Софийски университет

“Св. Климент Охридски”

Факултет по математика и информатика

Стефан Володев Вътев

АВТОРЕФЕРАТ

на дисертационен труд със заглавие

ОМЕГА СПЕКТРИ НА СТРУКТУРИ

за придобиване на образователна и научна степен “доктор” в
професионално направление 4.5 “Математика”,

научна специалност “Математическа логика”

Научен ръководител

доц. д-р Александра Соскова

София, януари 2014

1 Увод

Основната тема на дисертацията е изучаването на понятието изчислимост в случая когато основните обекти на разглеждане не са множества от естествени числа и съответно техните Тюрингови степени, а изброими структури.

(1) Първата стъпка в нашата работа е да се въведе релация между структури, която да служи като аналог на Тюринговата сводимост между степени.

Тук основната трудност произлиза от факта, че една структура може да има изоморфни представяния с различни изчислителни свойства. Един известен метод за сравнение на структури е да се сравнят техните спектри (Определение 4). В някои случаи тази еквивалентност може да не е особено полезна. Например, ако структурите $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имат изчислими изоморфни представяния, то техните спектри съвпадат, но тези структури могат да имат много различни теоретико-моделни свойства. Поради тази причина ние ще въведем друг начин за сравнение на структури, подходящ за нашите разглеждания, основан на понятието определимост в структура чрез изчислими безкрайни формули (Определение 5).

Поради тези съображения И. Сосков предлага едно по-силно понятие, наречено *консервативно разширение* (Определение 8). То описва основния метод за построяване на изоморфни представяния на структури, които се използват от А. Соскова и И. Сосков в [32].

(2) В изучаването на Тюринговите степени основна роля играе понятието скок на Тюрингова степен. Ние определяме за всяка структура нейната *скок структура*, която има свойства подобни на Тюринговата скок степен. В последните години има различни предложения за дефиниция на това понятие. Ние използваме дефиницията дадена от И. Сосков и А. Соскова [32] и я обобщаваме за произволни изчислими ординали α. Така получената α-скок структура я изучаваме в контекста на релациите между структури от (1).

(3) След като вече имаме понятието скок структура, естествен въпрос е да се разгледа за кои структури може да се обърне скокът. При Тюринговите степени теоремата на Фридберг (Теорема 8) е пример за такъв резултат. Ние ще разгледаме този въпрос в контекста на релациите от (1) и понятието скок от (2). Конструкцията за обръщане на скока, която ще използваме, се основава на идеята за кодиране на множество от редица от структури на Аш и Найт [2].

2 Основни понятия

Изчислими ординали

Определение 1. *Изчислим ординал* е ординал, който представя типа на някоя изчислима добра наредба.

Дефинираме едновременно множеството $\mathcal{O}$, функция $\lambda x.|x|_{\mathcal{O}}$, която за всеки $a \in \mathcal{O}$ дава ординала $\alpha = |a|_{\mathcal{O}}$, строга частична наредба $<_{\mathcal{O}}$ върху $\mathcal{O}$. Елементите на $\mathcal{O}$ се наричат ординални означения, а $|a|_{\mathcal{O}}$ е ординалът, означен с a.

(1) 1 принадлежи на $\mathcal{O}$. Нека 1 е означението на ординала 0, т.е. $|1|_{\mathcal{O}} = 0$.

(2) Ако a е означение за ординала α, то тогава 2^a е означение за ординала $\alpha+1$. В частичната наредба, $b <_{\mathcal{O}} 2^a$, ако $b <_{\mathcal{O}} a$ или $b = a$. Например, ординалът 3 има означение 2^{2^2}, или с други думи $3 = |2^{2^2}|_{\mathcal{O}}$.

(3) За един граничен ординал α, означенията са числата $3 \cdot 5^e$, където φ_e е тотална изчислима функция, приемаща стойности в $\mathcal{O}$, където

$$\varphi_e(0) <_{\mathcal{O}} \varphi_e(1) <_{\mathcal{O}} \varphi_e(2) <_{\mathcal{O}} \dots,$$

и α е горната граница на редицата от ординали $\alpha_n = |\varphi_e(n)|_{\mathcal{O}}$. Пишем $b <_{\mathcal{O}} 3 \cdot 5^e$, ако съществува естествено число n, за което $b <_{\mathcal{O}} \varphi_e(n)$.

Да отбележим, че крайните ординали имат единствено ординално означение, но безкрайните ординали, ако имат едно означение, то те имат безкрайно много означения.

Определение 2. Ординалите с означения в $\mathcal{O}$ се наричат *конструктивни ординали*, и най-малкият неконструктивен ординал се бележи с ω_1^{CK}.

Спектър [33] показва, че понятията конструктивен и изчислим ординал съвпадат.

Теорема 1 (Спектър)**.** Най-малкият неизчислим ординал е най-малкия неконструктивен ординал. Те и двата са равни на ω_1^{CK}.

Хипераритметичната йерархия

Нека X е произволно множество от естествени числа. Ние ще дефинираме множествата $H_X(a)$, за всяко $a \in \mathscr{O}$, чрез трансфинитна рекурсия по ординалите $|a|_{\mathscr{O}}$, както следва:

$$\begin{aligned} &H_X(1) = X \\ &H_X(2^a) = H_X(a)', \text{ Тюринговия скок на } H_X(a) \\ &H_X(3 \cdot 5^e) = \{\langle v, n\rangle \mid v \in H_X(2^{\varphi_e(n)})]\}, \end{aligned}$$

Когато $X = \emptyset$, ще пишем $H(a)$ вместо $H_{\emptyset}(a)$.

Теорема 2 (Спектър)**.** Ако $a, b \in \mathscr{O}$ и $|a|_{\mathscr{O}} = |b|_{\mathscr{O}}$, тогава $H_X(a) \equiv_T H_X(b)$.

За крайни $n > 0$, $\Sigma^0_n(X)$ релациите са тези релации, които са изчислимо номеруеми в $X^{(n-1)}$, и $X^{(n-1)} \equiv_T H_X(a)$, за $|a|_{\mathscr{O}} = n-1$. За изчислими ординали $\alpha \geq \omega$, една релация е

- $\Sigma^0_\alpha(X)$, ако тя е изчислимо номеруема $H_X(a)$, за някое $a \in \mathscr{O}$ с $|a|_{\mathscr{O}} = \alpha$;
- $\Pi^0_\alpha(X)$, ако нейното допълнение е изчислимо номеруемо в $H_X(a)$, за някое $a \in \mathscr{O}$ с $|a|_{\mathscr{O}} = \alpha$;
- $\Delta^0_\alpha(X)$, ако тя е изчислима в $H_X(a)$, за някое $a \in \mathscr{O}$ с $|a|_{\mathscr{O}} = \alpha$.

В случая на $X = \emptyset$, ние ще пишем Σ^0_α, Π^0_α, и Δ^0_α вместо $\Sigma^0_\alpha(\emptyset)$, $\Pi^0_\alpha(\emptyset)$, и $\Delta^0_\alpha(\emptyset)$.

Определение 3. Една функция или релация е *хипераритметична* ако тя е Δ^0_α, за някой изчислим ординал α.

Удобно е да въведем следното означение за произволно множество $X \subseteq \mathbb{N}$ и изчислим ординал α,

$$\Delta^0_a(X) = \begin{cases} H_X(a), & \text{ако } |a|_{\mathscr{O}} \geq \omega \\ H_X(b), & \text{ако } |b|_{\mathscr{O}} + 1 = |a|_{\mathscr{O}} \ \&\ 0 < |a|_{\mathscr{O}} < \omega. \end{cases}$$

Пишем Δ^0_a за $\Delta^0_a(\emptyset)$.

В нашата работа винаги ще работим под фиксиран ординал η. Поради тази причиня няма да правим разлика между ординала $\alpha < \eta$ и неговото ординално означение a. Поради тази причина, ще пишем $\Delta^0_\alpha(X)$ вместо $\Delta^0_a(X)$. Следвайки нашите дефиниции, за $\alpha = \lim \alpha(p)$, ние имаме еквивалентността:

$$\langle x, p\rangle \in \Delta^0_\alpha(X) \;\leftrightarrow\; x \in \Delta^0_{\alpha(p)+1}(X) \;\leftrightarrow\; x \in W_x^{\Delta^0_{\alpha(p)}(X)}.$$

Сега за $X \subseteq \mathbb{N}$, можем да определим α-тия Тюринг скок, където $\alpha \geq \omega$, като

$$X^{(\alpha)} = \Delta^0_\alpha(X).$$

Копия на структури

Тук ще работим със структури с изброими носители в краен или ефективно изброим релационен език Обикновено ще изискваме равенството да бъде измежду релационните символи в езика на структурата. Използваме буквите $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ за да означаваме структури и A, B или $|\mathfrak{A}|$, $|\mathfrak{B}|$ за да означаваме техните носители..

Казваме, че f е *номерация* на множеството A, ако f е тотално еднозначно изображение на $\mathbb{N}$ върху A. f е номерация на структурата $\mathfrak{A}$, ако f е номерация на нейния носител A. Ако $R \subseteq A^n$, означаваме *първообраза* на R като множеството

$$f^{-1}(R) = \{\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \mid (f(x_0), \ldots, f(x_{n-1})) \in R\}.$$

Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура с носител A в краен или изброимо безкраен език $\mathscr{L} = \{R_i\}_{i<s}$, където $s \leq \omega$. Определяме тоталната функция $f^{-1}(\mathfrak{A}) : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ по следния начин:

- ако $u = \langle k, v\rangle$ и $k < s$, то $f^{-1}(\mathfrak{A})(u) = 1 \;\leftrightarrow\; v \in f^{-1}(R_k)$,
- ако $u = \langle k, v\rangle$ и $k < s$, то $f^{-1}(\mathfrak{A})(u) = 0 \;\leftrightarrow\; v \notin f^{-1}(R_k)$,
- ако $u = \langle k, v\rangle$ и $k \geq s$, то $f^{-1}(\mathfrak{A})(u) = 0$,

и казваме, че $f^{-1}(\mathfrak{A})$ е *копие* на $\mathfrak{A}$.

Можем да разглеждаме $f^{-1}(\mathfrak{A})$ и като структурата с носител $\mathbb{N}$, която е получена от $\mathfrak{A}$ чрез изоморфизма f. За структура с носител $\mathbb{N}$, нека да означим с $D(\mathfrak{A})$ множеството от всички кодове на формули принадлежащи на атомарната диаграма на $\mathfrak{A}$, която е зададен от някое Гьоделево кодиране на всички формули в съответния език. Това означава, че на

$f^{-1}(\mathfrak{A})$ може да се гледа и като на множеството от кодове на формулите принадлежащи на структурата $f^{-1}(\mathfrak{A})$.

За една структура $\mathfrak{A}$, ще казваме, че тя е изчислима или че притежава свойството $\mathfrak{C}$ (например Σ^0_n, Δ^1_1), ако нейната атомарна диаграма $D(\mathfrak{A})$ е изчислима, или съответно тя притежава свойството $\mathscr{C}$. Също така, ще казваме, че $\mathfrak{A}$ има Тюрингова степен $\mathbf{a}$, ако $D(\mathfrak{A}) \in \mathbf{a}$.

Рихтер [24] започва изучаването на понятието спектър на изброима структура.

Определение 4. Спектърът от Тюрингови степени на структурата $\mathfrak{A}$ е множеството

$$DS(\mathfrak{A}) = \{d_T(f^{-1}(\mathfrak{A})) \mid f \text{ е номерация } \mathfrak{A}\}.$$

За изчислим ординал α, определяме α-ия скок спектър от Тюрингови степени на $\mathfrak{A}$ като

$$DS_\alpha(\mathfrak{A}) = \{d_T(f^{-1}(\mathfrak{A})^{(\alpha)}) \mid f \text{ е номерация на } \mathfrak{A}\}.$$

Понятието спектър на структура ни дава начин за сравнение на структури, например за два изчислими ординала α, β и две структури $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, можем да зададем въпроса дали

$$DS_\alpha(\mathfrak{A}) = DS_\beta(\mathfrak{B}).$$

В някои случаи тази връзка може да не е особено полезна. Например, ако $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имат изчислими копия, то следва, че

$$DS(\mathfrak{A}) = DS(\mathfrak{B}),$$

но тези структури могат да имат много различни теоретико-моделни свойства. Поради тази причина, ние ще въведем друг начин за сравнение на структури, подходящ за нашите разглеждания, основан на понятието определимост в структура чрез изчислими безкрайни формули.

Безкрайни формули

За един език $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ формулите са безкрайни формули, в които дизюнкциите и конюнкциите са върху изброими множества.

В $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ формулите ние можем да преместваме отрицанието навътре и навън през безкрайни $\bigvee$ и $\bigwedge$ по познатия начин, но не можем да местим кванторите. Броейки смените на $\bigvee$ и $\bigwedge$, можем да класифицираме $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ формулите като $\Sigma^{\mathrm{inf}}_\alpha$ и $\Pi^{\mathrm{inf}}_\alpha$ за изброими ординали α. $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ формулите напълно определят изброимите структури за езика $\mathscr{L}$.

Теорема 3 (Скот)**.** Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура в изброим език. Тогава съществува $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$ затворена формула $\sigma_{\mathfrak{A}}$, такава че за всяка изброима структура $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \ \leftrightarrow \ \mathfrak{B} \models \sigma_{\mathfrak{A}}.$$

Изчислимите безкрайни формули са въведени от Аш [1]. Най-общо, те са формули, в които позволяваме да имаме безкрайни конюнкции и дизюнкции, които са над изчислимо номеруеми множества. Ще дадем неформална дефиниция на тези формули над даден език $\mathscr{L}$.

1) Σ^c_0 и Π^c_0 формулите са крайните безкванторни формули.

2) Нека $\alpha > 0$ е изчислим ординал.

   а) Една Σ^c_α формула $\varphi(\overline{x})$ е дизюнкция на изчислим номеруемо множество от формули от вида $\exists\overline{y}\psi$, където ψ е Π^c_β формула за някое $\beta < \alpha$, и $\overline{y}$ съдържа променливите на ψ, които не са в $\overline{x}$.

   б) Една Π^c_α формула $\varphi(\overline{x})$ е конюнкция на изчислимо номеруемо множество от формули от вида $\forall\overline{y}\psi$, където ψ е Σ^c_β формула за някое $\beta < \alpha$, и $\overline{y}$ включва променливите на ψ, които не са в $\overline{x}$.

За едно множество от естествени числа X, определяме формулите $\Sigma^{c,X}_\alpha$ и $\Pi^{c,X}_\alpha$ по същия начин, но безкрайните дизюнкции и конюнкции са върху множества, изчислимо номеруеми относно X.

Определение 5. Една релация R е Σ^c_α *определима* в структурата $\mathfrak{A}$, ако съществува Σ^c_α формула $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ и краен брой параметри $\overline{a}$ в A, такива че

$$\overline{b} \in R \ \leftrightarrow \ \mathfrak{A} \models \psi(\overline{b}, \overline{a}).$$

Означаваме с $\Sigma^c_\alpha(\mathfrak{A})$ фамилията от всички релации Σ^c_α определими в $\mathfrak{A}$.

Теорема 4 (Аш)**.** Нека $\mathfrak{A}$ да бъде произволна структура с носител $\mathbb{N}$. За формула $\varphi(\overline{x})$, нека

$$\varphi^{\mathfrak{A}} = \{\overline{a} \in A \mid \mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})\}.$$

Ако $\varphi(\overline{x})$ е Σ^c_α формула, то $\varphi^{\mathfrak{A}}$ е $\Sigma^0_\alpha(D(\mathfrak{A}))$, и ако $\varphi(\overline{x})$ е Π^c_α формулата, то $\varphi^{\mathfrak{A}}$ е $\Pi^0_\alpha(D(\mathfrak{A}))$ формула.

Релативни Σ^0_α релации

Определение 6. Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура и $\mathfrak{C}$ е сложностен клас, например Σ^0_α, Π^0_α, Δ^1_1. Казваме, че релацията R върху A е *релативно*[1] $\mathfrak{C}$ върху $\mathfrak{A}$, ако за всяка номерация f на $\mathfrak{A}$, $f^{-1}(R)$ е $\mathfrak{C}$ относно $f^{-1}(\mathfrak{A})$.

Теорема 5 (Аш-Найт-Манаси-Слеман [4], Чисхолм [9])**.** Нека е дадена релация R върху $\mathfrak{A}$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:

1) R е релативно Σ^0_α.

2) Съществува Σ^c_α формула $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ и параметри $\overline{b} \in A$, за които

$$(\forall \overline{a} \in A)[\overline{a} \in R \;\leftrightarrow\; \mathfrak{A} \models \phi(\overline{a}, \overline{b})],$$

т.е. $R \in \Sigma^c_\alpha(\mathfrak{A})$.

3 Консервативни разширения

Определение 7 (Сосков)**.** Нека f и h са номерации на изброимите структури $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Ще пишем $f \leq^\alpha_\beta h$, ако

1) $\Delta^0_\alpha(f^{-1}(\mathfrak{A})) \leq_T \Delta^0_\beta(h^{-1}(\mathfrak{B}))$ и

2) $E(f, h) = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \;\&\; f(x) = h(y)\}$ е $\Sigma^0_\beta(h^{-1}(\mathfrak{B}))$.

Определение 8 (Сосков)**.** Ако $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са изброими структури,

1) $\mathfrak{A} \Rightarrow^\alpha_\beta \mathfrak{B}$, ако за всяка номерация h на $\mathfrak{B}$ съществува номерация f на $\mathfrak{A}$, за която $f \leq^\alpha_\beta h$.

2) $\mathfrak{A} \Leftarrow^\alpha_\beta \mathfrak{B}$, ако за всяка номерация f на $\mathfrak{A}$ съществува номерация h на $\mathfrak{B}$, за която $h \leq^\beta_\alpha f$.

3) $\mathfrak{A} \Leftrightarrow^\alpha_\beta \mathfrak{B}$, ако $\mathfrak{A} \Rightarrow^\alpha_\beta \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \Leftarrow^\alpha_\beta \mathfrak{B}$.

Казваме, че $\mathfrak{B}$ е (α, β)-*консервативно разширение* на $\mathfrak{A}$, ако $A \subseteq B$ и $\mathfrak{A} \Leftrightarrow^\alpha_\beta \mathfrak{B}$.

Следващата теорема мотивира използването на термина "консервативно разширение", т.е. ако $\mathfrak{B}$ е (α, β)-консервативно разширение на $\mathfrak{A}$, то Σ^c_α-определимите множества в $\mathfrak{A}$ се запазват като Σ^c_β-определими множества в $\mathfrak{B}$.

[1] relatively intrinsically на англ.

Теорема 6. Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са изброими структури и $A \subseteq B$. За всяко $\alpha, \beta < \omega_1^{CK}$,

1) ако $\mathfrak{A} \Rightarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B}$, то $(\forall X \subseteq A)[X \in \Sigma_\alpha^c(\mathfrak{A}) \to X \in \Sigma_\beta^c(\mathfrak{B})]$;

2) ако $\mathfrak{A} \Leftarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B}$, то $(\forall X \subseteq A)[X \in \Sigma_\beta^c(\mathfrak{B}) \to X \in \Sigma_\alpha^c(\mathfrak{A})]$;

3) ако $\mathfrak{A} \Leftrightarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B}$, то $(\forall X \subseteq A)[X \in \Sigma_\alpha^c(\mathfrak{A}) \leftrightarrow X \in \Sigma_\beta^c(\mathfrak{B})]$.

Твърдение 1. Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са изброими нетривиални структури с $A \subseteq B$.

(i) Ако $\mathfrak{A} \Rightarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B}$, то $DS_{\beta'}(\mathfrak{B}) \subseteq DS_{\alpha^-}(\mathfrak{A})$.

(ii) Ако $\mathfrak{A} \Leftarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B}$, то $DS_{\alpha^-}(\mathfrak{A}) \subseteq DS_{\beta'}(\mathfrak{B})$;

(iii) Ако $\mathfrak{A} \Leftrightarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B}$, то $DS_{\alpha^-}(\mathfrak{A}) = DS_{\beta'}(\mathfrak{B})$;

Тук, за произволен изчислим ординал α, означаваме $\alpha^- = \alpha - 1$, ако $\alpha < \omega$ и $\alpha^- = \alpha$, в противен случай.

Московакисово разширение

За да изследваме при какви случаи имаме другите посоки в Теорема 6, първо ще трябва да въведем кодиращ апарат.

Следвайки Московакис [23], дефинираме структурата $\mathfrak{A}^\star$ за $\mathfrak{A}$, която наричаме Московакисово разширение на $\mathfrak{A}$. Нека 0 е обект, който не принадлежи на A и Π да бъде функция, която образува двойки, като нито 0, нито някой елемент на A е наредена двойка. Нека $A^\star$ да бъде най-малкото множество съдържащо всички елементи на $A_0 = A \cup \{0\}$ и затворено относно Π.

Асоциираме елемент $n^\star$ в $A^\star$ за всяко $n \in \omega$ с индукция. Нека

$$0^\star = 0 \text{ и } (n+1)^\star = \Pi(0, n^\star).$$

Означаваме с $\mathbb{N}^\star$ множеството от всички елементи $n^\star$. Нека L и R да бъдат функциите върху $A^\star$ като:

$$\begin{aligned}
&L(0) = R(0) = 0;\\
&(\forall t \in A)[L(t) = R(t) = 1^\star];\\
&(\forall s, t \in A^\star)[L(\Pi(s,t)) = s \;\&\; R(\Pi(s,t)) = t].
\end{aligned}$$

Сега можем да кодираме крайни редици от елементи. Нека

$$\Pi_1(t_1) = t_1 \text{ и } \Pi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n+1}) = \Pi(t_1, \Pi_n(t_2, \dots, t_{n+1})),$$

за всяко $t_1, \dots, t_{n+1} \in A^\star$. За всеки предикат P_i в структурата $\mathfrak{A}$ определяме предиката $P_i^\star$ върху $A^\star$ като

$$P_i^\star(t) \leftrightarrow (\exists a_1, \dots, a_{n_i} \in A)[t = \Pi_{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i}) \ \& \ P_i(a_1, \dots, a_{n_i})].$$

За една номерация f на $\mathfrak{A}^\star$,

$$f^{-1}(\Pi_n)(x_0, \dots, x_{n-1}) = y \ \leftrightarrow \ (\exists a_0, \dots, a_n \in A)[\bigwedge_{i<n} f(a_i) = x_i \ \& \ \Pi_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = f(y)]$$

Определение 9. Московакисовото разширение на $\mathfrak{A}$ е структурата

$$\mathfrak{A}^\star = (A^\star; A_0, P_1^\star, \dots, P_s^\star, G_\Pi, G_L, G_R, =),$$

където G_Π, G_L и G_R са графиките на Π, L и R.

За две структури $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ с носители $A \subseteq B$, ние приемаме, че техните Московакисови разширения $\mathfrak{A}^\star$ и $\mathfrak{B}^\star$ са определени по такъв начин, че $A^\star \subseteq B^\star$.

Лема 1. Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са изброими структури с носители $A \subseteq B$, и $0 < \alpha, \beta < \omega_1^{CK}$. Тогава

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B} \ \leftrightarrow \ \mathfrak{A}^\star \Leftrightarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B}^\star.$$

Следващите резултати дават условия, при които имаме другите посоки от Теорема 6.

Теорема 7. Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са изброими структури с $A^\star \subseteq B$ и изчислими ординали $\alpha, \beta > 0$. Тогава

$$(\forall X \subseteq A^\star)[X \in \Sigma_\alpha^c(\mathfrak{A}^\star) \to X \in \Sigma_\beta^c(\mathfrak{B})] \ \to \ \mathfrak{A} \Rightarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B}.$$

Следствие 1. За всеки две структури $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ с носители $A \subseteq B$ и изчислими ординали $\alpha, \beta > 0$,

$$\mathfrak{A} \Rightarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B} \leftrightarrow (\forall X \subseteq A^\star)[X \in \Sigma_\alpha^c(\mathfrak{A}^\star) \to X \in \Sigma_\beta^c(\mathfrak{B}^\star)].$$

В частния случай $A = B$,

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow_\beta^\alpha \mathfrak{B} \leftrightarrow (\forall X \subseteq A^\star)[X \in \Sigma_\alpha^c(\mathfrak{A}^\star) \leftrightarrow X \in \Sigma_\beta^c(\mathfrak{B}^\star)].$$

4 Скок структури

Да разгледаме следната неформална дефиниция на релацията

$$K_\alpha^{\mathfrak{A}} = \{\ulcorner \phi(\overline{a}) \urcorner \mid \mathfrak{A} \models \phi(\overline{a}), \phi \text{ е } \Pi_\alpha^c \text{ формула } \}.$$

Тук сме използвали кодиране $\ulcorner . \urcorner$ на формули и n-орки на елементите от A.

Ясно е, че имаме ефективно кодиране в естествените числа на Π_α^c формулите. След като сме разширили стурктурата $\mathfrak{A}$ до нейното Московакисово разширение $\mathfrak{A}^\star$, и следователно можем да кодираме крайни редици в нея, е възможно да определим $K_\alpha^{\mathfrak{A}}$ в $A^\star$.

Формалната дефиниция на $K_\alpha^{\mathfrak{A}}$ използва понятието форсинг. Имаме следното важно свойство на релацията $K_\alpha^{\mathfrak{A}}$.

Лема 2. Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура. Тогава за всеки изброим ординал $\alpha > 0$, $K_\alpha^{\mathfrak{A}}$ е релативно $\Delta_{\alpha'}^0$ върху $\mathfrak{A}^\star$, където $\alpha' = \alpha + 1$, ако $\alpha < \omega$, и $\alpha' = \alpha$, в противен случай.

А. Соскова и И. Сосков [32] дават дефиниция на понятието скок структура $\mathfrak{A}$ като $\mathfrak{A}' = (\mathfrak{A}^\star, K_1^{\mathfrak{A}})$. Използвайки релацията $K_\alpha^{\mathfrak{A}}$, ние можем да обобщим тази дефиниция за произволни изчислими ординали.

Определение 10. Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура. За всеки изчислим ординал $\alpha > 0$, ние определяме α-тия скок на $\mathfrak{A}$ по следния начин:

$$\mathfrak{A}^{(0)} = \mathfrak{A} \text{ и } \mathfrak{A}^{(\alpha)} = (\mathfrak{A}^\star, K_\alpha^{\mathfrak{A}}),$$

където $\mathfrak{A}^\star$ е Московакисовото разширение на $\mathfrak{A}$. Езикът на скок структурата $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ е езикът на структурата $\mathfrak{A}^\star$ заедно с нов предикатен символ K, чиято интерпретация в $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ е тази на $K_\alpha^{\mathfrak{A}}$.

Твърдение 2. За всяка изброима структура $\mathfrak{A}$ и изчислим ординал $\alpha > 0$,

1) $\mathfrak{A} \Leftrightarrow_1^{\alpha'} \mathfrak{A}^{(\alpha)}$;

2) $\mathfrak{A}^\star \Leftrightarrow_1^{\alpha'} \mathfrak{A}^{(\alpha)}$;

3) за всеки изчислим ординал β, $\mathfrak{A}^{(\beta)} \Leftrightarrow_\alpha^{\alpha+1} \mathfrak{A}^{(\beta+1)}$.

4) $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \Rightarrow_1^1 \mathfrak{A}^{(\alpha+1)}$, но $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \not\Leftarrow_1^1 \mathfrak{A}^{(\alpha+1)}$.

Тук означаваме $\alpha' = \alpha + 1$, ако $\alpha < \omega$, и $\alpha' = \alpha$, в противен случай.

Твърдение 3. Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура и нека $\alpha, \beta > 0$ да бъдат изчислими ординали. Тогава:

1) $(\forall X \subseteq A^\star)[X \in \Sigma^c_{\alpha+1}(\mathfrak{A}^\star) \ \leftrightarrow \ X \in \Sigma^c_\alpha(\mathfrak{A}')]$;

2) $(\forall X \subseteq A^\star)[X \in \Sigma^c_{\alpha+1}(\mathfrak{A}^{(\beta)}) \ \leftrightarrow \ X \in \Sigma^c_\alpha(\mathfrak{A}^{(\beta+1)})]$.

Твърдение 4. За всеки две изброими структури $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ с носители $A \subseteq B$, и изчислими ординал $\alpha, \beta > 0$,

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow^{\alpha'}_{\beta'} \mathfrak{B} \ \leftrightarrow \ \mathfrak{A}^{(\alpha)} \Leftrightarrow^1_1 \mathfrak{B}^{(\beta)},$$

където за един ординал α, $\alpha' = \alpha + 1$, за $\alpha < \omega$, $\alpha' = \alpha$, иначе.

5 Обръщане на скока

Нека е дадена изброима стурктура $\mathfrak{A}$. Тук ще изучаваме въпроса за съществуване на структура, която обръща скока на $\mathfrak{A}$, т.е. теорема която прилича на теоремата на Фридберг.

Теорема 8 (Фридберг [11])**.** За всяка Тюрингова степен $\mathbf{a}$, съществува Тюрингова степен $\mathbf{b}$, за която:

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{0}' = \mathbf{b}'.$$

За една структура $\mathfrak{A} = (A; P_0, \ldots, P_{s-1})$ с $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$ и множество $X \subseteq \mathbb{N}$, ние определяме структурата

$$\mathfrak{A} \oplus X = (A \cup \mathbb{N}; A, \mathbb{N}, P_0, \ldots, P_{s-1}, G_S, X),$$

където $G_S = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Нашият основен резултат тук е следната теорема.

Теорема 9. Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура и $\alpha \geq 2$ е изчислим ординал наследник. Тогава съществува изброима структура $\mathfrak{N}$, такава че

$$\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha \Leftrightarrow^1_\alpha \mathfrak{N}.$$

Освен това,

- $DS(\mathfrak{A}) = DS_{\alpha^-}(\mathfrak{N})$, където $\alpha^- = \alpha - 1$, за $\alpha < \omega$, и $\alpha^- = \alpha$, иначе
- $(\forall X \subseteq A)[X \in \Sigma^c_\alpha(\mathfrak{N}) \ \leftrightarrow \ X \in \Sigma^c_1(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha) \ \leftrightarrow \ X \in \Sigma^{c,\Delta^0_\alpha}_1(\mathfrak{A})]$.

Като използваме понятието скок структура, получаваме следното следствие, което наподобява теоремата на Фридберг.

Следствие 2. Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура и $\alpha \geq 2$ е изчислим ординал наследник. Тогава съществува изброима структура $\mathfrak{N}$, такава че

$$\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha \Leftrightarrow^1_1 \mathfrak{N}^{(\alpha)}.$$

Основната идея на конструкцията на структурата $\mathfrak{N}$ се основава на проблема за кодиране на множество от естествени числа чрез редица от структури. Този проблем е първоначално разгледан от Аш и Найт [2].

Определение 11. Нека е дадено множество от естествени числа S и двойка структури $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ с един и същ език. Казваме, че редицата от структури $\mathscr{C} = \{\mathfrak{C}_n\}_{n<\omega}$ *кодира* множеството S, ако

$$\mathfrak{C}_n \cong \begin{cases} \mathfrak{B}_1, & \text{ако } n \in S \\ \mathfrak{B}_0, & \text{ако } n \notin S. \end{cases}$$

Редицата $\mathscr{C} = \{\mathfrak{C}_n\}_{n<\omega}$ е равномерно изчислима, ако е построена от изчислими копия на $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ и за всяко n ние можем ефективно да намерим изчислим индекс за $\mathfrak{C}_n$.

Ако $\mathscr{C}$ е равномерно изчислима редица, то казваме, че $\mathscr{C}$ *силно кодира* множеството S.

Въпрос 1 ([2])**.** Нека α е изчислим ординал. Нека $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ са изчислими структури в един и същ език. Да се определят условия за $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ и множество S, за които съществува редица от структури $\mathscr{C}$, която силно кодира S.

Пример 1. Следните условия са еквивалентни:

1) съществува равномерна изчислима редица от линейни наредби $\{\mathfrak{C}_n\}_{n<\omega}$, за които

$$\mathfrak{C}_n \cong \begin{cases} \omega, & \text{ако } n \in S \\ \omega^\star, & \text{ако } n \notin S, \end{cases}$$

2) S е Δ^0_2 множество.

За по-общи резултати е необходимо да въведем някои понятия.

Определение 12. Нека K е клас от структури във фиксиран език. Определяме релациите $\leq_\alpha$ върху двойки $(\mathfrak{A}, \overline{a})$, $(\mathfrak{B}, \overline{b})$, където $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$ и $\overline{a}$ са в $\mathfrak{A}$, $\overline{b}$ са в $\mathfrak{B}$. Нека също $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имат равни дължини. Тогава

1) $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \leq_1 (\mathfrak{B}, \overline{b})$ точно тогава, когато всички крайни Σ_1 формули, които са верни за $\overline{b}$ в $\mathfrak{B}$ са верни за $\overline{a}$ в $\mathfrak{A}$,

2) за $\alpha > 1$, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \leq_\alpha (\mathfrak{B}, \overline{b})$ точно тогава, когато за всяко $\overline{d}$ в $\mathfrak{B}$ и всяко β, $1 \leq \beta < \beta$, съществува $\overline{c}$ в $\mathfrak{A}$, за което $(\mathfrak{B}, \overline{b}, \overline{d}) \leq_\beta (\mathfrak{A}, \overline{a}, \overline{c})$.

Определение 13. Нека $K = \{\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots\}$ е краен или изброимо безкрайна фамилия от структури. Тогава ще казваме, че K е *α-подходяща*, ако структурите $\mathfrak{A}_i$ са равномерно изчислими, и за $\beta < \alpha$, релациите $\leq_\beta$ върху двойките $(\mathfrak{A}_i, \overline{a})$, за $\overline{a}$ в $\mathfrak{A}_i$, са изчислимо номеруеми, равномерно по β.

Основния резултат, до който те достигат, е следната теорема.

Теорема 10 (Аш, Найт [2])**.** Нека $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ са структури със свойствата:

а) $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ са изчислими структури, определени в един и същ релационен език $\mathscr{L}$,

б) двойката $\{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1\}$ е α-подходяща,

в) всички Σ_α^{inf} (в езика $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$) затворени формули верни в $\mathfrak{B}_0$ са верни в $\mathfrak{B}_1$.

Тогава за всяко Π_α^0 множество от естествени числа S съществува редица $\mathscr{C}$, която силно кодира S.

Нека $\mathfrak{A} = (A, R_0, R_1, \dots, R_{s-1})$ е изброима структура. Да разгледаме копието $f^{-1}(\mathfrak{A})$ на $\mathfrak{A}$ и множествата $f^{-1}(R_i)$. Да предположим, че имаме редиците от структури $\mathscr{C}_i$, които кодират всяко множество $f^{-1}(R_i)$. Можем да построим нова структура $\mathfrak{N}$, която е, най-общо казано, непресичащото се обединение на всички тези редици от структури $\mathscr{C}_i$. Тогава естествения въпрос, който може да се зададе е какви изчислителни свойства имат копията на тази нова структура $\mathfrak{N}$, сравнени с копията на $\mathfrak{A}$.

За простота, конструкцията и резултатите са представени за случая $\mathfrak{A} = (A; R)$.

Определение 14 ([12])**.** Нека е дадена изброимата структура $\mathfrak{A} = (A, R)$, $R \subseteq A^n$, двойка структури $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ в един и същ релационен език. Тогава

$$\mathfrak{N} = (A \cup U, A, U, Q, \dots),$$

където

1) $A \cap U = \emptyset$;

2) Q е $(n+1)$-арна релация, която асоциира на всяка n-орка $\overline{a}$ в A безкрайно множество $U_{\overline{a}}$, където $x \in U_{\overline{a}} \leftrightarrow \mathfrak{N} \models Q(\overline{a}, x)$;

3) Множествата $U_{\overline{a}}$ образуват разделяне на U;

4) Всяка от другите релации на $\mathfrak{N}$ (в ...) съответства на някой символ в езика на $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, и представлява обединението на нейните рестрикции до множествата $U_{\overline{a}}$;

5) За всяка n-орка $\overline{a}$ в A, ако $\mathscr{U}_{\overline{a}} = (U_{\overline{a}}, \dots)$, то

$$\mathscr{U}_{\overline{a}} \cong \begin{cases} \mathfrak{B}_1, & \text{ако } \mathfrak{A} \models R(\overline{a}) \\ \mathfrak{B}_0, & \text{ако } \mathfrak{A} \models \neg R(\overline{a}) \end{cases}$$

Горната конструкция на структурата $\mathfrak{N}$ е дадена от Гончаров, Харизанов, Найт, МакКой, Милър и Соломон [12]. От тяхната работа може да се извлече следващия резултат, който е от вида "обръщане на скока" за спектри на структури.

Теорема 11 ([12])**.** Нека $\mathfrak{A} = (A, R)$ е структура, $\alpha \geq 2$ е изчислим ординал *наследник*, нека $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ са структури, които удовлетворяват свойствата:

а) $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ са изчислими структури с носители естествените числа и в един и същ релационен език $\mathscr{L}$,

б) $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ удовлетворяват същите Σ_β^{inf} (в езика $\mathscr{L}_{\omega_1\omega}$) затворени формули за всяко $\beta < \alpha$,

в) всяка $\mathfrak{B}_i$ удовлетворява някоя Σ_α^c затворена формула, която не е вярна в другата структура.

г) двойката $\{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1\}$ е α-подходяща,

Нека $\mathfrak{N}$ е структурата построена в Определение 14 за $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$. Тогава $\mathfrak{A}$ има $\Delta_\alpha^0(X)$-изчислимо копие точно тогава, когато $\mathfrak{N}$ има X-изчислимо копие. От това следва, че ако

$$DS(\mathfrak{A}) \subseteq \{\mathbf{a} \mid \Delta_\alpha^0 \leq_T \mathbf{a}\}, \text{ то } DS(\mathfrak{A}) = DS_{\alpha^-}(\mathfrak{N}).$$

Условието структурите $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ да бъдат α-подходящи се различава от всички останали условия, които разглеждаме, по това, че то е условие за конкретни копия на $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$. Ние дори нямаме гаранция, че то се запазва измежду всички изчислими копия на дадена структура. Доказателството на Теорема 11 съществено използва това условие. Ние доказваме теорема, която е по-слаб вариант на Теорема 11, но без условието двойката $\{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1\}$ да бъде α-подходяща.

Теорема 12. Нека $\mathfrak{A} = (A, R)$ е структура, $\alpha \geq 2$ е изчислим ординал *наследник*, нека $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ са структури, които удовлетворяват свойствата:

а) $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ са изчислими структури с носители естествените числа и в един и същ релационен език $\mathscr{L}$,

б) $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ удовлетворяват същите Σ^c_β затворени формули за всяко $\beta < \alpha$,

в) всяка $\mathfrak{B}_i$ удовлетворява някоя Σ^c_α затворена формула, която не е вярна в другата структура.

Тогава за $\mathfrak{N}$, построена както в Определение 14 за $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$, ние имаме следното:

1) $\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha \Leftrightarrow^1_\alpha \mathfrak{N}$,

2) $DS_{\alpha^-}(\mathfrak{N}) = DS(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha)$, и

3) $(\forall X \subseteq A)[X \in \Sigma^c_\alpha(\mathfrak{N}) \;\leftrightarrow\; X \in \Sigma^c_1(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha) \;\leftrightarrow\; X \in \Sigma^{c,\Delta^0_\alpha}_1(\mathfrak{A})]$.

Важно е да отбележим, че от Теорема 12 не следва съществуването на изчислимо копие на $\mathfrak{N}$, за разлика от Теорема 11. Ако направим аналог с Въпрос 1 и Теорема 10, Теорема 12 на практика отговаря на следния въпрос.

Въпрос 2. Нека α е изчислим ординал наследник и нека $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$ са изчислими структури в един и същ език. Да се определят условия за $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_1$, и множество S, за които да съществува редица $\mathscr{C}$ от копия на $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$, които кодират S, и

$$\Delta^0_\alpha(\bigoplus_n \mathfrak{C}_n) \equiv_T S \oplus \Delta^0_\alpha.$$

Доказателството на Теорема 12 се разбива на две части, от които по-ясно се вижда къде точно използваме условията а)-в) за структурите $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$.

Теорема 13. Нека $\mathfrak{A} = (A; R)$, $\alpha \geq 2$ е изчислим ординал, $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$ са изчислими структура, за които:

а) $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ са дефинирани в един и същ език $\mathscr{L}$, който включва равенство,

б) $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ удовлетворяват едни и същи затворени Σ^c_β формули в $\mathscr{L}$, за всяко $\beta < \alpha$.

Тогава за всяка номерация f на структурата $\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha$, съществува номерация g на структурата $\mathfrak{N}$, такава че:

1) $E(f, g) \leq_T f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha)$,

2) $\Delta^0_\alpha(g^{-1}(\mathfrak{N})) \leq_T f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha)$.

Следствие 3. Без ограничение, можем да осигурим, че общата част на носителите на $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha$ е носителят A на $\mathfrak{A}$. Тогава Теорема 13 ни казва, че:

$$\mathfrak{N} \Rightarrow^\alpha_1 \mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha.$$

Следствие 4. При условията на Теорема 13, ние получаваме, че:

1) $DS(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha) \subseteq DS_{\alpha^-}(\mathfrak{N})$, и

2) $(\forall X \subseteq A)[X \in \Sigma^c_\alpha(\mathfrak{N}) \ \rightarrow\ X \in \Sigma^c_1(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha)]$.

Теорема 14. Нека $\mathfrak{A} = (A; R)$, $\alpha \geq 2$ е изчислим ординал *наследник* и $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ са изчислими структури, за които:

а) $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1$ са определими в един и същ език $\mathscr{L}$, който включва равенство,

б) всяка $\mathfrak{B}_i$ удовлетворява някоя Σ^c_α затворена формула в $\mathscr{L}$, която не се удовлетворява в другата структура.

Тогава за всяка номерация f на $\mathfrak{N}$, съществува номерация h на $\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha$, за която:

1) $E(f, h) \leq_T f^{-1}(\mathfrak{N})$, и

2) $h^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha) \leq_T \Delta^0_\alpha(f^{-1}(\mathfrak{N}))$.

Следствие 5. Без ограничение, можем да приемем, че общата част на носителите на $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha$ е носителя A на $\mathfrak{A}$. Тогава Теорема 14 казва, че:

$$\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha \Rightarrow^1_\alpha \mathfrak{N}.$$

Следствие 6. При условията на Теорема 14, ние имаме, че:

1) $DS_{\alpha^-}(\mathfrak{N}) \subseteq DS(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha)$, и

2) $(\forall X \subseteq A)[X \in \Sigma^c_1(\mathfrak{A} \oplus \Delta^0_\alpha) \ \rightarrow \ X \in \Sigma^c_\alpha(\mathfrak{N})]$.

Получаваме и обобщение на един резултат на А. Соскова и И. Сосков [32], който те доказват за крайни ординали.

Следствие 7. Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са изброими структури и α е изчислим ординал *наследник*, за който $DS(\mathfrak{A}) \subseteq DS_{\alpha^-}(\mathfrak{B})$. Тогава съществува структура $\mathfrak{C}$, за която

$$DS(\mathfrak{C}) \subseteq DS(\mathfrak{B}) \text{ и } DS_{\alpha^-}(\mathfrak{C}) = DS(\mathfrak{A}),$$

където $\alpha^- = \alpha - 1$, ако $\alpha < \omega$, и $\alpha^- = \alpha$, иначе.

6 Заключение

Авторска справка

Ще дадем кратко обобщение на основните резултати в дисертацията.

Разгледана е нова релация между стурктури наречена *консервативно разширение*. Показани са връзки между нея и други известни релации между структури. Такива са сравняване на стурктури относно техните спектри от Тюрингови степени и чрез релациите определими в съответните структури чрез изчислими безкрайни формули. Основният резултат тук е Теорема 7.

Обобщено е понятието *скок структура*, въведено от А. Соскова и И. Сосков [32]. За всеки изчислим ординал α и изброима структура $\mathfrak{A}$ α-скок структурата $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ е определена и изучена в контекста на релацията консервативно разширение. Неформално, структурата $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ съдържа точно Σ^0_α информацията за стурктурата $\mathfrak{A}$. Формалната дефиниция на $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ използва понятие за форсинг.

Доказана е нова теорема, която има вида на *теорема за обръщане на скока*. Тя казва, че за някои изброими структури $\mathfrak{A}$ и изчислими ординали наследници α, ние можем да построим структура $\mathfrak{B}$, чиято α-скок стурктура $\mathfrak{B}^{(\alpha)}$ е много подобна на първоначалната структура $\mathfrak{A}$, когато те са сравнени чрез релацията консервативно разширение. Конструкцията на структурата $\mathfrak{B}$ се основава на идеята за кодиране на множество от безкрайна редица от стурктури. Тя произлиза от работата на Аш и Найт [2].

Декларация за оригиналност на труда

Авторът заявява, че настоящата дисертация е оригинален научен труд. Употребата на предишни резултати е отразена по честен начин като съответните източници са цитирани според условията на авторските права на техните автори, и/или издатели и/или други притежатели на конкретните авторски права.

Публикации във връзка с дисертацията

1) Stefan Vatev, "Another Jump Inversion Theorem for Structures", *Proceedings of the CiE 2013, LNCS 7921, pp. 414 – 423, Springer-Verlag*

2) Stefan Vatev, "Conservative Extensions of Abstract Structures", *Proceedings of the CiE 2011, LNCS 6735, pp. 300 – 309, Springer-Verlag*

Цитирания на публикациите във връзка с дисертацията

Статия 2) е цитирана в:
Antonio Montalbán, “Rice sequences of relations”, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences Volume 370, 2012, pages 3464-3487

Литература

[1] C. J. Ash, *Stability of recursive structures in arithmetical degrees*, Annals of Pure and Applied Logic **32** (1986), 113 – 135.

[2] C. J. Ash and J. F. Knight, *Pairs of recursive structures*, Annals of Pure and Applied Logic **46** (1990), 211 – 234.

[3] C. J. Ash and A. Nerode, *Intrinsically recursive relations*, Aspects of Effective Algebra, 1981, pp. 26 – 41.

[4] Chris Ash, Julia Knight, Mark Manasse, and Theodore Slaman, *Generic copies of countable structures*, Annals of Pure and Applied Logic **42** (1989), 195 – 205.

[5] Chris Ash and Julia F. Knight, *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy*, Elsevier Science, 2000.

[6] Vesela Baleva, *The jump operation in degrees of structures*, Ph.D. thesis, Sofia University, 2001.

[7] ———, *The jump operation for structure degrees*, Arch. Math. Logic **45** (2006), no. 3, 249 – 265.

[8] Jon Barwise, *Admissible sets and structures*, Springer-Verlag, 1975.

[9] John Chisholm, *Effective model theory vs. recursive model theory*, The Journal of Symbolic Logic **55** (1990), no. 3, 1168 – 1191.

[10] Yu. Ershov, A. Nerode, S. Goncharov, and Remmel, *Handbook of recursive mathematics, volume 1: Recursive model theory*, Elsevier, 1998.

[11] R. M. Friedberg, *A criterion for completeness of degrees of unsolvability*, Journal of Symbolic Logic **22** (1957), 159 – 160.

[12] Sergey Goncharov, Velentina Harizanov, Julia Knight, Charles McCoy, Russell Miller, and Reed Solomon, *Enumerations in computable structure theory*, Annals of Pure and Applied Logic **136** (2005), 219 – 246.

[13] Sergey S. Goncharov and Bakhadir Khoussainov, *Complexity of categorical theories with computable models*, Algebra and Logic **43** (2004), no. 6.

[14] H. Jerome Keisler, *Model theory for infinitary logic*, North-Holland, 1971.

[15] Julia Knight, *Degrees coded in jumps of orderings*, The Journal of Symbolic Logic **51** (1986), no. 4, 1034 – 1042.

[16] Manuel Lerman, *Degrees of unsolvability*, Springer-Verlag, 1983.

[17] John M. MacIntyre, *Transfinite extension of friedberg's completeness criterion*, Journal of Symbolic Logic **42** (1977), no. 1, 1 – 10.

[18] M. S. Manasse, *Techniques and counterexamples in almost categorical recursive model theory*, Ph.D. thesis, University of Wisconsin, Madison, 1982.

[19] David Marker, *Non Σ_n Axiomatizable Almost Strongly Minimal Theories*, Journal of Symbolic Logic **54** (1989), no. 3, 921 – 927.

[20] ———, *Model theory: An introduction*, Springer-Verlag, 2002.

[21] Antonio Montalbán, *Coding and definability in computable structures*, submitted.

[22] ———, *Rice Sequences of Relations*, Philosophical Transactions of the Royal Society A **370** (2012), 3464 – 3487.

[23] Yiannis Moschovakis, *Elementary induction on abstract structures*, North-Holland, 1974.

[24] Linda Richter, *Degrees of structures*, The Journal of Symbolic Logic **46** (1981), no. 1, 723 – 731.

[25] Hartley Rogers Jr., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, The MIT Press, 1987.

[26] Joseph G. Rosenstein, *Linear orderings*, Academic Press, 1982.

[27] Theodore A. Slaman, *Relative to any nonrecursive set*, Proceedings of the American Mathematical Society **126** (1998), 2117 – 2122.

[28] Ivan N. Soskov, *Intrinsically hyperarithmetical sets*, Mathematical Logic Quarterly **42** (1996), 469 – 480.

[29] ———, *Degree spectra and co-spectra of structures*, Ann. Univ. Sofia **96** (2004), 45 – 68.

[30] ———, *Effective properties of Marker's extensions*, J Logic Computation **23** (2013), no. 6, pp. 1335 – 1367.

[31] ______, *A note on ω-jump inversion of degree spectra of structures*, The Nature of Computation. Logic, Algorithms, Applications (Paola Bonizzoni, Vasco Brattka, and Benedikt Löwe, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 7921, Computability in Europe, Springer-Verlag, 2013, pp. 365 – 370.

[32] Alexandra Soskova and Ivan Soskov, *A jump inversion theorem for the degree spectra*, Journal of Logic and Computation **19** (2009), 199 – 215.

[33] Clifford Spector, *Recursive well orderings*, Journal of Symbolic Logic **20** (1955), 151 – 163.

[34] A. Stukachev, *Effective model theory via the σ-definability approach*, Lecture Notes in Logic **41**, to appear.

[35] ______, *A jump inversion theorem for the semilattices of sigma-degrees*, Siberian Advances in Mathematics **20** (2010), no. 1, 68 – 74.

[36] Rimantas Vaitsenavichyus, *On admissible sets with inner resolutions*, Mat. Logika Primen. **6** (1989), pp. 9 – 20.

[37] Stefan V. Vatev, *Conservative Extensions of Abstract Structures*, Models of Computation in Context (Benedikt Löwe, Dag Normann, Ivan Soskov, and Alexandra Soskova, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 6735, Computability in Europe, Springer-Verlag, 2011, pp. 300 – 309.

[38] ______, *Another Jump Inversion Theorem for Structures*, The Nature of Computation (Paola Bonizzoni, Vasco Brattka, and Benedikt Löwe, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 7921, Computability in Europe, Springer-Verlag, 2013, pp. 414 – 424.

[39] Stephan Wehner, *Enumerations, countable structures and turing degrees*, Proceedings of the American Mathematical Society **126** (1998), no. 7, 2131 – 2139.