РЕЦЕНЗИЯ НА ДИСЕРАТЦИЯТА „ОМЕГА СПЕКТРИ НА СТРУКТУРИ“ НА СТЕФАН ВОЛОДЕВ ВЪТЕВ ЗА ПРИДОБИВАНЕ НА ОБРАЗОВАТЕЛНАТА И НАУЧНА СТЕПЕН „ДОКТОР“ В ПРОФЕСИОНАЛНО НАПРАВЛЕНИЕ 4.5 „МАТЕМАТИКА“ (МАТЕМАТИЧЕСКА ЛОГИКА)

ХРИСТО ГАНЧЕВ

Област на изследванията. Представената дисертация е в областта на изчислима теория на моделите. Тази област води началото си с работите на Рабин и Малцев от средата на 20-ти век, като в последните 30 години тя е била активно развивана от Нероуд, Аш, Найт, Ричтер, Дауни, Харизанов, Ершов, Гончаров и редица други автори, добре известни в теорията на изчислимостта. Основен обект на изследванията са изброимите структури, като специално внимание се отделя на техните изчислителни способности. Разглеждат се няколко типа сводимост между структури, като най-изследваната е тази, основана на мучниковата сводимост. При нея на всяка изброима структура $\mathfrak{A}$ се съпоставя, така наречения спектър $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$, който всъщност е съвкупността на всички тюрингови степени, съдържащи някакво копие на структурата. Структурата $\mathfrak{A}$ е сводима към структурата $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \leq_{\mathrm{w}} \mathfrak{B}$), ако $\mathrm{Sp}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$. Относно тази преднаредба структурите, имащи изчислимо копие, играят ролята на минимални елементи, а непресичащите се обединения на структури – ролята на точна горна граница. Тази преднаредба има редица свойства, подобни на основните свойства на тюринговата и номерационната сводимост, което прави съвсем естествен въпроса, какво би трябвало да наричаме скок на структура. Поради връзката между сводимостта $\leq_{\mathrm{w}}$ и тюринговите степени скокът $\mathfrak{A}'$ на една структура $\mathfrak{A}$, трябва да бъде такъв, че $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}') = \{\mathbf{x}' \mid \mathbf{x} \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})\}$. Изследването на скока претърпя бурно развитие през последните 5 години, като различни дефиниции за скок на структура бяха дадени почти едновременно от Сосков и Соскова, и Монталбан (почти по същото време Стукачев дава дефиниция за скок по отношение на друга сводимост между структури). При първата дефиниция скокът на структурата се получава, прибавяйки един нов едноместен предикат, а във втората прибавяйки цяла безкрайна редица от едноместни предикати. Това обаче означава, че скокът е операция, която не запазва алгебричните класове, тъй като и в двата случая скокът на една частична наредба не е частична наредба, скокът на една група не е група и така нататък. Това е общ дефект дължащ се на понятието спектър, тъй като не е ясно, каква теоретико-моделна връзка имат структурите $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ при положение, че $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$ и дали изобщо имат такава.

В дисертацията се предлага една нова сводимост $\Rightarrow^{\alpha}_{\beta}$ между структури, която отново се основава на понятието изчислимост, но е тясно свързана с определимостта с помощта на безкрайни формули. По-точно, за всеки две структури

$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ с носител множеството на естествените числа

$$\mathfrak{A} \Rightarrow^{\alpha}_{\beta} \mathfrak{B} \iff \forall X (X \in \Sigma^0_\alpha(\mathfrak{A}^\star) \Rightarrow X \in \Sigma^0_\beta(\mathfrak{B}^\star)),$$

където $\mathfrak{A}^\star$ и $\mathfrak{B}^\star$ са съответно структурите $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, обогатени с кодиране на наредени двойки. В случая $\alpha = \beta = 1$ сводимостта уточнява сводимостта $\leq_{\mathrm{w}}$. По-точно, за всеки два крайни ординала α и β

$$\mathfrak{A} \Rightarrow^{\alpha+1}_{\beta+1} \mathfrak{B} \Longrightarrow \mathrm{Sp}_\beta(\mathfrak{B}) \subseteq \mathrm{Sp}_\alpha(\mathfrak{A}),$$

а за безкрайни ординали

$$\mathfrak{A} \Rightarrow^{\alpha}_{\beta} \mathfrak{B} \Longrightarrow \mathrm{Sp}_\beta(\mathfrak{B}) \subseteq \mathrm{Sp}_\alpha(\mathfrak{A}),$$

където за всяка структура $\mathfrak{C}$, $\mathrm{Sp}_\alpha(\mathfrak{C}) = \{\mathbf{x}^{(\alpha)} \mid \mathbf{x} \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{C})\}$.

Въпреки, че сводимостта $\Rightarrow^{\alpha}_{\beta}$ е предложена от Сосков, двете публикации на дисертанта, както и настоящата дисертация са първите нейни систематични изследвания. Основните резултати доказани в дисертацията са свързани с понятието скок на структура. Дадена е дефиниция за α-ти скок $\mathfrak{A}^{(\alpha)}$ на структура $\mathfrak{A}$ и е доказано, че $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \Leftrightarrow^{1}_{\alpha+1} \mathfrak{A}$ за крайни α и $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \Leftrightarrow^{1}_{\alpha} \mathfrak{A}$ за безкрайни α, показващо че предложената дефиниция е съгласувана със сводимостта $\Rightarrow^{\alpha}_{\beta}$. Освен това е доказана и теорема за обръщане на скока за ординали наследници, която обобщава резултата на Сосков и Соскова за крайни ординали, и е възможно най-общият резултат, предвид теоремата на Сосков за невъзможност на обръщане на ω скок.

Съдържание на дисертацията. Представената дисертация е написана на английски език и е в обем от 112 страници, разделени на 4 глави, библиография и показател. Първата глава е уводна. В първите параграфи на главата 1.2 – 1.8 накратко се въвеждат основните понятия (тюрингова сводимост, представяния на структури, изчислими ординали, безкраен скок, спектри на структури и изчислими безкрайни формули), които ще бъдат обект на изследване. В параграф 1.9 е формулирана теоремата на Аш-Найт-Манасе-Слеман за съответствието между относително вътрешните Σ^0_α релации и релациите, определими с помощта на Σ^0_α безкрайна формула, в дадена изброима структура. Приведено е доказателство за случая $\alpha = 1$, като целта е читателят да бъде въведен чрез една по-проста конструкция в доказателствата, които ще бъдат извършени в следващите глави. Посочени са няколко примера за приложение на теоремата върху частични наредби, като това дава интуиция на читателя за понятието относително вътрешна Σ^0_α релация, което е специфично за областта на изчислимата теория на моделите и не се среща в другите области на математиката.

Втората глава е посветена на сводимостта $\Rightarrow^{\alpha}_{\beta}$ и на дефиницията на α-ти скок на структура за произволен изчислим ординал α. В началото на главата е дадена дефиницията на сводимостта и е доказано, че

$$\mathfrak{A} \Rightarrow^{\alpha}_{\beta} \mathfrak{B} \Longrightarrow \forall X (X \in \Sigma^0_\alpha(\mathfrak{A}) \Rightarrow X \in \Sigma^0_\beta(\mathfrak{B})).$$

В параграф 2.1 е дадена индуктивна дефиниция на релацията $f \models_\alpha (\neg) F_e(x)$, където f е номерация на дадена структура $\mathfrak{A}$, α е изчислим ординал, а e и x са естествени числа. Доказано е, че $f \models_\alpha (\neg) F_e(x)$ точно тогава, когато x е (не е) елемент на множеството $W_e^{\Delta^0_\alpha(f^{-1}(\mathfrak{A}))}$. Въз основа на дефиницията на $f \models_\alpha (\neg) F_e(x)$ е дадена дефиниция за форсинг релация $\tau \Vdash_\alpha (\neg) F_e(x)$, като е доказано, че тя е монотонна по отношение на разширяващи се крайни части и за генерични номерации f,

$$f \models_\alpha (\neg)F_e(x) \iff \exists\tau \subseteq f(\tau \Vdash_\alpha (\neg)F_e(x)).$$

Доказано е, че релацията $\tau \Vdash_\alpha (\neg)F_e(x)$ е определима с помощта на безкрайна α формула в $\mathfrak{A}$. В параграф 2.2, използвайки въведеният форсинг, е доказана теоремата на Аш-Найт-Манасе-Слеман в общия случай. Тази теорема играе важна роля в по-нататъшните разглеждания и дава илюстрация за връзката между форсинг релацията и определимостта. В параграф 2.3 са изложени някои общи сведения за московакисовите разширения. Тези разширения по същество представляват обогатяване на структурата с кодиране на наредени двойки. Показано е, че релацията $\Rightarrow^\alpha_\beta$ е устойчива на московакисови разширения, а именно

$$\mathfrak{A} \Rightarrow^\alpha_\beta \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A}^\star \Rightarrow^\alpha_\beta \mathfrak{B}^\star.$$

С помощта на кодирането на наредени двойки се дефинират обекти $\tau^\star \in \mathfrak{A}^\star$, съответстващи на крайните части τ, като е доказано, че множествата $\{\tau^\star \mid \tau \Vdash_\alpha F_e(x)\}$ и $\{\tau^\star \mid \tau \Vdash_\alpha \neg F_e(x)\}$ са определими съответно със Σ^0_α и Π^0_α формули. Благодарение на тези резултати в параграф 2.4 е дадена характеризация на релацията $\Rightarrow^\alpha_\beta$ в термините на определимост с помощта на Σ^0_α и Σ^0_β формули. Доказано е, че релацията $\Rightarrow^1_1$ уточнява релацията $\leq_{\mathrm{w}}$. Това са първите основни оригинални резултати в тази глава. В параграф 2.5 се дефинира предикат $K^{\mathfrak{A}}_\alpha$ за всеки изчислим ординал α. Полага се α-тия скок ($\alpha > 0$) на структурата $\mathfrak{A}$ да бъде $\mathfrak{A}^{(\alpha)} = (\mathfrak{A}^\star, K^{\mathfrak{A}}_\alpha)$. Доказано е, че така дефинирания скок е съгласуван с релацията $\Rightarrow^\alpha_\beta$, а именно $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \Leftrightarrow^1_{\alpha+1} \mathfrak{A}$ за крайни α и $\mathfrak{A}^{(\alpha)} \Leftrightarrow^1_\alpha \mathfrak{A}$ за безкрайни α. Доказано е също така, че този скок е съгласуван също и с релацията $\leq_{\mathrm{w}}$, като $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}^{(\alpha)}) = \{\mathbf{x}^{(\alpha)} \mid \mathbf{x} \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})\}$. Този резултат обобщава резултатите на Сосков и Соскова, и Монталбан, като има допълнителното преимущество, че за получаването на конкретен скок се добавя един единствен предикат, зависещ равномерно от височината на скока, което е трудно осъществимо чрез конструкциите от другите дефиниции. В края на главата дисертантът дискутира маркеровата конструкция, използвана от Сосков и Соскова за обръщане на крайни скокове, а така също и невъзможността за обръщане на ω скок в общия случай.

Третата глава е посветена на обръщането на скока. В параграф 3.1 е въведено понятието редица от структури, (силно) кодиращи дадено множество от естествени числа. Изложен е резултатът на Аш и Найт, който казва, че с помощта на две α-приятелски структури $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$, за които всяко безкрайно Σ_α твърдение, вярно в $\mathfrak{B}_0$, е вярно в $\mathfrak{B}_1$, може да се кодира силно всяко Π^0_α множество. Показано е, как една редица от структури може да се „смачка“ в една структура, като това дава възможност един резултат на Гончаров, Харизанов, Найт, Мак Евой, Милър и Соломон за α-приятелски структури да бъде интерпретиран, като теорема за обръщане на скока за релацията $\leq_{\mathrm{w}}$. В параграф 3.2 е въведено понятие за форсинг, като условията, форсиращи дадена формула са крайни редици от крайни инективни функции. Форсингът е дефиниран само за формули от вида $x \in W_e^{\Delta^0_\alpha(D_X(\mathbf{C}))}$ (означени с $F_e(x)$ в дисертацията), където $\mathbf{C} = (f_0, f_1, \ldots)$ е безкрайна редица от номерации, X е множество от естествени числа, а $D_X(\mathbf{C}) = \bigoplus_{i<\omega} f_i^{-1}(\mathfrak{B}_{X(i)})$. Наредбата между условията е покоординатното разширение на функциите. Доказани са няколко леми за монотонността на форсинга. За безкрайни редици от номерации $\mathbf{C}$ е дефинирано индуктивно понятието моделиране на формула $F_e(x)$. Доказано е, че $\mathbf{C} \models F_e(x)$ тогава и само тогава, когато $x \in W_e^{\Delta^0_\alpha(D_X(\mathbf{C}))}$. Дадена е дефиниция за генерични редици от номерации и е доказано, че моделирането и форсирането са съгласувани за генерични номерации. Тези резултати са използвани в следващия параграф, 3.6, за доказателството на двете основни теореми в тази глава. Първата казва, че за всеки изчислим ординал α и всяка изброима структура $\mathfrak{A}$ съществува структура $\mathfrak{N}$, такава че $\mathfrak{N} \Rightarrow_1^{\alpha+1} \mathfrak{A} \oplus \emptyset^{(\alpha)}$, ако α е краен и $\mathfrak{N} \Rightarrow_1^{\alpha} \mathfrak{A} \oplus \emptyset^{(\alpha)}$, ако α е безкраен. Втората теорема казва, че в случай, че ординалът α е наследник, в сила е и обратната сводимост. Така за ординал наследник имаме $\mathfrak{N} \Leftrightarrow_1^{\alpha+1} \mathfrak{A} \oplus \emptyset^{(\alpha)}$, ако ординалът е краен, и $\mathfrak{N} \Leftrightarrow_1^{\alpha} \mathfrak{A} \oplus \emptyset^{(\alpha)}$, ако ординалът е безкраен. Един от важните приноси на доказателството на тези резултати е необходимостта единствено и само на наличието на две структури $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_1$, удовлетворяващи едни и същи безкрайни Σ_β твърдения за $\beta < \alpha$ и различаващи върху някое Σ_α твърдение, без да е необходимо те да бъдат α-приятелски (едно понятие, което само по себе си е доста оплетено и не особено интуитивно).

Критични бележки. В изложението на дисертацията ясно прозира желанието на дисертанта да предаде възможно най-кратко и ясно своите идеи и разсъждения. За съжаление тази добра идея не е реализирана с достатъчно търпение и акуратност. Дисертационния труд изобилства с неточности и недоглеждания. Основната част от тях са свързани с това, че α-тия скок на едно множество X съответства на пълно $\Delta^0_{\alpha+1}$ множество релативно X, когато α е краен и на пълно Δ^0_α множество релативно X, когато α е безкраен. С цел да може да заобиколи този проблем, дисертантът дава модифицирана дефиниция на граничен скок, която обаче създава проблем още при еквивалентността $\langle x, p\rangle \in \Delta^0_\alpha(X) \iff x \in W_x^{\Delta^0_{\alpha(p)}(X)}$, обявена непосредствено след дефиницията на $\Delta^0_\alpha(X)$. За така дефинираното $\Delta^0_\alpha(X)$, тази еквивалентност не е вярна, когато $\alpha(p) < \omega$. Този проблем автоматично се пренася и върху дефиницията на релациите моделиране във втора и трета глава, което от своя страна води до проблем и с дефиницията на релацията на форсинг. Посочената грешка е от технически характер и е отстранена в едно допълнение изпратено в отговор на въпроси на проф. Скордев.

Подобен пример е и желанието да се разглеждат едновременно структури с краен и безкраен език. В дефиницията на формула $\Psi^0_{D,\sigma,u}$ на страница 17 (и по-късно на страници 34 и 83) са разгледани само два от възможните 3 случая за аргумента u, което прави дефиницията валидна само за структури над безкрайни езици.

Друг пример за прекалено желание за опростяване на нещата е доказателството на Твърдение 2.6. Неговата вярност е доста съмнителна и явно това е направило впечатление и на другия рецензент, тъй като в гореспоменатото допълнение е изложена една по-подробна (и най-вече вярна) версия на това доказателство.

Освен тези по-неприятни грешки от престараване, дисертацията изобилства от технически грешки, на които обаче нямам намерение да се спирам. По-съществен пропуск е недостатъчното внимание от страна на дисертанта на понятието равномерност, което е ключово в неговите разглеждания. Така например за доказателството на Теорема 2.3 е необходимо множествата $f^{-1}(X^{\alpha}_{e,x})$, $f^{-1}(Y^{\alpha}_{e,x})$ и $f^{-1}(Z^{\alpha}_{e,x})$ да бъдат изчислими в $\Delta^0_{\beta}(f^{-1}(\mathfrak{B}))$ равномерно по e, x и $\alpha < \beta$. Тази равномерност обаче не е отбелязана. Нещо повече, тя не следва директно от доказателството на Лема 2.5, а преминава през теоремата на Аш (Теорема 1.10), казваща, че първообраза на всяко множество определимо с безкрайна Σ_{α} формула в една структура $\mathfrak{B}$ е Σ^0_{α} в първообраза на структурата.

Бих искал също така да отбележа, че разглеждането на структури с абстрактен носител е излишно. Това е така, защото работим единствено и само със структури, които знаем, че са изброими. Знанието за изброимостта на структурата, автоматично означава знание за биективно съответствие на носителя с множеството на естествените числа, което пък от своя страна означава, че априори разполагаме с изоморфно копие на структурата с носител множеството на естествените числа. Работата с абстрактен носител създава определени затруднения. Така например, за да се построи една номерация на структурата е необходимо да се осигури сюрективност. Това може да стане единствено и само, ако е фиксирано биективно съответствие между носителя на структурата и множеството от естествени числа. Този факт е пропуснат в доказателството на всички теореми, в които се строи номерация на структура, като практически не е осигурена сюрективността на построената номерация.

Всички забелязани от мен грешки са отстраними и не променят качеството и верността на получените резултати.

Оценка на дисертацията. Въпреки редицата неточности, допуснати в изложението, дисертацията е на едно високо ниво. Получени са достатъчно много оригинални, нетривиални и интересни резултати. Въведена и изследвана е една нова сводимост между структури, едновременно уточняваща и обобщаваща стандартната мучникова сводимост породена от спектрите на структурите. За тази сводимост са решени в пълна общност проблемите за изчислим скок и обръщане на изчислимия скок. За да бъдат доказани основните теореми са разработени два технически сложни форсинг апарата.

Резултатите от дисертацията са публикувани в две самостоятелни статии, отпечатани в томове на Lecture Notes in Computer Science. Статията, отбелязана с номер (2), е спечелила наградата за най-добра статия на докторант на конференцията CiE 2011. Тази статия е цитирана в статия на Антонио Монталбан.

Авторефератът към дисертацията правилно отразява приносите на дисертацията.

Във връзка с всичко, изложено по-горе, считам, че представената дисертация напълно отговаря на критериите на ЗРАСРБ, Правилника за неговото прилагане, Правилника на СУ „Св. Кл. Охридски“ за условията и реда за придобиване на научни степени и съответният правилник на ФМИ за придобиване на научна степен „доктор“. Ето защо препоръчвам на уважаемото жури да присъди на ас. Стефан Володев Вътев образователната и научна степен „доктор“.

София, 06.05.2014 г.

Христо Ганчев