РЕЦЕНЗИЯ

от проф. дмн Димитър Скордев
на дисертацията на асист. Стефан Володев Вътев
„EFFECTIVE PROPERTIES OF STRUCTURES
IN THE HYPERARITHMETICAL HIERARCHY“,
представена за присъждане на образователната и научна степен „доктор“
в професионално направление 4.5 „Математика“
по научната специалност „Математическа логика“

Описание на представените материали

Както личи от нейното заглавие, дисертацията е на английски език. Съдържа четири глави: „Introduction“ (23 стр.), „Conservative Extensions“ (48 стр.), „Jump Inversion“ (33 стр.) и „Conclusion“ (2 стр.). Източниците, посочени в библиографския списък, са 39 на брой, като всеки от тях е цитиран поне в една от първите три глави. Накрая е даден показалец на означения, термини и имена. Към дисертацията са приложени следните материали на български език (вторият само в електронен вид): автореферат (22 стр.) и творческа автобиография на автора (3 стр.). Приложени са и pdf файлове с текстовете на две статии на автора, на които се базира дисертацията (статиите са отпечатани в томовете от поредицата „Lecture Notes in Computer Science“ с трудовете на конференциите CiE 2011 и CiE 2013). В автореферата са включени авторска справка и декларация за оригиналност на дисертационния труд. Посочено е едно цитиране на първата от споменатите две статии.

Предмет на дисертацията

Една широко изследвана част на теорията на изчислимостта е посветена на Тюринговата сводимост между множества от естествени числа, на съответните техни Тюрингови степени и на операцията Тюрингов скок в множеството на степените. В по-ново време се търсят подходящи анализи на тези понятия за по-сложния случай, когато вместо множества от естествени числа имаме работа със структури с изброим носител. Важни стъпки в тази насока са направени от редица математици, сред които особено силно са повлияли на автора Иван Сосков и Александра Соскова.

Един естествен подход към споменатата по-горе задача е следният: когато е дадена една структура $\mathfrak{A}$ с изброим носител, чрез негово номериране да сведем нещата до случая, когато носителят е множеството на естествените числа, и да разгледаме тогава атомарната диаграма на структурата. Тъй като въпросната атомарна диаграма е множество от естествени числа, можем да образуваме нейната Тюрингова степен и да я използваме за характеризация на сложността на $\mathfrak{A}$ от гледна точка на теорията на изчислимостта. Тази Тюрингова степен обаче в общия случай ще зависи от избраната от нас номерация на носителя на структурата, затова преди няколко десетилетия Линда Рихтер е предложила да се използва за характеризация на структурата множеството на всички Тюрингови степени, които могат да се получат по този начин.

Тъй като от известна гледна точка гореспоменатият начин за характеризиране на структури понякога се оказва не напълно удовлетворителен, в дисертацията се привлича за целта и въведеното от Аш понятие за определимост с изчислими безкрайни формули от определен сложностен клас. Такова е например положението в теореми 2.1 и 2.3 – там за произволни изчислими ординали α и β и произволни изброими структури $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, където носителят на първата е подмножество на носителя на втората, се установява връзка между едно съотношение $\mathfrak{A} \Leftrightarrow_{\alpha}^{\beta} \mathfrak{B}$, дефинирано в термините на номерации на двете структури, и еквивалентност за произволна релация в носителя на $\mathfrak{A}$ между нейната Σ_{α}^{c}-определимост в $\mathfrak{A}$ и нейната Σ_{β}^{c}-определимост в $\mathfrak{B}$. В теорема 3.5 определимостта с изчислими безкрайни формули също е важен елемент на твърдението – разглежданото там обръщане на скока е налице както по отношение на съответните спектри от степени, така и по отношение на определимост с изчислими безкрайни формули от определен клас.

Приноси в дисертацията

Ще направя преглед на по-важните резултати на автора на дисертацията, които са изложени в нея. Следвайки реда, в който са описани те в авторската справка, ще привеждам (в курсив) дадените там формулировки и ще правя своите коментари и преценки.

Разгледана е нова релация между структури наречена консервативно разширение. Показани са връзки между нея и други известни релации между структури. Такива са сравняване на структури относно техните спектри от Тюрингови степени и чрез релациите определими в съответните структури чрез изчислими безкрайни формули. Основният резултат тук е Теорема 7.

Споменатата теорема 7 е теорема 2.3 от дисертацията (намира се на стр. 48). Тази теорема и едно следствие от нея дават условия, при които са в сила и обратните импликации на установените в намиращата се на стр. 26 теорема 2.1 (в какъв дух са въпросните импликации, беше бегло споменато по-горе). Доказателството на теорема 2.3 е със значителна техническа сложност и се основава на ред други твърдения, повечето от които са със също нелеки доказателства. Както ще посоча по-нататък в критичните си бележки, в доказателствата на някои от тези други твърдения има за съжаление сериозни слабости, но, след като му му сигнализирах за тях, авторът показа как те могат да се отстранят. Смятам, че теоремата, за която става дума в тази част на авторската справка, е наистина ценен резултат. Не ми е напълно ясно обаче в какъв смисъл е използвано прилагателното „нова“ в първото изречение на цитирания по-горе текст от авторската справка, защото както в дисертацията, така и в автореферата, дефиницията на въпросната релация се приписва на Сосков.

Обобщено е понятието скок структура, въведено от А. Соскова и И. Сосков [32]. За всеки изчислим ординал α и изброима структура $\mathfrak{A}$ α-скок структурата $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ е определена и изучена в контекста на релацията консервативно разширение. Неформално, структурата $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ съдържа точно Σ^0_α информацията за структурата $\mathfrak{A}$. Формалната дефиниция на $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ използва понятие за форсинг.

Структурите $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ са въведени в дефиниция 2.6 (намираща се в параграф 2.5 на дисертацията). Използването на форсинг става посредством използване на една релация, дефинирана чрез форсинг в предходната дефиниция (намира се в същия параграф, а самият форсинг е дефиниран в параграф 2.1). Нямам забележки по цитирания текст.

Доказана е нова теорема, която има вида на теорема за обръщане на скока. Тя казва, че за някои изброими структури $\mathfrak{A}$ и изчислими ординали наследници α, ние можем да построим структура $\mathfrak{B}$, чиято α-скок структура $\mathfrak{B}^{(\alpha)}$ е много подобна на първоначалната структура $\mathfrak{A}$, когато те са сравнени чрез релацията консервативно разширение. Конструкцията на структурата $\mathfrak{B}$ се основава на идеята за кодиране на множество от безкрайна редица от структури. Тя произлиза от работата на Аш и Найт [2].

В цитирания текст се има предвид теорема 3.5, формулирана на стр. 79 и доказана в рамките на следващите двадесетина страници. Фактически думата „някои“, използвана по-горе във връзка с тази теорема, предава нейното съдържание в отслабен вид – както е отбелязано в третия абзац отдолу нагоре на стр. 79, предположенията за структурите $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ не налагат никакви допълнителни ограничения за $\mathfrak{A}$ и α, тъй че въпросната дума би трябвало да се отнася само за изискването ординалът α да е по-голям от 1 (както изглежда, пропуснато по невнимание във формулировката на теоремата в дисертацията). И за тази теорема смятам, че е ценен нов резултат. В дългата верига от нелеки разсъждения, с които се установява тя, също се се намериха някои сериозни слабости, но и те се оказаха поправими.

Критични бележки

Първо ще се спра на слабостите, споменати в предходния дял на рецензията.

1. При $\alpha(p) < \omega$ има проблем с верността на първата от еквивалентностите, които са на стр. 8, ред 9 отд. (освен това налице е и по-второстепенният

проблем, че при $\alpha(p) = 0$ втората от тях няма смисъл, понеже означението $\Delta^0_0(X)$ не е дефинирано). Тези еквивалентности обаче се използват по-нататък например в доказателството на теорема 2.3, която е един от основните резултати в дисертацията.

Начинът, по който дисертантът преодоля този проблем, е чрез известно усложняване на дясната страна в третото равенство от дефиницията на множествата $H_X(a)$, дадена на стр. 7 от дисертацията. Тази промяна осигурява верността на гореспоменатите еквивалентности и, доколкото можах да преценя, не създава нови проблеми.

2. В индуктивното доказателство на третото и четвъртото твърдение в лема 2.2, намираща се на стр. 30 от дисертацията, има съществена празнота, а и тази лема се използва в доказателството на теорема 2.3. Например третото твърдение е за едно свойство, присъщо на α-генеричните номерации на разглежданата структура при всеки избор на ненулев изчислим ординал α. Изложеното доказателство на твърдението е чрез индукция относно α. При индуктивните стъпки обаче не е показано, че са изпълнени предпоставките на индуктивните предположения (например от това, че една номерация е $(\beta+1)$-генерична, дали следва, че тя е β-генерична?). Аналогичен проблем е налице и в доказателството на намиращата се на стр. 92 лема 3.6, а тя пък е част от веригата от разсъждения, водеща до установяването на теорема 3.5, също основен резултат в дисертацията.

Дисертантът преодоля проблема, като доказа нужното за разсъжденията запазване на α-генеричността при преход надолу. Съответното доказателство се оказа нетривиално. В ситуацията от лема 2.2 беше използвано твърдение 2.6 от дисертацията, намиращо се на стр. 56, а за ситуацията от лема 3.6 послужи съответен аналог на твърдение 2.6, формулиран за целта. За щастие доказателството на твърдение 2.6 не използва нито пряко, нито косвено лема 2.2, тъй че нейното доказателство с помощта на споменатото твърдение не съдържа порочен кръг.[1]

Освен горните критични бележки имам многобройни други, но не толкова сериозни, че да поставят под въпрос резултатите в дисертацията. Подолу ще отразя част от тези критични бележки, като ще започна с една от редакционен характер.

Независимото номериране на дефинициите и различните категории твърдения в дадена глава, макар и да изглежда логично, създава затруднения при търсенето им в текста, защото номерът на страницата, на която се намира дадена дефиниция или дадено твърдение, не е монотонно растяща функция на номера на дефиницията или твърдението (и даже изобщо не е негова функция). Например в параграф 1.9 имаме после-

[1] Доказателството на твърдение 2.6 има друг недостатък – левите страни на еквивалентностите с дясна страна на стр. 56, ред 6 отд., и на стр. 57, ред 5 отг., не са подбрани така, че верността на въпросните еквивалентности да е ясна. В отговор на мое запитване авторът обясни как всъщност би трябвало да изглежда въпросната част от доказателството.

дователно Definition 1.7 и Theorem 1.11 (стр. 14), Lemma 1.2 (стр. 15), Definition 1.8 (стр. 18), Corollary 1.2 (стр. 19), Definition 1.9, Definition 1.10 и Proposition 1.1 (стр. 20), Proposition 1.2 и Lemma 1.3 (стр. 21), Corollary 1.3, Corollary 1.4, Definition 1.11 и Theorem 1.12 (стр. 23).

На стр. 4, р. 3 отг., има пропуснато „pairs of".

Изискването за взаимна еднозначност, фигуриращо в дадената на стр. 5 дефиниция за крайна част, е прекалено ограничително в случая на $\mathbb{P}_2$. Например дефинираното след това $\tau^{-1}(R)$ няма да принадлежи на $\mathbb{P}_2$, ако дефиниционната област на τ има повече от два елемента. Явно дефиницията на $\mathbb{P}_2$ трябва да бъде без това изискване.

На стр. 11, редове 7 и 9 отг., погрешно е употребен неопределителен член „a". На ред 11 отг. погрешно е употребен квантор за съществуване вместо квантор за общност. На ред 9 отд. е пропусната променливата след квантора.

Във формулата на стр. 13, ред 6 отд., вместо $i < n$ трябва да стои $i \leq n$.

Формулата $\sigma(x, y)$ от пример 2 на стр. 15 е тъждествено невярна в разглежданата структура, ако наредбата $<$ е строга.

На стр. 16, редове 9 и 10 отг., вместо x с разни индекси вероятно би трябвало да стоят самите числа, които са дадени като индекси. Аналогично за 1) към края на стр. 17, а също за редове 3, 6 и 8 отг. и редове 4 и 1 отд. на стр. 34.

На стр. 16, редове 14 и 3 отд., а също на стр. 17, ред 8 отг., вместо $x \notin \rho^{-1}(R)$ би било по-добре да се напише $\rho(x) \notin R$ или $\rho^{-1}(R)(x) = 0$ (по дефиниция $\rho^{-1}(R)$ е частична функция от $\mathbb{N}$ към $\{0, 1\}$, а отъждествяване с множества е предвидено в дисертацията само за тоталните функции от $\mathbb{N}$ към $\{0, 1\}$). На стр. 17, ред 9 отг., вместо $x \notin \tau_{s+1}^{-1}(R)$ би било редно да се напише $\tau_{s+1}^{-1}(R)(x) = 0$. Подобна забележка може да се направи и за понататъшни места от дисертацията.

За да бъде ясно последното изречение на стр. 16, би трябвало да се каже поне, че еквивалентността в него се твърди за всеки елемент a на A (ако се приеме за подразбиращо се, че s и e са онези, за които става дума в предходните две изречения). Разсъжденията във второто и третото изречение на параграфа на стр. 17, започващ с ($\leftarrow$), не са изложени ясно. Получава се впечатление, че това x, за което става дума на първия ред на второто изречение, съвпада с онова, за което става дума на втория, а те биха могли да са различни. Не е обяснено добре и как се стига до противоречие.

Ако 0 не принадлежи на множеството D, за което става дума на стр. 18, ред 1 отг., формулата, дефинирана два реда по-надолу, може да има и свободна променлива, различна от явно посочените в лявата страна на дефиницията. Малко по-проста формула, еквивалентна на въпросната, би се получила, ако вместо неравенството $i \neq j$ беше използвано неравенството $i < j$

(всъщност по-добре би било да се използват неравенствата $0 \leq i < j \leq k-1$ и да не се пише следващото от тях $d_i, d_j \in D$). Тъй като структурата $\mathfrak{A}$ е фиксирана, не са уместни думите „for every structure $\mathfrak{A}$" на ред 4 отг.

Доказателството на следствие 1.2 (стр. 19) е непълно и съдържа неясна формулировка. А именно, не е показано как от условието 2) следва условието 1), а при разсъжденията в обратната посока е наречена „the definition of R" една еквивалентност, която е по-скоро характеризация отколкото дефиниция на R.

В първото изречение от частта $(\leftarrow)$ на доказателството на лема 1.3 (стр. 21) се приема нещо, което е различно от предпоставката на доказваната импликация, и не се пояснява каква е връзката му с тази предпоставка.

На стр. 28, редове 7 и 5 отд., вместо $\forall x$ и $\rho(x)$ трябва да бъде съответно $\forall z$ и $\rho(z)$, а вместо останалите x на тези редове и непосредствено следващите ги трябва да бъде x_z.

В условията на стр. 29, редове 3 и 1 отд., са нужни още скоби, за да е ясен приоритетът на логическите операции.

Предположенията на лема 2.2 (стр. 30) позволяват равенството $\alpha = 1$, но тогава разглеждането на α-генерични номерации в третото твърдение на лемата няма да бъде в съгласие с дефиницията на предходната страница – там понятието α-генерична номерация е дефинирано само при $\alpha > 1$. Вероятно в третото твърдение α-генеричност на номерацията трябва да се изисква само при $\alpha > 1$.

Дясната страна на еквивалентността на стр. 42, редове 5 и 4 отд., в общия случай е безсмислена – за да имат смисъл $f(a_0), \ldots, f(a_{n-1})$, необходимо е $a_0, \ldots, a_{n-1}$ да са естествени числа, а пък за да има смисъл $\Pi_n(a_0, \ldots, a_{n-1})$, необходимо е $a_0, \ldots, a_{n-1}$ да принадлежат на A^*. В резултат на това пропада доказателството на Proposition 2.2 (стр. 44). За щастие въпросното твърдение все пак е вярно.

В еквивалентността на стр. 44, редове от 2 до 5 отг., са пропуснати квантори за съществуване по променливите x_1, x_2, y_1, y_2, а без тях тя очевидно не е тъждествено вярна в $\mathbb{N}$.

На стр. 45, ред 11 отд., вместо g трябва да бъде h. На следващите два реда са пропуснати някои показатели -1 (такъв пропуск има и на стр. 46, ред 11 отд.). На стр. 46, ред 7 отг., вместо $h(0)$ трябва да бъде $\mu(0)$.

В следствие 2.5 (стр. 55) се използва означението $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$, което обаче се въвежда едва след това.

На стр. 78, намираща се в глава 3, на ред 9 отг. за едно свойство е написано „It will be considered in Chapter ??", но единствената следваща глава се състои от две страници, на които не става дума за въпросното свойство.

В дефиниция 3.5 (стр. 92) и по-нататък става дума за крайни подусловия на тотални условия без преди това да е дадена съответната дефиниция.

Източникът [6] е на български, но това не е отбелязано в библиографския списък.

Не е пояснено своевременно (напр. на стр. 14) защо в дисертацията се доказва теоремата на Аш-Найт-Манаси-Слеман и Чизхолм.

Качества на автореферата

Смятам, че авторефератът (с изключение на заглавието му) коректно отразява съдържанието на дисертацията. Отношение към дадената в него оценка на приносите взех в дела „Приноси в дисертацията“ на настоящата рецензия.

Заключение

Представеният дисертационен труд съдържа сериозни резултати по разглежданата в него актуална и трудна тема, които са оригинални научни приноси. Препоръчвам да бъде присъдена на автора на труда асист. Стефан Володев Вътев образователната и научна степен „доктор“.

София, 7.05.2014 г. Подпис на рецензента: