С Т А Н О В И Щ Е

За дисертационен труд за присъждане на образователна и научна степен „доктор" в професионално направление 4.5 Математика (Геометрия)

Автор: Александър Владимиров Петков, редовен докторант към катедра „Геометрия" при ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски"

Тема: „Риманови и суб-Риманови многообразия със структури"

Изготвил становището: доц. д-р Симеон Замковой, катедра Геометрия, ФМИ, СУ „Св. Климент Охридски", София

Това становище е изготвено въз основа на заповед No. РД 38 – 58 / 05.02.2014г. на Ректора на СУ „Св. Кл. Охридски" и на решение от първото заседание на научното жури, проведено на 11.02.2014г.

Представеният за рецензиране дисертационен труд съдържа увод, изложение в две глави и списък на цитираните източници. Общият обем на текста е 87 страници, а списъкът на цитираната литература съдържа общо 89 заглавия на английски език.

1. Актуалност на разработвания в дисертационния труд проблем

Понятието многообразие е централно в съвременната чиста математика и теоретична физика. Достатъчно е да споменем теорията на относителността на Айнщайн, теорията на струните и суперструните, квантовата теория на полето, гравитационните и супер-гравитационните теории и други, в които то е основен обект. Наличието на допълнителни структури върху едно гладко многообразие, като метрика, тензорни полета с различни свойства, линейни свързаности и т.н. е предпоставка за богатството от възможности, които имат геометриите на различните многообразия за описанието на "формите" на реалния свят. Бурното развитие на съвременната диференциална геометрия (геометрията на многообразията) е обосновано преди всичко от значението, което тя има за теоретичната и математическата физика, благодарение на мощните си методи за изследване. Особено силна е връзката на физиката през последните 50 години с т.нар. хиперкомплексни многообразия, които са в известен смисъл кватернионен аналог на комплексните многообразия. Връзката е двупосочна. Както чисто диференциално-геометричните изследвания имат влияние върху физиката, така и физически задачи водят до дефинирането на нови типове многообразия и структури върху тях. Пример в това отношение са т. нар. Уравнения на Strominger в Теорията на суперструните. Известно е, че наличието на решение е необходимо и достатъчно условие за време-пространствена суперсиметрия. Многообразията, които възникват във връзка с тези уравнения в 2n-мерния случай са т. нар. KT-многообразия. В 4n-мерния случай възникват техните кватернионни аналози - HKT-многообразията. Важен клон на диференциалната геометрия е т. нар. суб-Риманова геометрия. Тя е обобщение на Римановата геометрия, и основна нейна характеристика е наличието на т. нар. хоризонтално разпределение и метрика върху него, които носят цялата съществена информация за многообразието. Пример за суб-Риманово многообразие е групата на

Heisenberg (комплексната или кватернионната), която носи естествена суб-Риманова структура и играе важна роля във физиката.

Според по-горе написаното, считам че темата на дисертацията е актуална, интересна и трудна.

2. Степен на познаване на състоянието на проблема

Докторантът прави задълбочен обзор на съвременното състояние на проблематиката, свързна с Римановите и суб-Римановите многообразия със структури. Той демонстрира добро познаване на изследваната област. Библиографската справка включва 89 информационни ресурса, което показва, че той е запознат много добре с последните постижения в избраното научно направление. Направено е подробно разглеждане на резултатите от изследванията, отразени в литературните източници, което показва неговите възможности за творческа и научна интерпретация на литературния материал.

3. Кратка аналитична характеристика на естеството и оценка на достоверността на материала, върху който се градят приносите на дисертационния труд

Дисертационният труд е прецизно оформен, като е структуриран в 2 глави, следвайки логическата последователност.

В първа глава се разглеждат т. нар. хипер-Келерови многообразия с торзия (или съкратено HKT-многообразия). HKT-многообразията са въведени от Howe и Papadopoulos. Хипер-Келерова структура с торзия (или HKT-структура) върху едно хипер-Ермитово многообразие наричаме линейна свързаност, която запазва хипер-Ермитовата структура и има антиси-метрична (totally skew-symmetric) торзия. Когато торзионната 3-форма е затворена, HKT-структурата се нарича силна (strong). Когато торзионната 3-форма е безследна (trace-free), говори се за балансирана (balanced) HKT-структура. В случай на нулева торзия, хипер-Ермитовото многообразие е хипер-Келерово. Освен че са интересни от чисто математическа гледна точка, HKT-структурите намират широко приложение в теоретичната и математическата физика, като например супергравитационните теории и суперсиметричните сигма-модели с Wess-Zumino член. Важно е да подчертаем, че HKT-структурите възникват именно във физиката. Добре известни са някои геометрични и топологични свойства на HKT-многообразията. Например, необходимо и достатъчно условие за това, едно почти хипер-Ермитово многообразие да бъде HKT-многообразие в термините на каноничната (intrinsic) торзия на една Sp(n)Sp(1)-структура върху многообразието. Howe и Papadopoulos въвеждат понятието HKT-метрика върху хиперкомплексно многообразие, съществуването на която е еквивалентно със съществуването на HKT-структура върху съответното хипер-Ермитово многообразие. В работата на Grantcharov и Poon е дефинирано понятието HKT-потенциал. Освен това, може да се докаже, подобно на хипер-Келеровия случай, че локално всяка HKT-метрика допуска HKT-потенциал. Една от версиите на Теорията на Hodge се разкрива забележителната аналогия между комплекса на de Rham на Келерово многообразие и комплекса на Dolbeault на HKT-многообразие. Важен клас HKT-многообразия са тези с холоморфно тривиално канонично разслоение по отношение на всяка комплексна структура от хиперкомплексната фамилия на многообразието. HKT-многообразията с холоморфна форма на обема (volume form) се явяват решения на гравитино- и дилатино-Килинговите спинорни уравнения в размерност 4n с повече от две запазващи се суперсиметрии. В една от своите статии Verbitsky намира едно необходимо и достатъчно условие за това, компактните HKT-многообразия да притежават холоморфно тривиално канонично разслоение в термините на свързаността на Obata, която е единствената свързаност върху едно хиперкомплексно многообразие, запазваща хиперкомплексната структура и имаща торзия нула. Именно, компактно HKT-многообразие притежава холоморфно тривиално канонично разслоение точно тогава, когато групата на холономия на свързаността на Obata е подгрупа на специалната кватернионна линейна група SL(n;H). Групата SL(n;H) фигурира в списъка на Merkulov-Schwachhöfer за възможните групи на холономия на линейните свързаности с торзия нула. Хиперкомплексните многообразия, за които групата на холономия на свързаността на Obata е подгрупа на SL(n;H), се наричат SL(n;H)-многообразия. Оказва се, че кватернионният комплекс на Dolbeault може да бъде определен с част от комплекса на de Rham. За хиперкомплексно многообразие с холоморфно тривиално канонично разслоение, допускащо HKT-метрика, версията на Теорията на Hodge, конструирана от Verbitsky, ни дава резултата, установен отново от Verbitsky, а именно, че компактно хиперкомплексно многообразие с холоморфно тривиално канонично разслоение, допускащо HKT-метрика, е SL(n;H)-многообразие. Swann е дал примери за компактни, просто свързани SL(n;H)-многообразия, за които не съществува HKT-метрика. С други думи, това са примери за компактни хиперкомплексни многообразия с холоморфно тривиално канонично разслоение, които не допускат HKT-метрика. Особено внимание заслужават балансираните HKT-метрики. Може да се покаже, че балансираните HKT-многообразия са SL(n;H)-многообразия. Балансираните HKT-метрики се явяват кватернионни аналози на Calabi-Yau метриките в кватернионното уравнение на Monge-Ampère. В някои от цитираните работи е разгледан кватернионен аналог на известния проблем на Calabi-Yau, по-точно, изказана е хипотезата, че върху компактно HKT-многообразие с група на холономия на свързаността на Obata, съдържаща се в SL(n;H), съществува балансирана HKT-метрика. При това, доказана е единственост на тази метрика в нейния кохомологичен клас.

Във втората част на дисертацията се разглеждат т. нар. кватернионно-контактни многообразия (QC-многообразия). Основна част от резултатите в нея са мотивирани от класическите теореми на Lichnerowicz и Obata. Теоремата на Lichnerowicz дава точна долна оценка на първата собствена стойност на Лапласиана върху компактно Риманово многообразие при условие, че е изпълнено едно априорно неравенство, свързано с тензора на Ricci. По-точно, в една от цитираните статии се доказва, че ако M е компактно Риманово многообразие от размерност n, за което тензорът на Ricci е по-голям или равен на тензора на Ricci на n-мерната единична сфера $S^n(1)$ с кръгова метрика, т.е. $Ric(X,Y) \geq (n-1)g(X,Y)$, тогава първата положителна собствена стойност λ_1 на (положителния) Лапласиан върху M е по-голяма или равна на първата собствена стойност за сферата, т.е. $\lambda_1 \geq n$. Впоследствие, Obata характеризира случая на равенство. По-конкретно, той е доказал, че долната граница за първата собствена стойност се достига точно тогава, когато Римановото многообразие е изометрично със сферата $S^n(1)$. Lichnerowicz доказва своя резултат, използвайки класическата Bochner-Weitzenböck формула. Obata пък е показал, че в случая на равенство, при положение, че е изпълнено априорното неравенство от теоремата на Lichnerowicz, собствената функция - удовлетворява системата $\nabla^2\phi = -\phi g$, след което той дефинира изометрия, използвайки анализ, основан на геодезичните линии и сравнение на Хесиана (Hessian comparison) на функцията-разстояние (distance function) от точка. По-късно, Gallot обобщава тези резултати като доказва теореми, засягащи собствени стойности от по-висок ред и съответните собствени функции на оператора на Laplace.

Естествен е въпросът дали има суб-Риманова версия на горните резултати. Greenleaf дава една версия на резултата на Lichnerowicz върху компактно силно псевдо-изпъкнало (strongly pseudo-convex) CR-многообразие (съкратено от Коши-Риманово многообразие). Именно, нека M е (2n + 1)-мерно компактно силно псевдо-изпъкнало CR-многообразие, $n \geq 3$. Ако $Ric(X,X) + 4A(X,JX) \geq (n+1)g(X,X)$ за всички хоризонтални векторни полета X; където Ric и A са съответно тензорът на Ricci и тензорът на торзията на свързаността на Tanaka-Webster, тогава първата положителна собствена стойност λ_1 на суб-Лапласиана удовлеворява неравенството $\lambda_1 \geq n$. Тази оценка е точна в смисъл, че относно стандартната CR-структура върху сферата, неравенството става на равенство. По-късно, редица резултати в CR-случая са получени в работите [70, 23, 20], [18, 19, 9] и [21], даващи съответна оценка в случаите n = 1; 2; или характеризиращи случая на равенство в оценката при нулева торзия (Сасакиевия случай).

Първият основен кръг от проблеми, разгледани в тази глава от дисертацията, е свързан с изследването на тези въпроси в кватернионно-контактната (QC-) геометрия, която е в известен смисъл кватернионният аналог на CR-геометрията. Резултатът от тип на Lichnerowicz, който получаваме, се съдържа в Теорема 2.2.1 и ни дава точна долна оценка на първата собствена стойност на суб-Лапласиана върху компактно QC-многообразие от размерност, по-голяма от седем, при условие, че е изпълнено априорното неравенство 0.13. Основен инструмент в доказателството на тази оценка е формулата от тип на Bochner (0.19) за суб-Лапласиана.

Следващата естествена стъпка е да изследваме случая на равенство в Теорема 2.2.1. В дисертацията се разглежда случаят, когато тензорът на торзията на свързаността на Biquard е нула, $T^0 = U = 0$. В този случай, както е известно от [65], QC-многообразието е QC-Айнщайново, $Ric = kg$, с константна QC-скаларна кривина, когато n > 1. Всъщност, QC-Айнщайново многообразие с константна положителна скаларна кривина е локално QC-еквивалентно на 3-Сасакиево пространство. Основен пример за 3-Сасакиево пространство е (4n + 3)-мерната сфера в кватернионното пространство от (кватернионна) размерност n + 1, снабдена с т. нар. стандартна 3-Сасакиева структура.
Съответните резултати в случая на отрицателна скаларна кривина могат да бъдат видяни в статиите [58, 59]. Теорема 2.2.2 характеризира случая на равенство от Теорема 2.2.1, когато QC-структурата е QC-Айнщайнова. По-точно, тя ни дава, че ако многообразието е компактно QC-Айнщайново, равенството в оценката от Теорема 2.2.1 се достига точно тогава, когато многообразието е QC-еквивалентно на 3-Сасакиевата сфера.

Да отбележим, че в [66] е дадена експлицитна формула за собствените функции на горната собствена стойност, вж. също [5].

Друг резултат, който е получен, е Теорема 2.2.3, която дава едно интегрално неравенство, включващо Лапласиана и Хесиана на дадена функция с компактен носител върху QC-многообразие и тензорите на кривината и на торзията на свързаността на Biquard. За неговото доказателство използваме формулата от тип на Bochner. Интегрални неравенства от този тип са били получени и използвани по-рано в

[36] във връзка с групите на Carnot. Подобен метод, основан върху формула на Greenleaf, е използван в [22]. Като следствие е намерено едно априорно неравенство от тип на Cordes [24] между (хоризонталния) Хесиан и суб-Лапласиана на една функция. За групата на Heisenberg една точна оценка е намерена в [26]. Имайки на разположение оценка, получена в дисертацията, е прецизиран резултата от [25] за кватернионната група на Heisenberg. Основното приложение на получената оценка е установяването на $C^{1,\alpha}$ регулярност (regularity) на p-суб-Лапласиана за p близко до 2: Точният интервал за p около 2 е определен с константа, която е получена в дисертацията.

4. Приноси на дисертационния труд

Приемам резултатите, получени в дисертационния труд, и ги оценявам както следва:

1. Намерено е просто необходимо и достатъчно условие за това, едно HKT-многообразие да е SL(n;H)-многообразие чрез 1-формата му на Lee;
2. Намерени са изразявания на тензора и формите от тип на Ricci на свързаността на Obata върху HKT-многообразие чрез 1-формата му на Lee. Доказано е, че скаларните кривини на свързаността на Obata върху HKT-многообразие са нули;
3. Намерено е достатъчно условие за несъществуване на HKT-метрика върху хиперкомплексно многообразие в термините на тензора и формите на Ricci и скаларните кривини на свързаността му на Obata;
4. Намерено е достатъчно условие за това, едно компактно HKT-многообразие с точна форма на Lee да бъде хипер-Келерово в термините на $*$-скаларната му кривина и една определена следа на външната производна на тензора на торзията на HKT-свързаността;
5. Доказана е формула от тип на Bochner за суб-Лапласиана върху QC-многообразие;
6. Намерени са две интегрални равенства върху компактно QC-многообразие, изразяващи хоризонтално-вертикалния Хесиан на една функция f, с определени вертикални и хоризонтални аргументи, чрез други тензори;
7. Намерена е точна долна оценка на първата собствена стойност на суб-Лапласиана върху компактно QC-многообразие от размерност, по-голяма от седем;
8. Характеризиран е случаят на равенство в горепосочената оценка при условие, че многообразието е QC-Айнщайново;
9. Намерена е връзка между Римановия и суб-Римановия Лапласиан върху дадено QC-многообразие, и като следствие е изведено неравенство между техните първи собствени стойности;
10. Доказано е интегрално неравенство между квадрата на Лапласиана и нормата на Хесиана на една гладка функция с компактен носител върху дадено QC-многообразие от размерност, по-голяма от седем;
11. Изведени са някои следствия от горния резултат, като например $C^{1,\alpha}$ регулярност на p-суб-Лапласиана върху кватернионната група на Heisenberg при p, близко до 2. Точният интервал за p около 2 е определен от константа, която е намерена.

5. Преценка на публикациите в дисертационния труд

Авторът е представил своите резултати в две статии, които са публикувани в реномирани списания в чужбина. Освен това, те са докладвани както следва:

1. 10th International Conference on Geometry and Applications, September 3-9, 2011, Varna, Bulgaria;

2. Geometric Structures on Manifolds and their Applications, July 1-7, 2012, Castle Rauischholzhausen, Germany;
3. 3rd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, September 3-7, 2012, Veliko Tarnovo, Bulgaria;
4. Други вътрешни (в рамките на факултета) студентски и научни сесии и семинари.

Резултатите в двете публикации са цитирани три пъти.

6. Оценка на съответствието на автореферата с изискванията на изготвянето му, както и на адекватността на отразяване на основните положения и приносите на дисертационния труд

Авторефератът, както и изложението на дисертационния труд, е оформено изключително акуратно, което води до свободно четене и възприемане на представената същност. Обемът на автореферата е премерен и изложеното в него отразява същността на целта, задачите и техните решения.

Авторефератът съдържа пълния текс на научните преноси, както и списъка с публикациите, свързани с дисертацията.

7. Мнения, препоръки и забележки

Нямам.

8. Заключение

Оценката ми за дисертационния труд е положителна. Дисертантът постига поставените си цели и задачи в дисертационния труд. Приносите, за които дисертантът претендира, действително са получени и са негово дело. Съществените приноси на дисертационния труд са отразени в научни публикации. Дисертационният труд отговаря на изискванията на закона за Развитие на академичния състав на Република България и вътрешните правилници на ФМИ, СУ „Св. Климент Охридски" за присъждане на образователната и научната степен „доктор". Като се вземат предвид достойнствата на представения ми за рецензия дисертационен труд на тема „Риманови и суб-Риманови многообразия със структури", респективно акуратност, значимост и полезност, оценявам положително дисертационния труд на Александър Владимиров Петков и считам, че научното жури може да му присъди образователната и научната степен „доктор".

27.02.2014г.

Подпис:..
(доц. д-р Симеон Замковой)