СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
"СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

РИМАНОВИ И СУБ-РИМАНОВИ МНОГООБРАЗИЯ СЪС СТРУКТУРИ

АВТОРЕФЕРАТ

на Дисертация

за получаване на образователната и научна степен "доктор"
по научната специалност 01.01.06 "Геометрия и топология"

на

Александър Владимиров Петков

Научен ръководител
проф. дмн Стефан Петров Иванов

СОФИЯ, 2014

Дисертацията съдържа 91 страници, от които 67 страници са основен текст, 17 страници са увод, съдържание и друг междинен текст, и 7 страници са библиография.

Номерацията в скобите на лемите, твърденията, теоремите и т.н. съответства на номерацията им в дисертационния труд.

Дисертантът е редовен докторант в катедра "Геометрия" при ФМИ на СУ "Св. Климент Охридски".

Резултатите са публикувани в статиите [56] и [57] и са докладвани (като цели или като част от доклади) на конференции и семинари, както следва:

1. *10th International Conference on Geometry and Applications*, September 3-9, 2011, Varna, Bulgaria
2. *Geometric Structures on Manifolds and their Applications*, July 1-7, 2012, Castle Rauischholzhausen, Germany
3. *3rd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields*, September 3-7, 2012, Veliko Tarnovo, Bulgaria
4. *Differential Geometry and its Applications*, August 19-23, 2013, Brno, Czech Republic
5. *11-th International Conference On Geometry And Applications*, September 1-6, 2013, Varna, Bulgaria
6. *Doctoral Conference in Mathematics, Informatics and Education*, September 19-22, 2013, Sofia, Bulgaria
7. *Complex Analysis and Applications '13 (International Memorial Conference for the 100th Anniversary of Acad. Ljubomir Iliev)*, Octomber 31-November 02, 2013, IMI, Sofia, Bulgaria
8. *8th International Young Researchers Workshop on Geometry, Mechanics and Control*, December 11-13, 2013, Universitat Politècnica de Catalunya-Barcelona Tech, Barcelona, Spain
9. Други вътрешни (в рамките на факултета) студентски и научни сесии и семинари.

Резултатите са цитирани както следва:

Статията [56] е цитирана в работите

1. F. Delduca, E. Ivanov, *N=4 mechanics of general (4,4,0) multiplets*, Nuclear Physics B Volume 855, Issue 3, 21 February 2012, Pages 815–853.

2. Gueo Grantcharov, Misha Verbitsky, *Calibrations in hyperkahler geometry*, arXiv:1009.1178, (accepted by Commun. Contemp. Math.).

Статията [57] е цитирана в работата

1. Diego Conti, *Intrinsic torsion in quaternionic contact geometry*, arXiv: 1306.0890.

Благодарности

Приятен дълг ми е да изкажа дълбоката си благодарност към моя научен ръководител проф. Стефан Иванов, с когото имах късмета да се запозная и удоволствието да работя през последните няколко години. Искрено съм благодарен и на проф. Димитър Василев, съвместната работа с когото също неизмеримо много допринесе за моето математическо развитие. Примерът на техния заразяващ ентусиазъм и приятелското отношение към мен бяха основни стимули в преодоляване на трудностите.

София,
Януари, 2014г. Авторът

Понятието многообразие е централно в съвременната чиста математика и теоретична физика. Достатъчно е да спомenem теорията на относителността на Айнщайн, теорията на струните и суперструните, квантовата теория на полето, гравитационните и супер-гравитационните теории и други, в които то е основен обект. Наличието на допълнителни структури върху едно гладко многообразие, като метрика, тензорни полета с различни свойства, линейни свързаности и т.н. е предпоставка за богатството от възможности, които имат геометриите на различните многообразия за описанието на "формите" на реалния свят. Бурното развитие на съвременната диференциална геометрия (геометрията на многообразията) е обосновано преди всичко от значението, което тя има за теоретичната и математическата физика, благодарение на мощните си методи за изследване.

Особено силна е връзката на физиката през последните 50 години с т. нар. хиперкомплексни многообразия, които са в известен смисъл кватернионен аналог на комплексните многообразия. Връзката е двупосочна. Както чисто диференциално-геометричните изследвания имат влияние върху физиката, така и физически задачи водят до дефинирането на нови типове многообразия и структури върху тях. Пример в това отношение са т. нар. Уравнения на Strominger в Теорията на суперструните. Известно е, че наличието на решение е необходимо и достатъчно условие за време-пространствена суперсиметрия. Многообразията, които възникват във връзка с тези уравнения в $2n$-мерния случай са т. нар. КТ-многообразия. В $4n$-мерния случай възникват техните кватернионни аналози, НКТ-многообразията, с които е свързана първата част от настоящата дисертация.

Важен клон на диференциалната геометрия е т. нар. суб-Риманова геометрия. Тя е обобщение на Римановата геометрия, и основна нейна характеристика е наличието на т. нар. хоризонтално разпределение и метрика върху него, които носят цялата съществена информация за многообразието. Пример за суб-Риманово многообразие е групата на Heisenberg (комплексната или кватернионната), която носи естествена суб-Риманова структура и играе важна роля във физиката. С кватернионно-контактната геометрия, която е кватернионен пример за суб-Риманова геометрия, ще е свързана втората част от дисертацията.

Настоящата дисертация е съставена от две части. Първата част (Глава 1) се отнася за т. нар. хипер-Келерови многообразия с торзия (или съкратено НКТ-многообразия). НКТ-многообразията са въведени от Howe и Papadopoulos в [52]. Хипер-Келерова структура с торзия (или НКТ-структура) върху едно хипер-Ермитово многообразие наричаме линейна свързаност, която запазва хипер-Ермитовата структура и има антисиметрична (totally skew-symmetric) торзия. Когато торзионната 3-форма е затворена, HKT-структурата се нарича силна (strong). Когато торзионната 3-форма е безследна (trace-free), говори се за балансирана (balanced) HKT-структура. В случай на нулева торзия, хипер-Ермитовото многообразие е хипер-Келерово.

Освен че са интересни от чисто математическа гледна точка, HKT-структурите намират широко приложение в теоретичната и математическата физика, като например супергравитационните теории [42, 82, 86] и суперсиметричните сигма-модели с Wess-Zumino член [39, 51, 52]. Важно е да подчертаем, че HKT-структурите възникват именно във физиката.

Добре известни са някои геометрични и топологични свойства на HKT-многообразията. Например, в [74] е дадено просто необходимо и достатъчно условие за това, едно почти хипер-Ермитово многообразие да бъде HKT-многообразие в термините на каноничната (intrinsic) торзия на една $Sp(n)Sp(1)$-структура върху многообразието. Howe и Papadopoulos въвеждат в [52] понятието HKT-метрика върху хиперкомплексно многообразие, съществуването на която е еквивалентно със съществуването на HKT-структура върху съответното хипер-Ермитово многообразие. В работата [43] Grantcharov и Poon дефинират понятието HKT-потенциал. В [6, 75] се доказва, подобно на хипер-Келеровия случай, че локално всяка HKT-метрика допуска HKT-потенциал. Една версия на Теорията на Hodge е дадена в [90], където се разкрива забележителната аналогия между комплекса на de Rham на Келерово многообразие и комплекса на Dolbeault на HKT-многообразие.

Важен клас HKT-многообразия са тези с холоморфно тривиално канонично разслоение по отношение на всяка комплексна структура от хиперкомплексната фамилия на многообразието. HKT-многообразията с холоморфна форма на обема (volume form) се явяват решения на гравитино- и дилатино-Килинговите спинорни уравнения в размерност $4n$ с повече от две запазващи се суперсиметрии, вж. [86]. В своята статия [91] Verbitsky намира едно необходимо и достатъчно условие за това, компактните HKT-многообразия да притежават холоморфно тривиално канонично разслоение в термините на свързаността на Obata, която е единствената свързаност върху едно хиперкомплексно многообразие, запазваща хиперкомплексната структура и имаща торзия нула, вж. [78]. Именно, компактно HKT-многообразие притежава холоморфно тривиално канонично разслоение точно тогава, когато групата на холономия на свързаността на Obata е подгрупа на специалната кватернионна линейна група $SL(n, \mathbb{H})$.

Групата $SL(n,\mathbb{H})$ фигурира в списъка на Merkulov-Schwachhöfer за възможните групи на холономия на линейните свързаности с торзия нула, вж. [75]. Хиперкомплексните многообразия, за които групата на холономия на свързаността на Obata е подгрупа на $SL(n,\mathbb{H})$, се наричат $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия. Последните са разглеждани в [3, 92], където се показва, че кватернионният комплекс на Dolbeault може да бъде определен с част от комплекса на de Rham. За хиперкомплексно многообразие с холоморфно тривиално канонично разслоение, допускащо HKT-метрика, версията на Теорията на Hodge, конструирана в [90], ни дава резултата, установен в [91], именно, че компактно хиперкомплексно многообразие с холоморфно тривиално канонично разслоение, допускащо HKT-метрика, е $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие. Swann в [88] е дал примери за компактни, просто свързани $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия, за които не съществува HKT-метрика. С други думи, това са примери за компактни хиперкомплексни многообразия с холоморфно тривиално канонично разслоение, които не допускат HKT-метрика.

Особено внимание заслужават балансираните HKT-метрики. В [89] е показано, че балансираните HKT-многообразия са $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия. Балансираните HKT-метрики се явяват кватернионни аналози на Calabi-Yau метриките в кватернионното уравнение на Monge-Ampère, както е показано в [3, 89]. В тези работи е разгледан кватернионен аналог на известния проблем на Calabi-Yau, по-точно, изказана е хипотезата, че върху компактно HKT-многообразие с група на холономия на свързаността на Obata, съдържаща се в $SL(n,\mathbb{H})$, съществува балансирана HKT-метрика. При това, доказана е единственост на тази метрика в нейния кохомологичен клас.

Основната цел на първата част на дисертацията е да намерим едно просто необходимо и достатъчно условие за това, едно HKT-многообразие да има група на холономия на свързаността на Obata, съдържаща се в $SL(n,\mathbb{H})$, т.е. да бъде $SL(n,\mathbb{H})$-многообразие. Именно, Теорема 1.5.1 гласи, че едно HKT-многообразие има $SL(n,\mathbb{H})$-холономия на свързаността на Obata точно тогава, когато една определена следа на торзионната 3-форма, наречена форма на Lee, е точна 1-форма. Примери за компактни HKT-многообразия, които са $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия, са нилпотентните многообразия (nilmanifolds) с Абелева хиперкомплексна структура, понеже те са балансирани HKT-многообразия [8]. Други компактни примери за HKT-многообразия с $SL(n,\mathbb{H})$-холономия на свързаността на Obata, които не са нилпотентни, са посочени в [7], и също са балансирани. Известни са примери на компактни, просто свързани HKT-многообразия с холоморфно тривиално канонично разслоение, конструирани от Swann в [88] чрез туисторна (twist) конструкция. Като следствие от Теорема 1.5.1 е даден критерий (достатъчно условие) за несъществуване на HKT-метрика върху хиперкомплексно многообразие чрез тензорите от тип на Ricci на свързаността на Obata. В Раздел 1.8 е дадено достатъчно условие за това, едно HKT-многообразие с точна форма на Lee да е хипер-Келерово, в термините на т. нар. *-скаларна кривина и една определена следа на външната производна на тензора на торзията на HKT-свързаността.

Съдържанието по раздели на Глава 1 е следното.
В раздел 1.1 даваме някои необходими предварителни понятия и факти, свързани с хиперкомплексните, хипер-Ермитовите и хипер-Келеровите многообразия. Дадени са следните дефиниции.
Почти хиперкомплексна структура върху $4n$-мерно гладко многообразие M наричаме тройка $H = (J_s), s = 1, 2, 3$, от почти комплексни структури $J_s : TM \longrightarrow TM$, удовлетворяващи кватернионните тъждества

$$J_s^2 = -id_{|TM}, \quad J_1J_2 = -J_2J_1 = J_3.$$

Когато трите почти комплексни структури J_s са интегруеми (комплексни), говори се за *хиперкомплексна структура* върху M. Многообразие M, снабдено с (почти) хиперкомплексна структура $H = (J_s), s = 1, 2, 3$, се нарича *(почти) хиперкомплексно многообразие* и се означава с (M, H). *Хипер-Ермитова метрика* върху едно (почти) хиперкомплексно многообразие (M, H) наричаме Риманова метрика g, която е Ермитово съгласувана с всяка от почти комплексните структури J_s, т.е.

$$g(J_s\cdot, J_s\cdot) = g(\cdot, \cdot), s = 1, 2, 3.$$

(Почти) хиперкомплексно многообразие (M, H), снабдено с хипер-Ермитова метрика g, се нарича *(почти) хипер-Ермитово* и се означава с (M, H, g). *Фундаментални 2-форми* върху (почти) хипер-Ермитовото многообразие (M, H, g) наричаме 2-формите F_s, дефинирани чрез

$$F_s(\cdot, \cdot) := g(\cdot, J_s\cdot), \quad s = 1, 2, 3.$$

Когато трите фундаментални 2-форми на (почти) хипер-Ермитовото многообразие (M, H, g) са затворени, т.е. $dF_s = 0, s = 1, 2, 3$, то се нарича *хипер-Келерово.*
В раздел 1.2 дефинираме HKT-многообразие и даваме някои факти, свързани с това понятие. Дадена е следната основна дефиниция.
Хипер-Келерова структура с торзия (или кратко *HKT-структура*) върху едно хипер-Ермитово многообразие (M, H, g) наричаме линейна свързаност ∇, запазваща хипер-Ермитовата структура и имаща антисиметрична (totally skew-symmetric) торзия, т.е. ако са изпълнени равенствата

$$\nabla J_1 = \nabla J_2 = \nabla J_3 = \nabla g = 0, \quad T(X, Y, Z) = -T(X, Z, Y), \tag{0.1}$$

където $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, а $T(X, Y, Z) := g(T(X, Y), Z)$ е тензорът на торзията от тип $(0, 3)$, съответстващ на *тензора на торзията* от тип $(1, 2)$, дефиниран чрез равенството

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

НКТ-структурата се нарича още *НКТ-свързаност*. Хипер-Ермитово многообразие, снабдено с НКТ-структура, се нарича *Хипер-Келерово многообразие с торзия* (или съкратено *НКТ-многообразие*). Ще го означаваме с (M, g, H, ∇). В [52] Howe и Papadopoulos доказват, че условието да съществува линейна свързаност върху едно хипер-Ермитово многообразие (M, g, H), удовлетворяваща (0.1), е еквивалентно на условието:

$$\begin{aligned} J_1 dF_1 = J_2 dF_2 = J_3 dF_3, &\quad \text{където} \\ J_s dF_s(X, Y, Z) = -dF_s(J_s X, J_s Y, J_s Z), &\quad s = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{0.2}$$

В случай, че е изпълнено (0.2), метриката g се нарича *НКТ-метрика*, и резултатът на Howe и Papadopoulos може да бъде изказан и така: Върху хиперкомплексното многообразие (M, H) съществува НКТ-метрика g точно тогава, когато съществува НКТ-структура върху (M, H, g).

В раздел 1.3 показваме връзката на НКТ-многообразията с физиката, и по-специално, с нейните клонове, от които възниква това понятие. Подчертано е, че те възникват като решения в $4n$-мерния случай на т. нар. *Система на Strominger*, която е съставена от уравненията

$$\delta_\lambda = \nabla\epsilon = 0; \quad \delta_\Psi = (d\phi - \frac{1}{2}H)\cdot\epsilon = 0; \quad \delta_\xi = F^A\cdot\epsilon = 0, \tag{0.3}$$

където λ, Ψ, ξ са съответно гравитино (gravitino), дилатино (dilatino) и гейджино (gaugino) полетата, а $\cdot$ означава Clifford-овото действие на формите върху спинорите, заедно с още едно уравнение, наречено уравнение за анулиране на аномалията. Като следствие от един резултат на Friedrich и Ivanov [33], е получено следното

Твърдение 1 (Твърдение 1.3.1) *Едно почти хипер-Ермитовото многообразие (M, g, H) допуска линейна свързаност ∇, запазваща хипер-Ермитовата структура и имаща антисиметрична торзия, точно тогава, когато тензорите на Nijenhuis $N_{J_1}, N_{J_2}, N_{J_3}$, съответни на почти комплексните структури J_1, J_2, J_3, са 3-форми и следните равенства са в сила*

$$J_1 dF_{J_1} + N_{J_1} = J_2 dF_{J_2} + N_{J_2} = J_3 dF_{J_3} + N_{J_3}. \tag{0.4}$$

Отбелязано е още, че едно почти хипер-Ермитово многообразие, чиято почти хиперкомплексна структура се състои от три приблизително Келерови структури J_1, J_2, J_3 (т.е. "хипер" аналогът на приблизително Келерово многообразие), допуска линейна свързаност, запазваща хипер-Ермитовата структура и имаща антисиметрична торзия, точно тогава, когато то е хипер-Келерово.
В раздел 1.4 дефинираме групите $GL(n, \mathbb{H})$ и $SL(n, \mathbb{H})$, както и свързаността на Obata, и даваме информация за нейната група на холономия.
В подраздел 1.4.1 са дефинирани общата кватернионна линейна група $GL(n, \mathbb{H})$ и специалната кватернионна линейна група $SL(n, \mathbb{H})$.
В подраздел 1.4.2 е дефинирана *свързаността на Obata* върху хиперкомплексно многообразие като единствената линейна свързаност, запазваща хиперкомплексната структура и имаща торзия нула [78]. Дефинирано е понятието $SL(n, \mathbb{H})$-*многообразие* като хиперкомплексно многообразие, чиято група на холономия на свързаността на Obata се съдържа в групата $SL(n, \mathbb{H})$. Посочени са примери на $SL(n, \mathbb{H})$-многообразия. Изказан е резултатът на Verbitsky [91], че върху компактно HKT-многообразие условието то да има холоморфно тривиално канонично разслоение е еквивалентно с условието многообразието да бъде $SL(n, \mathbb{H})$-многообразие.
В раздел 1.5 е дефинирана формата на Lee върху HKT-многообразие и е формулиран основният резултат. *Формата на Lee* θ върху едно HKT-многообразие (M, g, H, ∇) се дефинира по следния начин:

$$\theta(X) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4n} T(JX, e_i, Je_i),$$

където $J \in H$, [54, 63, 64]. Ако формата на Lee на едно HKT-многообразие е нула, то се нарича *балансирано*, вж. също [89]. Отбелязано е, че балансираните HKT-многообразия са $SL(n, \mathbb{H})$-многообразия, но обратното не е вярно [89]. Формулиран е следният основен резултат.

Теорема 2 (Теорема 1.5.1) *Върху HKT-многообразие* (M, g, H, ∇) *следните условия са еквивалентни:*

a) HKT-многообразието е $SL(n, \mathbb{H})$*-многообразие, т.е.* $Hol(\nabla^{ob}) \subset SL(n, \mathbb{H})$.

b) Формата на Lee е точна 1*-форма.*

От теорема Теорема 2 и резултатът на Verbitsky [91], получаваме в компактния случай следното

Следствие 3 (Следствие 1.5.2) *Едно компактно HKT-многообразие допуска холоморфно тривиално канонично разслоение точно тогава, когато формата му на Lee е точна.*

Като друго следствие получаваме известния ни вече резултат, че балансираните HKT-многообразия са $SL(n,\mathbb{H})$-многообразия [89]. Прилагайки Теорема 2 към експлицитните примери за HKT-многообразия, посочени в [7, Example 6.1 и Example 6.2], получаваме, че тези многообразия са $SL(2,\mathbb{H})$-многообразия, понеже формата им на Lee е точна. Така, налице са примери за небалансирани компактни HKT-многообразия с холоморфно тривиално канонично разслоение.

В раздел 1.6 доказваме основния резултат Теорема 2.

В подраздел 1.6.1 даваме помощни резултати във връзка с доказателството. Доказано е следното твърдение.

Твърдение 4 (Твърдение 1.6.1) *Върху HKT-многообразие за свързаността на Obata ∇^{ob} и HKT-свързаността ∇ е в сила равенството*

$$\begin{aligned} g(\nabla^{ob}_X Y, Z) =& g(\nabla_X Y, Z) + A(X,Y,Z), \quad \textit{където} \\ 2A(X,Y,Z) =& -T(X, J_1Y, J_1Z) - T(J_1X, J_1Y, Z) \\ & - T(X, J_3Y, J_3Z) - T(J_1X, J_3Y, J_2Z). \end{aligned} \tag{0.5}$$

По-нататък, доказана е следната

Лема 5 (Лема 1.6.2) *Върху HKT-многообразие за тензора A на разликата между свързаността на Obata и HKT-свързаността са в сила формулите*

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{4n} A(X, e_a, e_a) &= -2\theta(X); \\ \sum_{a=1}^{4n} A(X, e_a, J_s e_a) &= 0, \quad s = 1,2,3. \end{aligned} \tag{0.6}$$

В подраздел 1.6.2 е дадено доказателството на Теорема 2.

В раздел 1.7 е дадена връзката, която съществува между тензора и формите на Ricci на свързаността на Obata върху HKT-многообразие и формата на Lee. Доказано е, че скаларните кривини на свързаността на Obata върху HKT-многообразие са нули. Дадени са и някои следствия.

В подраздел 1.7.1 дефинираме основни понятия, имащи отношение към раздел 1.7. Дадена е следната дефиниция.

Тензорът на Ricci Ric, скаларните кривини $Scal, Scal_s$ и 2-*формите от тип на Ricci* ρ, ρ_s се дефинират по стандартен начин, както следва:

$$\begin{aligned}
&Ric(X,Y) = \sum_{a=1}^{4n} R(e_a, X, Y, e_a), \quad Scal = \sum_{a=1}^{4n} Ric(e_a, e_a),\\
&Scal_s = \sum_{a=1}^{4n} Ric(J_s e_a, e_a), \quad \rho(X,Y) = \sum_{a=1}^{4n} R(X, Y, e_a, e_a),\\
&\rho_s(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4n} R(X, Y, e_a, J_s e_a), \quad s = 1,2,3.
\end{aligned}$$

В подраздел 1.7.2 се формулират и доказват основните резултати на раздел 1.7. Именно:

Лема 6 (Лема 1.7.1) *Върху хиперкомплексно многообразие* (M, H)*, за* $s = 1, 2, 3$*, са в сила равенствата*

$$\begin{aligned}
Ric^{ob}(J_sX, J_sY) + Ric^{ob}(Y,X) &= 2\rho_s^{ob}(J_sX, Y),\\
Ric^{ob}(X,Y) - Ric^{ob}(Y,X) &= -\rho^{ob}(X,Y).
\end{aligned} \tag{0.7}$$

С помощта на Лема 6 доказваме следното основно

Твърдение 7 (Твърдение 1.7.2) *За HKT-многообразие* (M, g, H, ∇) *е изпълнено:*

a) Външната производна на формата на Lee е $(1,1)$*-форма по отношение на всяка комплексна структура* $J_s \in H$*, т.е.*

$$d\theta(J_sX, J_sY) = d\theta(X,Y), \quad s = 1,2,3.$$

b) Тензорът и формите на Ricci на свързаността на Obata се определят от формата на Lee по следния начин:

$$\begin{aligned}
&Ric^{ob}(X,Y) = d\theta(X,Y),\\
&\rho^{ob} = -2d\theta, \quad \rho_s^{ob} = 0, \quad s = 1,2,3.
\end{aligned}$$

В частност, тензорът и формите на Ricci на свързаността на Obata са $(1,1)$*-форми по отношение на хиперкомплексната структура* H*, т.е.*

$$Ric^{ob}(J_sX, J_sY) = Ric^{ob}(X,Y), \quad \rho^{ob}(J_sX, J_sY) = \rho^{ob}(X,Y).$$

c) Скаларните кривини на свързаността на Obata са нули,

$$Scal^{ob} = Scal^{ob}_s = 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

От Твърдение 7 получаваме следното

Следствие 8 (Следствие 1.7.3) *Рестриктираната група на холономия на свързаността на Obata върху HKT-многообразие е подгрупа на групата $SL(n, \mathbb{H})$ точно тогава, когато формата на Lee е затворена, $d\theta = 0$.*

То се получава и непосредствено от Теорема 2.
В подраздел 1.7.3, като непосредствено следствие от Твърдение 7, е дадено едно достатъчно условие за несъществуване на HKT-метрика върху хиперкомплексно многообразие. Именно, в сила е

Следствие 9 (Следствие 1.7.4) *Нека (M, H) е хиперкомплексно многообразие и някое от следните условия е изпълнено:*

a) Тензорът на Ricci на свързаността на Obata не е антисиметричен (т.е. не е 2-форма) или не е $(1, 1)$-форма по отношение на хиперкомплексната структура.

b) Формата от тип на Ricci на свързаността на Obata ρ^{ob} не е $(1, 1)$-форма по отношение на хиперкомплексната структура.

c) Поне една от формите от тип на Ricci на свързаността на Obata ρ^{ob}_s не е тъждествено равна на нула, $\rho^{ob}_s \neq 0$ за някое $s \in \{1, 2, 3\}$.

d) Поне една от скаларните кривини на свързаността на Obata не е тъждествено равна на нула, $Scal^{ob} \neq 0$ или $Scal^{ob}_s \neq 0$ за някое $s \in \{1, 2, 3\}$.

Тогава (M, H) не допуска HKT-метрика, съгласувана с хиперкомплексната структура H.

В раздел 1.8 е дадено едно достатъчно условие за това, едно HKT-многообразие да е хипер-Келерово, в термините на определени следи на външната производна на торзионната 3-форма на HKT-свързаността и т. нар. *-скаларна кривина на свързаността на Levi-Civita.
В подраздел 1.8.1 са дадени някои предварителни сведения, имащи връзка с проблема. Напомнена е дефиницията на кватернионно многообразие, кватернионна линейна свързаност, кватернионно-Келерово многообразие с торзия (QKT-многообразие), и са посочени някои факти, свързани с тях. Тези факти се прехвърлят и върху HKT-многообразията, като

частен случай на QKT-многообразията. За фиксирано $s \in \{1,2,3\}$, *-*скаларна кривина* $Scal^g_s$ върху (почти) Ермитовото многообразие (M, g, J_s) се дефинира с равенството

$$Scal^g_s := \sum_{a=1}^{4n} \rho^g_s(J_s e_a, e_a).$$

Върху QKT-многообразие от размерност $4n > 4$ трите *-скаларни кривини съвпадат [64, Proposition 3.4]. Това важи в частност и за HKT-многообразие от размерност $4n > 4$, и в такъв случай може да се дефинира *-*скаларна кривина* на HKT-многообразие $Scal^g_H$ чрез равенството

$$Scal^g_H := Scal^g_1 = Scal^g_2 = Scal^g_3.$$

Използвайки [64, Proposition 3.1, Proposition 3.4] и факта, че формите от тип на Ricci на HKT-свързаността са нули (и следователно $Scal_Q = 0$), стигаме до следното представяне на $Scal^g_H$:

$$Scal^g_H = \frac{1}{8}\sum_{a,b=1}^{4n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b) + \frac{1}{12}|T|^2, \quad J \in H. \tag{0.8}$$

Доказано е, че горното равенство важи и за 4-мерни HKT-многообразия. В подраздел 1.8.2 се формулира и доказва основният за раздел 1.8 резултат. Именно:

Теорема 10 (Теорема 1.8.2) *Нека* (M, g, H, ∇) *е компактно HKT-многообразие с точна форма на Lee и нека някое от следните условия е изпълнено:*

a) Функцията $h := -\frac{1}{4}\sum_{a,b=1}^{4n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b)$, $J \in H$, *е тъждествено равна на нула,* $h = 0$.

b) *-*скаларната кривина на* (M, g, H, ∇) *е нула,* $Scal^g_H = 0$.

Тогава (M, g, H, ∇) *е хипер-Келерово многообразие.*

Дефинирано е *почти силно HKT-многообразие* като HKT-многообразие, удовлетворяващо равенството $\sum_{a,b=1}^{4n} dT(e_a, Je_a, e_b, Je_b) = 0, J \in H$. Използвайки това понятие, от Теорема 10 е получено следното следствие.

Следствие 11 (Следствие 1.8.5) *Компактно почти силно HKT-многообразие с точна форма на Lee е хипер-Келерово.*

Втората част на дисертацията (Глава 2) е свързана с т. нар. кватернионно-контактни многообразия (QC-многообразия). Основна част от резултатите в нея са мотивирани от класическите теореми на Lichnerowicz [73] и Obata [79]. Теоремата на Lichnerowicz дава точна долна оценка на първата собствена стойност на Лапласиана върху компактно Риманово многообразие при условие, че е изпълнено едно априорно неравенство, свързано с тензора на Ricci. По-точно, в [73] е доказано, че ако M е компактно Риманово многообразие от размерност n, за което тензорът на Ricci е по-голям или равен на тензора на Ricci на n-мерната единична сфера $S^n(1)$ с кръгова метрика, т.е.

$$Ric(X,Y) \geq (n-1)g(X,Y),$$

тогава първата положителна собствена стойност λ_1 на (положителния) Лапласиан върху M е по-голяма или равна на първата собствена стойност за сферата, т.е.

$$\lambda_1 \geq n.$$

Впоследствие, Obata характеризира случая на равенство. По-конкретно, в [79] е доказано, че долната граница за първата собствена стойност се достига точно тогава, когато Римановото многообразие е изометрично със сферата $S^n(1)$. Lichnerowicz доказва своя резултат, използвайки класическата Bochner-Weitzenböck формула. Obata пък е показал, че в случая на равенство, при положение, че е изпълнено априорното неравенство от теоремата на Lichnerowicz, собствената функция ϕ удовлетворява системата $\nabla^2\phi = -\phi g$, след което той дефинира изометрия, използвайки анализ, основан на геодезичните линии и сравнение на Хесиана (Hessian comparison) на функцията-разстояние (distance function) от точка. По-късно, Gallot в работата [36] обобщава тези резултати като доказва теореми, засягащи собствени стойности от по-висок ред и съответните собствени функции на оператора на Laplace.

Естествен е въпросът дали има суб-Риманова версия на горните резултати. Greenleaf дава в [45] една версия на резултата на Lichnerowicz върху компактно силно псевдо-изпъкнало (strongly pseudo-convex) CR-многообразие (съкратено от Коши-Риманово многообразие). Именно, нека M е $(2n+1)$-мерно компактно силно псевдо-изпъкнало CR-многообразие, $n \geq 3$. Ако

$$Ric(X,X) + 4A(X,JX) \geq (n+1)g(X,X)$$

за всички хоризонтални векторни полета X, където Ric и A са съответно тензорът на Ricci и тензорът на торзията на свързаността на Tanaka-

Webster (съгласно означенията от [59, 61]), тогава първата положителна собствена стойност λ_1 на суб-Лапласиана удовлеворява неравенството $\lambda_1 \geq n$. Тази оценка е точна в смисъл, че относно стандартната CR-структура върху сферата, неравенството става на равенство. По-късно, редица резултати в CR-случая са получени в работите [72, 24, 21], [19, 20, 9] и [22], даващи съответна оценка в случаите $n = 1, 2$, или характеризиращи случая на равенство в оценката при нулева торзия (Сасакиевия случай).

Първият основен кръг от проблеми, разгледани в тази глава от дисертацията, е свързан с изследването на тези въпроси в кватернионно-контактната (QC-) геометрия, която е в известен смисъл кватернионният аналог на CR-геометрията. Резултатът от тип на Lichnerowicz, който получаваме, се съдържа в Теорема 2.2.1 и ни дава точна долна оценка на първата собствена стойност на суб-Лапласиана върху компактно QC-многообразие от размерност, по-голяма от седем, при условие, че е изпълнено априорното неравенство 0.13. Основен инструмент в доказателството на тази оценка е формулата от тип на Bochner (0.19) за суб-Лапласиана.

Следващата естествена стъпка е да изследваме случая на равенство в Теорема 2.2.1. Ние ограничаваме нашите разглеждания в ситуацията, когато тензорът на торзията на свързаността на Biquard е нула, $T^0 = U = 0$. В този случай, както е известно от [66], QC-многообразието е QC-Айнщайново, $Ric = k.g$, с константна QC-скаларна кривина, когато $n > 1$. Всъщност, QC-Айнщайново многообразие с константна положителна скаларна кривина е локално QC-еквивалентно на 3-Сасакиево пространство. Основен пример за 3-Сасакиево пространство е $(4n+3)$-мерната сфера в кватернионното пространство от (кватернионна) размерност $n+1$, снабдена с т. нар. стандартна 3-Сасакиева структура. Съответните резултати в случая на отрицателна скаларна кривина могат да бъдат видяни в статиите [59, 60]. Теорема 2.2.2 характеризира случая на равенство от Теорема 2.2.1, когато QC-структурата е QC-Айнщайнова. По-точно, тя ни дава, че ако многообразието е компактно QC-Айнщайново, равенството в оценката от Теорема 2.2.1 се достига точно тогава, когато многообразието е QC-еквивалентно на 3-Сасакиевата сфера.

Да отбележим, че в [67] е дадена експлицитна формула за собствените функции на първата собствена стойност на суб-Лапласиана, вж. също [5].

Друг резултат, който получаваме, е Теорема 2.2.3, която дава едно интегрално неравенство, включващо суб-Лапласиана и Хесиана на дадена функция с компактен носител върху QC-многообразие и тензорите на кривината и на торзията на свързаността на Biquard. За неговото доказателство използваме формулата от тип на Bochner. Интегрални неравенства от този тип са били получени и използвани по-рано в [37] във връзка с групите на Carnot. Подобен метод, основан върху формула на Greenleaf, е използван в [23]. Като следствие е намерено едно априорно неравенство от тип на Cordes [25] между (хоризонталния) Хесиан и суб-Лапласиана на една функция. За групата на Heisenberg една точна оценка е намерена в [27]. Имайки на разположение нашата оценка, прецизираме резултата от [26] за кватернионната група на Heisenberg. Основното приложение на получената оценка е установяването на $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ регулярност (regularity) на p-суб-Лапласиана за p близко до 2. Точният интервал за p около 2 е определен с константа, която ние намираме.

Съдържанието по раздели на Глава 2 е следното.

В раздел 2.1 даваме необходимата базисна информация, свързана с кватернионно-контактната геометрия, както и някои факти, публикувани в статиите [11], [58] и [66], които използваме по-нататък.

В подраздел 2.1.1 са дадени базисни факти относно кватернионно-контактните структури и свързаността на Biquard. Дадена е следната основна дефиниция.

Кватернионно-контактно (или съкр. QC-) многообразие наричаме $(4n+3)$-мерно многообразие M, върху което е фиксирано разпределение H с коразмерност 3, което локално се задава като ядрото на 1-форма $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ със стойности в $\mathbb{R}^3$, като при това H е снабдено със $Sp(n)Sp(1)$-структура. Последното означава, че е дадена Риманова метрика g върху H и (главно) разслоение $\mathbb{Q}$ с ранг 3 от ендоморфизми върху H, локално породено от три почти комплексни структури I_1, I_2, I_3, удовлетворяващи тъждествата на кватернионите,

$$I_1 I_2 = -I_2 I_1 = I_3, \quad I_1 I_2 I_3 = -id_{|H},$$

които са Ермитово съгласувани с метриката,

$$g(I_s \cdot, I_s \cdot) = g(\cdot, \cdot), \quad s = 1, 2, 3,$$

и следните условия за съгласуваност са в сила:

$$2g(I_s X, Y) = d\eta_s(X, Y), \quad s = 1, 2, 3, \quad X, Y \in H.$$

Тройката $(\eta, g, \mathbb{Q})$ се нарича *кватернионно-контактна структура* върху M, а съответното кватернионно-контактно многообразие се означава с $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$. 1-формата η се нарича *контактна форма* на QC-многообразието, а разпределението *H-хоризонтално разпределение (пространство)*.

Посочени са и някои свойства на QC-структурите. Формулирана е следната теорема, която дължим на Olivier Biquard, за съществуване на канонична линейна свързаност върху QC-многообразие.

Теорема 12 (Теорема 2.1.1) *[11] Нека $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е QC-многообразие от размерност $4n+3>7$ с фиксирана метрика g върху H от конформния клас $[g]$. Тогава върху M^{4n+3} съществува единствена свързаност ∇ с тензор на торзията T и единствено допълващо на H в TM подпространство V, такива, че:*

- *i) ∇ запазва разлагането $H \oplus V$ и $Sp(n)Sp(1)$-структурата върху H, т.е. $\nabla g = 0, \nabla \sigma \in \Gamma(\mathbb{Q})$ за всяко сечение $\sigma \in \Gamma(\mathbb{Q})$, и тензорът на торзията върху H се задава чрез $T(X,Y) = -[X,Y]_{|V}$;*
- *ii) за всяко $\xi \in V$, торзионният ендоморфизъм $T(\xi, \cdot)_{|H}$ на H принадлежи на $(sp(n) \oplus sp(1))^{\perp} \subset gl(4n)$;*
- *iii) свързаността върху V е индуцирана чрез естествената идентификация φ на V с подпространството $sp(1)$ на ендоморфизмите върху H, т.е. $\nabla \varphi = 0$.*

Горната свързаност се нарича *свързаност на Biquard,* и е въведена от Biquard в [11, 12]. Когато размерността на QC-многообразието е наймалко единадесет, в [11] е описано допълващото пространство V, което е (локално) породено от т. нар. *векторни полета на Reeb* $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, определени чрез равенствата

$$\begin{aligned} \eta_s(\xi_k) = \delta_{sk}, \qquad (\xi_s \lrcorner d\eta_s)_{|H} = 0, \\ (\xi_s \lrcorner d\eta_k)_{|H} = -(\xi_k \lrcorner d\eta_s)_{|H}, \end{aligned} \tag{0.9}$$

където $\lrcorner$ означава вътрешното произведение на векторно поле с диференциална форма. Ако многообразието е седем-мерно, Duchemin показва в [28], че ако предположим, в добавка, съществуването на векторните полета на Reeb, удовлетворяващи (0.9), тогава Теорема 12 важи. Разпределението V се нарича *вертикално разпределение (пространство)*. Освен това, кватернионната структура $\mathbb{Q}$ може да бъде продължена върху V чрез изискването $\mathbb{Q}_{|V} = 0$.

Хоризонталната метрика g може да се продължи до Риманова метрика върху цялото TM чрез изискването $span\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = V \perp^g H$ и $g(\xi_s, \xi_t) = \delta_{st}$. Разширената метрика ще отбелязваме със същата буква g.

Посочени са примери за QC-многообразия, като групата на Heisenberg, QC-Айнщайновите и 3-Сасакиевите многообразия. Дефинирана е конформна кватернионно-контактна трансформация между две QC-много-

образия. Дадени са формулите за ковариантните производни на кватернионната структура и вертикалното разпределение, както и други полезни формули.
В подраздел 2.1.2 е дадено инвариантното разлагане на ендоморфизмите на хоризонталното пространство H.
В подраздел 2.1.3 е дадена необходимата информация за торзионния ендоморфизъм T_ξ на свързаността на Biquard.
В подраздел 2.1.4 са дефинирани някои тензори, произхождащи от тензора на кривината на свързаността на Biquard. Именно, дадена е следната дефиниция.
Тензорът на Ricci Ric, QC-скаларната кривина Scal, нормализираната QC-скаларна кривина S, 2-формите от тип на Ricci ρ_s, τ_s, се дефинират съответно чрез равенствата

$$\begin{aligned} &Ric(A,B) = R(e_b, A, B, e_b), \\ &Scal = R(e_b, e_a, e_a, e_b), \quad S = \frac{Scal}{8n(n+2)}, \\ &\rho_s(A,B) = \frac{1}{4n} R(A, B, e_a, I_s e_a), \\ &\tau_s(A,B) = \frac{1}{4n} R(e_a, I_s e_a, A, B). \end{aligned} \tag{0.10}$$

Когато се говори за *хоризонтален* (респ. *вертикален*) тензор, има се предвид неговата рестрикция върху хоризонталното разпределение H (респ. вертикалното разпределение V).
Дадени са необходимите свойства на тензорите на торзията и на кривината на свързаността на Biquard. Дадена е дефиниция на QC-Айнщайново многообразие, както следва.

Определение 13 (Определение 2.1.2) *Една QC-структура се нарича QC-Айнщайнова, ако хоризонталният QC-тензор на Ricci е константно пропорционален на метриката,*

$$Ric(X,Y) = 2(n+2)Sg(X,Y).$$

QC-многообразие, чиято QC-структура е QC-Айнщайнова, се нарича QC-Айнщайново многообразие.

Дадени са необходимите връзки между хоризонталния тензор на Ricci, хоризонталните 2-форми от тип на Ricci и др. и тензорите на торзията.
В подраздел 2.1.5 са дефинирани вторият и третият ковариантен диференциал на гладка функция f върху M относно свързаността на Biquard.

Дефиниран е *хоризонталният градиент* на гладка функция f върху M чрез чрез равенството

$$g(\nabla f, X) = df(X).$$

Дадени са тъждествата на Ricci от втори и трети ред.
В подраздел 2.1.6 е формулирана теоремата за хоризонталната дивергенция, позволяваща ни да интегрираме "по части" върху компактно QC-многообразие.
В раздел 2.2 са формулирани основните резултати. Преди всичко, дадени са някои дефиниции във връзка с резултатите, както следва.
Нека f е дадена гладка функция върху $M, f \in \mathcal{F}(M)$. *Суб-Лапласиан* (или *хоризонтален Лапласиан*) и *норма на хоризонталния градиент* на f се дефинират съответно чрез равенствата

$$\begin{aligned} \triangle f \ &= -tr^g_{|H}(\nabla^2 f) \ = \nabla^* df = -\nabla^2 f(e_a, e_a), \\ |\nabla f|^2 \ &= \ df(e_a)df(e_a). \end{aligned} \tag{0.11}$$

Функцията f се нарича *собствена функция* на $\triangle$ със собствена стойност λ, ако

$$\triangle f = \lambda f, \tag{0.12}$$

където λ е константа. Формулата за дивергенцията ни дава, че върху компактно QC-многообразие всички собствени стойности на суб-Лапласиана са неотрицателни.

Основен резултат за втората част на дисертацията е следната

Теорема 14 (Теорема 2.2.1) *Нека $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е компактно кватернионно-контактно многообразие от размерност $4n + 3 > 7$. Ако тензорът на Ricci и тензорът на торзията на свързаността на Biquard удовлетворяват наравенството*

$$\begin{aligned} Ric(X,X) + \frac{2(4n+5)}{2n+1}T^0(X,X) \\ + \frac{6(2n^2+5n-1)}{(n-1)(2n+1)}U(X,X) \geq k_0 g(X,X) \end{aligned} \tag{0.13}$$

за някоя положителна константа k_0, тогава всяка положителна собствена стойност λ на суб-Лапласиана $\triangle$ удовлетворява неравенството

$$\lambda \geq \frac{n}{n+2}k_0. \tag{0.14}$$

Теорема 14 дава долна граница за множеството от положителните собствени стойности на суб-Лапласиана. Следователно, тя може да бъде интерпретирана като даваща долна граница за първата положителна собствена стойност λ_1 на суб-Лапласиана, т.е. за най-малкото положително число, за което е в сила (0.12). Оценката (0.14) е точна в следния смисъл. За 3-Сасакиевата сфера S^{4n+3} от размерност $4n+3$ имаме [59]:

$$Ric(X,Y) = 4(n+2)g(X,Y), \quad \lambda_1 = 4n.$$

Значи в този случай $k_0 = 4(n+2)$, а $\lambda_1 = 4n = \frac{n}{n+2}k_0$, т.е. равенството в (0.14) се достига (поне) върху 3-Сасакиевата сфера.

Следващият основен резултат изследва случая на равенство от Теорема 14 при условие, че многообразието е QC-Айнщайново.

Теорема 15 (Теорема 2.2.2) *Нека $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ е компактно QC-Айнщайново многообразие от размерност $4n+3 > 7$ с QC-скаларна кривина $Scal = 16n(n+2)$,*

$$Ric(X,Y) = \frac{1}{4n}Scal \cdot g(X,Y) = 4(n+2)g(X,Y).$$

Първата собствена стойност λ_1 на суб-Лапласиана е равна на $4n$ точно тогава, когато $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ е QC-еквивалентно на 3-Сасакиевата сфера от размерност $4n+3$. В частност, върху 3-Сасакиево многообразие от размерност $4n+3$, $n>1$, първата положителна собствена стойност на суб-Лапласиана е равна на $4n$ точно тогава, когато 3-Сасакиевото многообразие е QC-еквивалентно на 3-Сасакиевата сфера.

Третият основен резултат е следващата

Теорема 16 (Теорема 2.2.3) *Нека $(M,\eta,g,\mathbb{Q})$ е $(4n+3)$-мерно QC-многообразие, $n>1$. Тогава за всяка $f \in \mathcal{C}^\infty_o(M)$ следното интегрално неравенство е в сила:*

$$(0.15) \quad \int_M |\triangle f|^2 \, Vol_\eta \geq \frac{n}{n+1}\int_M |\nabla^2 f|^2 \, Vol_\eta$$
$$+ \frac{n^2}{n^2-1}\int_M \Big[Ric(\nabla f,\nabla f) - \frac{4}{n}T^0(\nabla f,\nabla f) - 6U(\nabla f,\nabla f) - 6S|\nabla f|^2\Big] \, Vol_\eta$$
$$= \frac{n}{n+1}\int_M |\nabla^2 f|^2 \; Vol_\eta$$
$$+ \int_M \Big[\frac{2n(n+2)}{n+1}T^0(\nabla f,\nabla f) + \frac{4n^2}{n-1}U(\nabla f,\nabla f) + \frac{2n^2}{n+1}S|\nabla f|^2\Big] \, Vol_\eta.$$

За QC-Айнщайново многообразие, където $T^0 = U = 0$, Теорема 16 ни дава долното следствие, вземайки предвид, че QC-Айнщайново многообразие от размерност поне единадесет има константна QC-скаларна кривина, вж. [66].

Следствие 17 (Следствие 2.2.4) *Нека $(M, \eta, g, \mathbb{Q})$ е $(4n+3)$-мерно QC-Айнщайново многообразие, $n > 1$. Тогава за всяка функция $f \in \mathcal{C}_o^\infty(M)$ е изпълнено*

$$\int_M |\triangle f|^2 \, Vol_\eta \;\geq\; \frac{n}{n+1}\int_M |\nabla^2 f|^2 \, Vol_\eta \;+\; \frac{2n^2 S}{n+1}\int_M |\nabla f|^2 \, Vol_\eta. \tag{0.16}$$

За кватернионната група на Heisenberg с нейната стандартна QC-структура (вж. [66] и [58]), горното следствие ни дава следващия резултат. Целта тук е да прецизираме стойността на константата c_n, понеже дори по-общата Calderón-Zygmund L^p версия важи върху нилпотентни групи на Lie, вж. [32] за хубав обзор.

Следствие 18 (Следствие 2.2.5) *Нека $(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}), \widetilde{\Theta})$ е $(4n+3)$-мерната група на Heisenberg, снабдена със стандартната си QC-структура. Тогава за всяка функция $f \in \mathcal{C}_o^\infty(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))$ е изпълнено*

$$\|\nabla^2 f\|_{L^2(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))} \leq c_n \, \|\triangle f\|_{L^2(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))}, \qquad c_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}. \tag{0.17}$$

Като следствие от горната оценка, вземайки предвид [27] и [26], които обобщават резултатите на Cordes в суб-Римановия случай, получаваме, че за

$$2 \leq p < 2 + \frac{n + n\sqrt{16n^2+8n-3}}{4n^2+2n-1}, \tag{0.18}$$

произволна p-хармонична функция, дефинирана върху отворено множество $\Omega \subset \boldsymbol{G}\,(\mathbb{H})$ върху кватернионната група на Heisenberg от размерност $4n+3$, $f \in S^{1,p}(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))$, има допълнителна регулярност (additional regularity) $f \in S^{2,2}_{loc}(\boldsymbol{G}\,(\mathbb{H}))$. Тук с $S^{k,p}\,(\Omega)$ са означени обичайните неизотропни Соболеви пространства, вж. например [32]. Подобно на [27] и [26], може да се получи $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ регулярност при подходящи ограничения за p. Получаването на $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ регулярност на решението е все още отворен проблем, с изключение на някои случаи, вж. [26], [77] и [38], както и препратките там. Първата $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ оценка е получена за суб-Лапласиана върху групата на Heisenberg [17].
В раздел 2.3 е получена формула от тип на Bochner за суб-Лапласиана на дадена гладка функция върху QC-многообразие. Доказваме и някои помощни твърдения, които използваме при доказателството на основния резултат.

Теорема 19 (Теорема 2.3.1) *Нека е дадено QC-многообразие M от размерност $4n+3$ и $f \in \mathcal{F}(M)$. Тогава е в сила следната формула (от тип на Bochner):*

$$(0.19)\quad -\frac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - g\left(\nabla(\triangle f), \nabla f\right) + Ric(\nabla f, \nabla f) + 2\sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f) + 4\sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f).$$

Като следствие получаваме

Следствие 20 (Следствие 2.3.2) *Върху QC-многообразие от размерност $4n+3$ е вярна формулата*

$$(0.20)\quad -\frac{1}{2}\triangle|\nabla f|^2 = -d(\triangle f)(e_a)df(e_a) + Ric(\nabla f, \nabla f) + 2T^0(\nabla f, \nabla f) - 6U(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + 4\sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f).$$

Следващата лема ни дава единия начин за изразяване на последното събираемо в дясната страна на (0.20).

Лема 21 (Лема 2.3.3) *Върху компактно QC-многообразие от размерност $4n+3$ е в сила следната интегрална формула:*

$$(0.21)\quad \int_M \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f)\, Vol_\eta = \int_M \left[\frac{3}{4n}|(\nabla^2 f)_{[3]}|^2 - \frac{1}{4n}|(\nabla^2 f)_{[-1]}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} \tau_s(I_s\nabla f, \nabla f)\right] Vol_\eta.$$

Друг начин за изразяване на въпросното събираемо ни дава

Лема 22 (Лема 2.3.4) *Върху компактно QC-многообразие от размерност $4n+3$ е в сила следната интегрална формула.*

$$(0.22)\quad \int_M \sum_{s=1}^{3} \nabla^2 f(\xi_s, I_s\nabla f)\, Vol_\eta = -\int_M \left[4n\sum_{s=1}^{3} (df(\xi_s))^2 + \sum_{s=1}^{3} T(\xi_s, I_s\nabla f, \nabla f)\right] Vol_\eta.$$

В раздел 2.4 се съдържа доказателството на Теорема 2.2.1, което се основава на формулата от тип на Bochner 0.19 и горните две леми.
В раздел 2.5. се дава доказателството на Теорема 2.2.2, като е използвана оценката на Lichnerowicz за първата положителна собствена стойност на Римановия Лапласиан [73] и теоремата на Obata [79], характеризираща случая на равенство в оценката на Lichnerowicz, именно, че минималната възможна стойност на положителните собствени стойности се достига върху единичната сфера$S^n(1)$ с кръгова метрика.
В подраздел 2.5.1 се дава връзката между Римановия Лапласиан и суб-Лапласиана на една гладка функция f върху M и като следствие е изведено неравенство между първите собствени стойности на двата Лапласиана. Доказана е следната

Лема 23 (Лема 2.5.1) *Нека M е $(4n+3)$-мерно QC-многообразие. Тогава суб-Лапласианът $\triangle$ и Римановият Лапласиан $\triangle^g$, съответстващ на свързаността на Levi-Civita ∇^g на разширената метрика g, са свързани чрез равенството*

$$\triangle^g f = \triangle f - \sum_{s=1}^{3} \xi_s^2 f + df(\sum_{s=1}^{3} \nabla_{\xi_s}\xi_s). \tag{0.23}$$

Неравенството между собствените стойности на двата Лапласиана се дава от следното

Твърдение 24 (Твърдение 2.5.2) *Нека M е $(4n+3)$-мерно затворено компактно QC-многообразие. Първата положителна собствена стойност μ на Римановия Лапласиан и първата положителна собствена стойност λ на суб-Лапласиана удовлетворяват следното неравенство:*

$$\mu \leq \lambda + \int_M \sum_{s=1}^{3} (df(\xi_s))^2 \, Vol_\eta \tag{0.24}$$

за всяка гладка функция f, за която $\int_M f^2 \; Vol_\eta = 1$.

В подраздел 2.5.2 даваме доказателството на Теорема 2.2.2.
В раздел 2.6 даваме доказателството на Теорема 2.2.3.

Авторска справка

По мнение на автора, основните приноси на дисертационния труд са следните:

1. Намерено е просто необходимо и достатъчно условие за това, едно HKT-многообразие де е $SL(n, \mathbb{H})$-многообразие чрез 1-формата му на Lee;

2. Намерени са изразявания на тензора и формите от тип на Ricci на свързаността на Obata върху HKT-многообразие чрез 1-формата му на Lee. Доказано е, че скаларните кривини на свързаността на Obata върху HKT-многообразие са нули;

3. Намерено е достатъчно условие за несъществуване на HKT-метрика върху хиперкомплексно многообразие в термините на тензора и формите на Ricci и скаларните кривини на свързаността му на Obata;

4. Намерено е достатъчно условие за това, едно компактно HKT-многообразие с точна форма на Lee да бъде хипер-Келерово в термините на $*$-скаларната му кривина и една определена следа на външната производна на тензора на торзията на HKT-свързаността;

5. Доказана е формула от тип на Bochner за суб-Лапласиана върху QC-многообразие;

6. Намерени са две интегрални равенства върху компактно QC-многообразие, изразяващи хоризонтално-вертикалния Хесиан на една функция f, с определени вертикални и хоризонтални аргументи, чрез други тензори;

7. Намерена е точна долна оценка на първата собствена стойност на суб-Лапласиана върху компактно QC-многообразие от размерност, по-голяма от седем;

8. Характеризиран е случаят на равенство в горепосочената оценка при условие, че многообразието е QC-Айнщайново;

9. Намерена е връзка между Римановия и суб-Римановия Лапласиан върху дадено QC-многообразие, и като следствие е изведено неравенство между техните първи собствени стойности;

10. Доказано е интегрално неравенство между квадрата на Лапласиана и нормата на Хесиана на една гладка функция с компактен носител върху дадено QC-многообразие от размерност, по-голяма от седем;
11. Изведени са някои следствия от горния резултат, като например $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ регулярност на p-суб-Лапласиана върху кватернионната група на Heisenberg при p, близко до 2. Точният интервал за p около 2 е определен от константа, която е намерена.

Литература

[1] Alekseevsky, D., S. Marchiafava. "Quaternionic structures on a manifold and subordinated structures." *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Series IV* CLXXI (1996): 205-273.

[2] Alekseevsky, D., Y. Kamishima. "Pseudo-conformal quaternionic CR structure on $(4n+3)$-dimensional manifold." *math.GT/0502531, Ann. Mat. Pura Appl.* 187 (2008): 487–529.

[3] Alesker, S., M. Verbitsky. "Quaternionic Monge-Ampere equation and Calabi problem for HKT-manifolds." *Israel Journal of Mathematics* 176 (2010): 109-138. 8

[4] Alexandrov, B., S. Ivanov. "Vanishing theorems on Hermitian manifolds." *Differential Geometry and its Applications* 14, no. 3 (2001): 251-265.

[5] Astengo, F., Cowling, M., & Di Blasio, B. "The Cayley transform and uniformly bounded representations." *J. Funct. Anal.* 213 (2004), no. 2, 241-269. 17

[6] Banos, B., A. Swann. "Potentials for hyper-Kähler metrics with torsion." *Classical and Quantum Gravity* 21, no. 13 (2004): 3127-3136. 7

[7] Barberis, M. L., A. Fino. "New HKT manifolds arising from quaternionic representations." *Mathematische Zeitschrift*, 267, no. 3-4 (2011): 717-735. 8, 12

[8] Barberis, M. L., I. G. Dotti, and M. Verbitsky. "Canonical bundles of complex nilmanifolds, with applications to hypercomplex geometry." *Mathematical Research Letters* 16, no. 2 (2009): 331-347. 8

[9] Barletta, E. "The Lichnerowicz theorem on CR manifolds." *Tsukuba J. Math.* 31 (2007), no. 1, 77-97. 17

[10] Becker, K., M. Becker, J.-X. Fu, L.-S. Tseng, S.-T. Yau. "Anomaly Cancellation and Smooth Non-Kahler Solutions in Heterotic String Theory." *Nuclear Physics* B751, no. 1-2 (2006): 108-128.

[11] Biquard, O. "Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques." *Astérisque* 265 (2000). 18, 19

[12] Biquard, O. "Quaternionic contact structures." *Quaternionic structures in mathematics and physics (Rome, 1999)*, 23-30 (electronic), *Univ. Studi Roma "La Sapienza", Roma,* 1999. 19

[13] Bismut, J.-M. "A local index theorem for non-Kähler manifolds." *Mathematische Annalen* 284, no. 4 (1989): 681-699.

[14] Boyer, C. P. "A note on hyperhermitian four-manifolds." *Proc. Amer. Math. Soc.* 102, no. 1 (1988): 157-164.

[15] Boyer, Ch., K. Galicki. "3-Sasakian manifolds." *Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds, Surv. Differ. Geom.*, VI, Int. Press, Boston, MA, (1999): 123-184.

[16] Boyer, Ch., K. Galicki, B. Mann. "The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds." *J. Reine Angew. Math.,* 455 (1994): 183-220.

[17] Capogna, L. "Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg group." *Comm. Pure Appl. Math.*, 50 (1997), pp. 867-889. 23

[18] Capria, M., S. Salamon. "Yang-Mills fields on quaternionic spaces." *Nonlinearity* 1 (1988), no. 4, 517-530.

[19] Chang, S.-C., Chiu, H.-L. "Nonnegativity of CR Paneitz operator and its application to the CR Obata's theorem." *J. Geom. Anal.* 19 (2009), 261-287. 17

[20] Chang, S.-C., Chiu, H.-L. "On the CR analogue of Obata's theorem in a pseudohermitian 3-manifold." *Math. Ann.* 345 (2009), 31-51. 17

[21] Chang, S.-C., Chiu, H.-L. "On the estimate of the first eigenvalue of a subLaplacian on a pseudohermitian 3-manifold." *Pacific J. Math.* 232 (2007), no. 2, 269-282. 17

[22] Chang, S.-C., Wu, C.-T. "The entropy formulas for the CR heat equation and their applications on pseudohermitian (2n+1)-manifolds." *Pacific J. Math.* 246 (2010), no. 1, 1-29. 17

[23] Chanillo, S., & Manfredi, J. J. "Sharp global bounds for the Hessian on pseudo-Hermitian manifolds." *Recent developments in real and harmonic analysis, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA,* 2010, 159-172. 18

[24] Chiu, H.-L. "The sharp lower bound for the first positive eigenvalue of the subLaplacian on a pseudohermitian 3-manifold." *Ann. Global Anal. Geom.* 30 (2006), no. 1, 81-96. 17

[25] Cordes, H. O. "Zero order a priori estimates for solutions of elliptic differential equations." *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. IV, American Mathematical Society, Providence, R.I.*, (1961): 157-166. 18

[26] Domokos, A. "On the regularity of subelliptic p-harmonic functions in Carnot groups." *Nonlinear Anal.* 69 (2008), no. 5-6, 1744-1756. 18, 23

[27] Domokos, A., & Manfredi, J. J. "Subelliptic Cordes estimates." *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (2005), no. 4, 1047-1056. 18, 23

[28] Duchemin, D. "Quaternionic contact structures in dimension 7." *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 56 (2006), no. 4, 851-885. 19

[29] Fernández, M., S. Ivanov, L. Ugarte, R. Villacampa. "Non-Kaehler heterotic-string compactifications with non-zero fluxes and constant dilaton." *Communications in Mathematical Physics* 288, no. 2 (2009): 677-697.

[30] Fino, A., A. Tomassini. "A survey on strong KT structures." *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* Tome 52 (100), no. 2 (2009): 99-116.

[31] Fino, A., M. Parton, S. Salamon. "Families of strong KT manifolds in six dimensions." *Commentarii Mathematici Helvetici* 79, no. 2 (2004): 317-340.

[32] Folland, G. B. "Applications of analysis on nilpotent groups to partial differential equations." *Bull. Amer. Math. Soc.* 83 (1977), no. 5, 912-930. 23

[33] Friedrich, Th., S. Ivanov. "Parallel spinors and connections with skew-symmetric torsion in string theory." *The Asian Journal of Mathematics* 6, no. 2 (2002): 3003-3036. 10

[34] Fu, J.-X., S.-T. Yau. "Existence of Supersymmetric Hermitian Metrics with Torsion on Non-Kaehler Manifolds." (2005): preprint arXiv:hep-th/0509028.

[35] Fu, J.-X., S.-T. Yau. "The theory of superstring with flux on non-Kähler manifolds and the complex Monge-Ampère equation." *Journal of Differential Geometry* 78, no. 3 (2008): 369-428.

[36] Gallot, S. "Équations différentielles caractéristiques de la sphére." *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 12 (1979), no. 2, 235-267. 16

[37] Garofalo, N. "Geometric second derivative estimates in Carnot groups and convexity." *Manuscripta Math.* 126 (2008), no. 3, 353-373. 18

[38] Garofalo, N. "Gradient bounds for the horizontal p-Laplacian on a Carnot group and some applications." *Manuscripta Math.* 130 (2009), no. 3, 375-385. 23

[39] Gates, S. J., C. M. Hull, M. Rocek. "Twisted multiplets and new supersymmetric σ-models." *Nuclear Physics B* 248, no. 1 (1984): 157-186. 7

[40] Gauduchon, P. "Hermitian connections and Dirac operators." *Bollettino della Unione Matematica Italiana. Serie VII. Sezione B* 11, no. 2, Suppl. (1997):257-288.

[41] Gauntlett, J., D. Martelli, D. Waldram. "Superstrings with intrinsic torsion." *Physical Review* D69 (2004): 086002.

[42] Gibbons, G. W., G. Papadopoulos, K. Stelle. "HKT and OKT geometries on soliton black hole moduli space." *Nuclear Physics B* 508, no. 3 (1997): 623-658. 7

[43] Grantcharov, G., Y.-S. Poon. "Geometry of hyper-Kähler connection with torsion." *Communications in Mathematical Physics* 213 (2000): 19-37. 7

[44] Gray, A. "Nearly Kähler manifolds." *Journal of Differntial Geometry* 4 (1970): 283-309.

[45] Greenleaf, A. "The first eigenvalue of a subLaplacian on a pseudohermitian manifold." *Commun. Partial Diff. Equations,* 10 (1985), no. 2, 191-217. 16

[46] Griffiths, Ph., J. Harris. "Principles of Algebraic Geometry." *Wiley Classics Library, New York: John Wiley&Sons*, 1994.

[47] Gutowski, J., G. Papadopoulos. "The Dynamics of Very Special Black Hole." *Physics Letters B* 472 (2000): 45–53.

[48] Gutowski, J., G. Papadopoulos. "The Moduli Spaces of Worldvolume Brane Solitons." *Physics Letters B* 432 (1998): 97–102.

[49] Hitchin, N. J. "The self-duality equations on a Riemann surface." *Proc. London Math. Soc.* 55 (1987): 59-126.

[50] Howe, P. S., A. Opfermann, G. Papadopoulos. "Twistor spaces for QKT manifolds." *Communications in Mathematical Physics* 197 (1998): 713-727.

[51] Howe, P. S., G. Papadopoulos. "Finitness and anomalies in (4,0) supersymmetric sigma models for HKT manifolds." *Nuclear Physics B* 381, no. 1-2 (1992): 360-372. 7

[52] Howe, P. S., G. Papadopoulos. "Twistor spaces for hyper-Kähler manifolds with torsion." *Physics Letters B* 379, no. 1-4 (1996): 80-86. 6, 7, 10

[53] Howe, P. S., G. Papadopoulos, V. Stojevic. "Covariantly constant forms on torsionful geometries from world-sheet and spacetime perspectives." (2010): preprint arXiv: 1004.2824 [hep-th].

[54] Ivanov, S. "Geometry of quaternionic Kähler connections with torsion." *Journal of Geometry and Physics* 41, no. 3 (2002): 235-257. 11

[55] Ivanov, S. "Heterotic supersymmetry, anomaly cancellation and equations of motion." *Physics Letters B* 685 (2010): 190-196.

[56] Ivanov, S., A. Petkov. "HKT manifolds with holonomy SL(n,H)." *International Mathematics Research Notices* (2011), doi: 10.1093/imrn/rnr160, 21 pages. 2

[57] Ivanov, S., A. Petkov, D. Vassilev. "The Sharp Lower Bound of the First Eigenvalue of the Sub-Laplacian on a Quaternionic Contact Manifold." *Journal of Geometric Analysis*, doi: 10.1007/s12220-012-9354-9, (2012): 1-23. 2, 3

[58] Ivanov, S., D. Vassilev. "Conformal quaternionic contact curvature and the local sphere theorem." *J. Math. Pures Appl.* 93 (2010): 277-307. 18, 23

[59] Ivanov, S., D. Vassilev. "Extremals for the Sobolev Inequality and the Quaternionic Contact Yamabe Problem." *Imperial College Press Lecture Notes, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ,* 2011. 17, 22

[60] Ivanov, S., D. Vassilev. "Quaternionic contact manifolds with a closed fundamental 4-form." *Bull. London Math. Soc.,* (2010) 42 (6), 1021-1030. 17

[61] Ivanov, S., D. Vassilev, S. Zamkovoy. "Conformal Paracontact curvature and the local flatness theorem." *Geom. Dedicata* 144 (2010), 79-100. 17

[62] Ivanov, S., G. Papadopoulos. "A no-go theorem for string warped compactifications." *Physics Letters* B497, no.3-4 (2001): 309-316.

[63] Ivanov, S., G. Papadopoulos. "Vanishing Theorems and String Backgrounds." *Classical and Quantum Gravity* 18, no. 6 (2001): 1089-1110. 11

[64] Ivanov, S., I. Minchev. "Quaternionic Kähler and hyperKähler manifolds with torsion and twistor spaces." *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 567 (2004): 215-233. 11, 15

[65] Ivanov, S., I. Minchev, D. Vassilev. "Extremals for the Sobolev inequality on the seven dimensional quaternionic Heisenberg group and the quaternionic contact Yamabe problem." *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 12 (2010), no. 4, 1041-1067.

[66] Ivanov, S., I. Minchev, D. Vassilev. "Quaternionic contact Einstein structures and the quaternionic contact Yamabe problem." *preprint, math.DG/0611658.* 17, 18, 23

[67] Ivanov, S., I. Minchev, D. Vassilev. "The optimal constant in the L^2 Folland-Stein inequality on the quaternionic Heisenberg group." *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5) Vol. XI (2012), 635–662. 17

[68] Joyce, D. "Compact hypercomplex and quaternionic manifolds." *J. Differential Geom.* 35 (1992), no. 3, 743-761.

[69] Kashiwada, T. "A note on Riemannian space with Sasakian 3-structure." *Nat. Sci. Reps. Ochanomizu Univ.,* 22, (1971): 1-2.

[70] Kobayashi, S., K. Nomizu. "Foundations of Differential Geometry." *Interscience Publishers, New York-London* Vol. 1, 1963; Vol. 2, 1969.

[71] Li, J., S.-T. Yau. "The Existence of Supersymmetric String Theory with Torsion." *Journal of Differential Geometry* 70, no. 1 (2005): 143-181.

[72] Li, S.-Y., Luk, H.-S. "The sharp lower bound for the first positive eigenvalue of a sub-Laplacian on a pseudo-Hermitian manifold." *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004), no. 3, 789-798. 17

[73] Lichnerowicz, A. "Géométrie des groupes de transformations." *Travaux et Recherches Mathematiques, III. Dunod, Paris* 1958. 16, 25

[74] Martin Cabrera, F., A. Swann. "The intrinsic torsion of almost quaternion-Hermitian manifolds." *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)* 58, no. 5 (2008): 1455-1497. 7

[75] Merkulov, S., L. Schwachhöfer. "Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections." *Annals of Mathematics. Second Series* 150, no. 1 (1999): 77-149, Abbendum : *Annals of Mathematics. Second Series* 150, no. 3 (1999): 1177-1179. 7, 8

[76] Michelsohn, M. L. "On the existence of special metrics in complex geometry." *Acta Mathematica* 149, no. 3-4 (1982): 261-295.

[77] Mingione, G., A. Zatorska-Goldstein, X. Zhong. "Gradient regularity for elliptic equations in the Heisenberg group." *Adv. Math.* 222 (2009), no. 1, 62-129. 23

[78] Obata, M. "Affine connections on manifolds with almost complex, quaternionic or Hermitian structure." *Japanese Journal of Mathematics* 26 (1957): 43-77. 7, 11

[79] Obata, M. "Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere." *J. Math. Soc. Japan* 14, no. 3 (1962), 333-340. 16, 25

[80] Opfermann, A., Papadopoulos, G. "Homogeneous HKT and QKT manifolds." *mathph/ 9807026.*

[81] Papadopoulos, G. "Brane Solitons and Hypercomplex Structures." math.DG/0003024 (published in the volume *Proceedings of the second meeting on "Quaternionic Structures in Mathematics and Physics"*, World Scientific, 2001).

[82] Papadopoulos, G., A. Teschendorf. "Multi-angle five-brane intersection." *Physics Letters B* 443, no. 1-4 (1998): 159-166. 7

[83] Soldatenkov, A. "Holonomy of the Obata connection on $SU(3)$." *International Mathematics Research Notices* (2011), doi: 10.1093/imrn/rnr152, 15 pages.

[84] Spindel, Ph., A. Sevrin, W. Troost, A. Van Proeyen. "Extended supersymmetric σ-models on group manifold." *Nucl. Phys.* B308 (1988): 662-698.

[85] Streets, J., G. Tian. "Regularity results for pluriclosed flow." (2010): preprint arXiv:1008.2794.

[86] Strominger, A. "Superstrings with torsion." *Nuclear Physics B* 274, no. 2 (1986): 253-284. 7

[87] Swann, A. "HyperKähler and Quaternionic Kähler Geometry." *PhD thesis, Oriel College, Oxford* (1990), 128 pages.

[88] Swann, A. "Twisting Hermitian and hypercomplex geometries." *Duke Mathematical Journal* 155, no. 2 (2010): 403-431. 8

[89] Verbitsky, M. "Balanced HKT metrics and strong HKT metrics on hypercomplex manifolds." *Mathematical Research Letters* 16, no. 4 (2009): 735-752. 8, 11, 12

[90] Verbitsky, M. "Hyperkähler manifolds with torsion, supersymmetry and Hodge theory." *The Asian Journal of Mathematics* 6, no.4 (2002): 679-712. 7, 8

[91] Verbitsky, M. "Hypercomplex Manifolds with Trivial Canonical Bundle and their Holonomy." In Neretin, Yu. (ed.) et al., *Moscow Seminar in mathematical physics, II.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (ISBN 978-0-8218-4371-0/hbk). Translations. Series 2. American Mathematical Society 221. Advances in the Mathematical Sciences 60 (2007): 203-2011. 7, 8, 11

[92] Verbitsky, M. "Positive forms on hyperkähler manifolds." *Osaka Journal of Mathematics* 47, no. 2 (2010): 353–384. 8

[93] Wang, W. "The Yamabe problem on quaternionic contact manifolds." *Ann. Mat. Pura Appl.*, 186 (2007), no. 2, 359-380.

[94] Wu, Hung-Hsi. "The Bochner Technique in Differential Geometry." *harwood academic publishers, Chur-London-Paris-New York-Melbourne*, 1988.