic Symposium, Янина, Гърция, 04–08 Юли 2011 (референция [27]).

Докладът е за наследствената неразрешимост за логики от първи ред за припокриване и контакт.

Workshop on Logics for Space and Time, Гьолечица, България, 23-26 Юни 2011.

Представени са резултати за теория за представяне, пълнота, разрешимост и неразрешимост на логики за стабилни и нестабилни мереологични релации.

Logic Colloquium 2011, Барселона, Испания, 11–16 Юли 2011 (референция [28]).

Докладът е за наследствената неразрешимост за логики от първи ред за припокриване и контакт.

Logic Colloquium 2012, Манчестър, Великобритания, 12–18 Юли 2012 (референция [30]).

Този доклад представя динамичните мереотопологични релации, тяхната теория за представяне и резултати за пълнота, разрешимост и неразрешимост на логики от първи ред за тях.

Advances in Modal Logic 2012, Копенхаген, Дания, 22–25 Август 2012 (референция [29]).

Теорията за представяне и пълнотата на модалната логика на стабилните и нестабилни мереотопологични релации са представени.

Софийски Университет, научна сесия на ФМИ 2013, София, България, 16 Март 2013.

Пълнота, разрешимост и неразрешимост за логики от първи ред и модални логики за динамични мереологични и мереотопологични релации са докладвани.

9-th Panhellenic Logic Symposium, Атина, Гърция, 15–18 Юли 2013 (референция [31]).

Докладът представя разрешимостта на две редукции на модалната логика на динамичните мереотопологични релации.

Logic Colloquium 2013, Евора, Португалия, 22–27 Юли 2013 (референция [32]).

Докладът е за разрешимостта на две редукции на модалната логика на динамичните мереотопологични релации.

Second Workshop on Logics for Space and Time, София, България, 14-15 Февруари 2014.

Представя се развитието на стабилните и нестабилни мереологични и мереотопологични релации. Докладваните резултати се състоят от резултати за пълнота, разрешимост и неразрешимост на логики за тези релации.

Литература

[1] Balbes, R. and P. Dvinger, "Distributive lattices," University of Missouri press, 1974.

[2] Balbiani, P., T. Tinchev and D. Vakarelov, *Modal logics for region-based theory of space*, Fundamenta Informaticae **81** (2007), pp. 29–82.

[3] Ben-Ari, M., Z. Manna and A. Pnueli, *The temporal logic of branching time*, in: *Proceedings of* 8^{-th} *Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, Williamsburg, Virginia, USA, 1981, pp. 164–176.

[4] Bennett, B. and I. Düntsch, *Axioms, algebras and topology*, in: M. Aiello, I. Pratt-Hartmann and J. van Benthem, editors, *Handbook of Spatial Logics*, Springer, 2007 pp. 99–160.

[5] Blackburn, P., M. de Rijke and Y. Venema, "Modal Logic," Cambridge University Press, 2001.

[6] Chagrov, A. and M. Zakharyaschev, "Modal Logic," Oxford University Press, 1997.

[7] de Laguna, T., *Point, line and surface as sets of solids*, The Journal of Philosophy **19** (1922), pp. 449–461.

[8] Dimov, G. and D. Vakarelov, *Contact algebras and region-based theory of space. a proximity approach. I and II.*, Fundamenta Informaticae **74** (2006), pp. 209–249, 251–282.

[9] Düntsch, I. and D. Vakarelov, *Region-based theory of discrette spaces: A proximity approach.*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence **49** (2007), pp. 5–14.

[10] Düntsch, I. and M. Winter, *A representation theorem for Boolean contact algebras*, Theoretical Computer Science (B) **347** (2005), pp. 498–512.

[11] Egenhofer, M. and R. Franzosa, *Point-set topological spatial relations*, International Journal of Geographical Information Systems **5** (1991), pp. 161–174.

[12] Egenhofer, M. and J. Herring, *Categorizing topological relationships between regions, lines and point in geographic databases*, Technical report, University of Maine, Department of Surveying Engineering (1991).

[13] Ershov, Y. L., "Problems of decidability and constructive models (in Russian)," Science, Moskow, 1980.

[14] Ershov, Y. L., "Problems of decidability and constructive models (in Russian)," Science, Moskow, 1980.

[15] Ershov, Y. L. and E. A. Palyutin, "Mathematical logic," Science, Moskow, 1987.

[16] Finger, M. and D. M. Gabbay, *Adding a temporal dimension to a logic system*, Journal of Logic, Language and Information **1** (1992), pp. 203–233.

[17] Gabbay, D. M., A. Kurucz, F. Wolter and M. Zakharyaschev, "Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Application," North Holland, 2003.

[18] Goldblatt, R., "Logics of Time and Computation," CSLI Lecture Notes, 1992.

[19] Jonsson, P. and T. Drakengren, *A complete classification of tractability in the spatial theory RCC-5*, Journal of Artificial Intelligence Research **6** (1997), pp. 211–221.

[20] Kontchakov, R., A. Kurucz, F. Wolter and M. Zakharyaschev, *Spatial logic + temporal logic = ?*, in: M. Aiello, I. Pratt-Hartmann and J. van Benthem, editors, *Handbook of Spatial Logics*, Springer, 2007 pp. 497–564.

[21] Lutz, C. and F. Wolter, *Modal logics for topological relations*, Logical Methods in Computer Science **2** (2006), pp. 1–41.

[22] Manna, Z. and A. Pnueli, "The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems," Springer, 1992.

[23] Manna, Z. and A. Pnueli, "Temporal Verification of Reactive Systems: Safety," Springer, 1995.

[24] Nenchev, V., *Logics for stable and unstable mereological relations*, in: *Proceedings of MASSEE International Congress on Mathematics*, Ohrid, Macedonia, 2009, p. 75.

[25] Nenchev, V., *Logics for stable and unstable mereological relations*, in: *Proceedings of Logic Colloquium 2010*, Paris, France, 2010, pp. 310–311.

[26] Nenchev, V., *Logics for stable and unstable mereological relations*, Central European Journal of Mathematics **9** (2011), pp. 1354–1379.

[27] Nenchev, V., *Undecidability of logics for mereological and mereotopological relations*, in: *Proceedings of* 8^{-th} *Panhellenic Logic Symposium*, Ioannina, Greece, 2011, pp. 82–86.

[28] Nenchev, V., *Undecidability of logics for mereological and mereotopological relations*, in: *Proceedings of Logic Colloquium 2011*, Barcelona, Spain, 2011, pp. 86–87.

[29] Nenchev, V., *Dynamic relational mereotopology: A modal logic for stable and unstable relations.*, in: *Proceedings of Advances in Modal Logic 2012*, Copenhagen, Denmark, 2012, pp. 47–51.

[30] Nenchev, V., *Dynamic relational mereotopology: First-order and modal logics for stable and unstable relations*, in: *Proceedings of Logic Colloquium 2012*, Manchester, United Kingdom, 2012, p. 29.

[31] Nenchev, V., *Decidability of modal logics for dynamic contact relations*, in: *Proceedings of* $9^{\text{-}th}$ *Panhellenic Logic Symposium*, Athens, Greece, 2013, pp. 68–73.

[32] Nenchev, V., *Decidability of modal logics for dynamic contact relations*, in: *Proceedings of Logic Colloquium 2013*, Evora, Portugal, 2013, p. 76.

[33] Nenchev, V., *Dynamic relational mereotopology: Logics for stable and unstable relations.*, Logic and Logical Philosophy **22** (2013), p. 295–325.

[34] Nenchev, V. and D. Vakarelov, *An axiomatization of dynamic ontology of stable and unstable mereological relations*, in: *Proceedings of* $7^{\text{-}th}$ *Panhellenic Logic Symposium*, Patras, Greece, 2009, pp. 137–141.

[35] Nenov, Y. and D. Vakarelov, *Modal logics for mereotopological relations*, in: C. Areces and R. Goldblatt, editors, *Advances in Modal Logic*, Nancy, France, 2008, pp. 249–272.

[36] Pnueli, A., *The temporal logic of programs*, in: *Proceedings of the* $18^{\text{-}th}$ *IEEE Symposium on Foundation of Computer Science*, Providence, Rhode Island, USA, 1977, pp. 46–57.

[37] Pratt-Hartmann, I., *First-order mereotopology*, in: M. Aiello, I. Pratt-Hartmann and J. van Benthem, editors, *Handbook of Spatial Logics*, Springer, 2007 pp. 13–97.

[38] Randell, D. A., Z. Cui and A. G. Cohn, *A spatial logic based on regions and connection*, in: B. Nebel, C. Rich and W. R. Swartout, editors, *Proceedings of* $3^{\text{-}rd}$ *International Conference Knowledge Representation and Reasoning* (1992), pp. 165–176.

[39] Segerberg, K., "An Essay in Classical Modal Logic," Uppsala, 1971.

[40] Simons, P., "Parts: A Study in Ontology," Oxford University Press, 1987.

[41] Stell, J. G., *Boolean connection algebras: A new approach to the Region Connection Calculus*, Artificial Intelligence **122** (2000), p. 111–136.

[42] Stone, M. H., *Application of the theory of Boolean rings to general topology*, Transactions of the American Mathematical Society **41** (1937), p. 321–364.

[43] Tarski, A., *Der aussagenkalkül und die topologie*, Fundamenta Mathematicae **31** (1938), p. 103–134.

[44] Tarski, A., *Foundations of geometry of solids (translation of summary of address given by Tarski to the First Polish Mathematical Congress, 1927)*, Logic, Semantics, Metamathematics (1956), pp. 24–29.

[45] Vakarelov, D., *Region-based theory of space: Algebras of regions, representation theory and logics*, in: D. M. Gabbay, M. Zakharyaschev and S. S. Goncharov, editors, *Mathematical Problems from Applied Logics II. Logics for the XXIst Century.*, Springer, 2007 pp. 267–348.

[46] Vakarelov, D., *A modal approach to dynamic ontology: modal mereotopology*, Logic and Logical Philosophy **17** (2008), pp. 167–187.

[47] Vakarelov, D., *Dynamic mereotopology: A point-free theory of changing regions. I. stable and unstable mereotopological relations*, Fundamenta Informaticae **100** (2010), pp. 159–180.

[48] Vakarelov, D., *Dynamic mereotopology II: Axiomatizing some whiteheadean type space-time logics*, in: T. Bolander, T. Braüner, S. Ghilardi and L. Moss, editors, *Advances in Modal Logic*, Copenhagen, Denmark, 2012, pp. 538–558.

[49] Whitehead, A. N., "The Organization of Thought," London, William and Norgate, 1917.

[50] Whitehead, A. N., "Science and the Modern World," New York: MacMillan, 1925.

[51] Whitehead, A. N., "Process and Reality," New York: MacMillan, 1929.

[52] Wolter, F. and M. Zakharyaschev, *Spatial reasoning in RCC–8 with Boolean region terms*, in: W. Horn, editor, *Proceedings of the* $14^{\text{-}th}$ *European Conference on Artificial Intelligence* (2000), p. 244–248.

[53] Wolter, F. and M. Zakharyaschev, *Spatio-temporal representation and reasoning based on RCC-8*, in: A. G. Cohn, F. Giunchiglia and B. Selman, editors, *Proceedings of the* $7^{\text{-}th}$ *Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning* (2000), pp. 3–14.