# РЕЦЕНЗИЯ

на дисертация на Александър Владимиров Петров
"Риманови и суб-Риманови многообразия със структури"
за присъждане на образователната и научна степен "доктор"
Рецензент: чл.-кор. проф. дмн Олег Мушкаров

**1.** Дисертацията на Александър Петров е посветена на актуални въпроси от две важни области на диференциалната геометрия, свързани с изучаването на многообразия със специални групи от холономии и получаването на аналози на известните теореми на Лихнерович и Обата за първото собствено число на оператора на Лаплас на компактни Риманови многообразия в случая на кватернионно-контактни многообразия. По-точно, резултатите на докторанта в първото направление са върху геометрията на т. нар. хипер-Келерови многообразия с торзия ($HKT$-многообразия), които са въведени от Хове и Пападопулус в 1996 г. Такива многообразия и съответните свързаности възникват естествено в редица физически теории и през последните години са обект на интензивни изследвания от физици и математици. От математическа гледна точка интересът към тях е породен от това, че те са естествено обобщение на хипер-Келеровите многообразия и $HKT$-метриките върху хиперкомплексни многообразия имат аналогични свойства на Келеровите метрики върху комплексни многообразия. Важни примери в тази насока са известният резултат на Грънчаров и Пуун,че подобно на хипер-Келеровия случай всяка $HKT$-метрика допуска локално $HKT$-потенциал и създадената преди десетина години от М.Вербицки теория на Ходж за $HKT$-многообразия. Изследванията във второто направление се отнасят за кватернионно-контактни многообразия($QC$-многообразия) и са мотивирани от редица известни резултати за първото собствено число на суб-лапласиана на строго псевдоизпъкнали $CR$-многообразия и съответното характеризиране на $CR$-сферите.

Сега ще се спра по-подробно на съдържанието на дисертацията, която е разделена на две независими глави.

Основната цел на Глава 1 е получаването на прости диференциално-геометрични условия за това групата на холономии на свързаността на Обата на едно $HKT$-многообразие да е подгрупа на специалната линейна кватернионна група $SL(n, H)$. Тази цел е мотивирана от известния все още нерешен въпрос дали всяко хиперкомплексно многообразие с тривиално канонично разслоение(относно произволна комплексна структура от хиперкомплексната фамилия) е $SL(n, H)$-многообразие и частичният утвърдителен отговор на Вербицки в случая на компактни -многообразия. Нека отбележим,че условието на Вербицки е само достатъчно, защото през 2010 г. А. Суон конструира примери на компактни просто свързани $SL(n, H)$-многообразия, които не допускат $HKT$-структура.

В първите три параграфа на тази глава се дават някои необходими сведения за хиперкомплексните и НКТ-многобразията и е дискутирана връзката им с теория на струната и по-точно с решенията на така наречената система на Щрьомингер. В параграф 1.4 са дефинирани общата и специалната линейни кватернионни групи $GL(n,H)$ и $SL(n,H)$, които от геометрична гледна точка са интересни с това,че са възможни групи от холономии на свързаността на Обата на хиперкомплексни многообразия., и даваме информация за нейната група на холономия. В раздел 1.5 е въведена така наречената форма на Ли на НКТ-многообразие, която е аналог на формата на Ли на почти Ермитово многообразие. Тя се дефинира като $J$-следата на торзионната 3-форма, където $J$ е произволна комплексна структура от хиперкомплексната фамилия. Тук е формулирана и основната Теорема1.5.1, която гласи, че едно $HKT$-многообразието е $SL(n,H)$-многообразие тогава и само тогава, когато формата му на Ли е точна. Освен леснопроверимо условие за холоморфна тривиалност на каноничното разслоение на компактно $HKT$-многообразие тази теорема обобщава известен резултат на Вербицки в балансирания случая (нулева форма на Ли). Нейното доказателство е изложено в параграф 1.6 и е базирано на наблюдението, че разликата на свързаността на Обата и $HKT$-свързаността се изразява чрез торзионната 3-форма и,че всяко $HKT$-многообразие притежава неизродена комплексна форма на обема от тип (2n,0), която е паралелна относно $HKT$-свързаността. В следващия параграф (Твърдение 1.7.2) е намерена алгебрична връзка между тензора и формите от тип на Ricci на свързаността на Обата и формата на Ли на $HKT$-многообразие и е показано,че съответните скаларни кривини на свързаността на Обата са нули. Като следствие са дадени различни достатъчни условия за несъществуване на $HKT$-метрика върху хиперкомплексно многообразие в термините на различните кривини и форми на Ричи на свързаността на Обата. В последния параграф на тази глава (Теорема 1.8.2.) са намерени достатъчни условия за хиперкелеровост на компактно $HKT$-многообразие с точна форма на Ли. Доказателството на този резултат е нетривиално и използва теоремите за анулиране на Иванов-Пападопулус.

Изследванията в Глава 2 на дисертацията са посветени на въпроси за първото собствено число на сублапласиана на компактно кватернионно-контактнито многообразие. Ще напомним,че според класическите теореми на Лихнерович и Обата ако за тензорът на Ричи на $n$-мерно компактно Риманово многообразие $(M,g)$ е в сила неравенството $Ric \geq kg$, то за първото собствено число на оператора на Лаплас е изпълнено $\lambda_1 \geq nk/(n-1)$, като равенството се достига само за стандартната сфера. От друга страна за всяко компактно строго псевдоизпъкнало $CR$-многообразие с фиксирана контактна форма може да се дефинира така наречения сублапласиан, който има много от свойствата на лапласиана. Например, този оператор е хипоелиптичен и с дискретен спектър. За намиране на аналози на споменатите по-горе теореми в този случай се оказва, че ролята на тензора на Ричи се играе от тензора на Ричи на свързаността на Танака-Уебстър, като първата версия на резултат от такъв тип е даден през 1985 г. от Грийнлийв за размерности $\geq 7$. Важно е да се отбележи, че в този случай в априорната оценка участва и торзията на тази свързаност.

Основната цел на тази глава е изследването на горните въпроси за $QC$-многообразия, които могат да се разглеждат като кватернионен аналог на $CR$-многообразията.

В първия параграф на Глава 2 са изложени необходими понятия и факти за $QC$-многообразия. За получаването на аналози на теоремите на Лихнерович и

Обата в този случай основна роля играе свързаността на Бикар. Най-важните резултати в тази насока са Теореми 2.2.1 и 2.2.2. В първата от тях е получена точна оценка за първото положително собствено число на сублапласиана на компактно $QC$-многообразие от размерност $> 7$ при изпълнението на подходяща оценка за тензора на Ричи и торзията на свързаността на Бикар. В следващата теорема е разгледан случая на равенство в априорното неравенството на първата теорема в случая на $QC$-Айнщайново многообразие, като е доказано , че той характеризира 3-Сасакиевата сфера в размерност $4n+3, n > 1$ с точност до $QC$-еквивалентност. Доказателството на Теорема 2.2.1 е основано, както в Римановия и $CR$ случаите, на формула от тип на Бохнер за сублапласиана на $QC$-многообразие(Теорема 2.3.1) и на моменти използва доста тежки пресмятания. Основната идея при доказателството на Теорема 2.2.2 е получаването на експлицитна формула за разликата между сублапласиана и лапласиана на разширената метрика (Лема 2.5.1), водеща до точно неравенства за техните първи собствени числа (Твърдение 2.5.2) и използването на класическите теореми на Лихнерович и Обата.

Друг важен резултат в тази глава е Теорема 2.2.3, в която чрез получената формула от тип на Бохнер е доказано интегрално неравенство, включващо лапласиана и хесиана на дадена функция с компактен носител върху QC-многообразие и тензорите на кривината и торзията на свързаността на Бикар. Като следствие е намерено априорно неравенство между квадрата на лапласиана и нормата на хесиана на една гладка функция с компактен носител върху дадено QC-многообразие от размерност $> 7$. Специализирането на тази оценка за кватернионната група на Хайзенберг води до прецизиране на скорошен резултат на Домокос за групи на Карно и установяването на $C^{1,\alpha}$ регулярност на $p$-сублапласиана върху кватернионната група на Хайзенберг при $p$ близко до 2.

В заключение ще отбележа, че за получаване на резултатите в дисертацията докторантът е преодолял редица трудности от идеен и технически характер и практически използва целия апарат на съвременната диференциална геометрия и геометричния анализ.

**2.** Най-важните резултати в дисертацията са включени в 2 статии, които са приети за печат в реномираните международни математически списания International Mathematics Research Notices( IF-1.116) и Journal of Geometric Analysis(IF-0.86). Една от статиите е съвместна с научния ръководител, а другата е съвместна с научния ръководител и Д. Василев. Считам, че приносът на дисертанта в двете статии е равностоен на останалите автори. Дисертантът е представил информация за три цитирания на горните статии, като две от тях са в списания с висок импакт-фактор и едно в статия в Arxiv.

**3.** Единствената ми критична бележка по изложението в дисертацията е въвеждането на понятието "почти силно $HKT$ многообразие"(стр. 48), тъй като то не се използва по-нататък. Също така формулирането на Следствие 1.8.5 е ненужно, защото това е Теорема 1.8.2,a).

**4.** Авторефератът и авторската справка правилно отразяват основните резултати и научните приносите на дисертацията.

**Заключение.** Всичко казано по-горе показва, че представеният дисертационният труд отговаря напълно на критериите и показателите за придобиването на научната и образователната степен "доктор"съгласно ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности на Софийския университет и на ФМИ на СУ . Това ми дават основание убедено да препоръчвам на членовете на почитаемото Научно Жури да гласуват "за"присъждането на образователната и научна степен "Доктор"на Александър Владимиров Петров.

24.02.2014 г. Подпис:

(чл.-кор. Олег Мушкаров)