



Софийски университет „Св. Климент Охридски“  
Факултет по математика и информатика  
Катедра „Обучение по математика и  
информатика“

Таня Георгиева Тонова

**Когнитивни модели в обучението по математика  
на ученици от 3 – 6 клас**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

на

дисертационен труд

за присъждане на образователна и научна степен „доктор“

в професионално направление **1.3 Педагогика на обучението по ...**

научна специалност **05.07.03 Методика на обучението по математика**

Научно жури: проф. дпн Сава Гроздев (ИМИ-БАН)  
проф. дпн Йордан Табов (ИМИ-БАН)  
проф. д-р Кирил Банков (ФМИ-СУ)  
доц. д-р Мария Нишева-Павлова (ФМИ-СУ)  
доц. д-р Борислав Лазаров (ИМИ-БАН)

**С о ф и я**

**2013**

Дисертационният труд е представен, обсъден и гласуван за допускане до защита на разширено заседание на катедра „Обучение по математика и информатика” на Факултета по математика и информатика на Софийския университет „Св. Климент Охридски”, състояло се на 06.12.2012

Авторът е докторант на свободна форма на обучение във Факултета по математика и информатика на Софийския университет „Св. Климент Охридски”.

Дисертационният труд е от 156 стандартни машинописни страници, състои се от увод, 5 глави, заключение и литература, която включва 73 заглавия, от които 42 на български език, 31 на английски език . Списъкът от публикации на автора по темата на дисертацията включва 12 заглавия.

Публичната защита на дисертационния труд ще се състои на открито заседание на научното жури на 24.04.2013 г. (сряда) от 15.30 ч. в Заседателната зала на ФМИ (София, бул. Джеймс Баучер, 5).

Материалите по защитата са на разположение в библиотеката на ФМИ (София, бул. Джеймс Баучер, 5).

## Увод

Постиндустриалното общество с бързоразвиващите се информационни, комуникационни, био– и нанотехнологии и възникващите глобални икономически, екологически, национални и социокултурни проблеми изпитват остра нужда от техния естествен коректив – професионалната компетентност и гражданска отговорност на индивида; съвременен научен мироглед и произтичащите от него отговорности; развитие на системата от етични и естетични ценности и редица други субективни корективи на обективните проблеми. Както в исторически план, така и днес главната роля в този процес играе образованието, от което произтичат и неговите отговорности. Всяка държава освен актуалните количествени характеристики – площ на територията, брой на населението, произведени киловати електроенергия, добити тонове ценни метали и т.н., има и актуални качествени характеристики, определящи способността на населението като цяло и отделни негови групи или индивиди да реагират на сложни природни, технически, икономически и етно- и социокултурни условия. С други думи качеството на населението се измерва с неговата готовност и способност да работи и осигурява качество на живот.

*Основна роля и основна отговорност за качеството на населението е системата на образование, а в нея един от фундаментите е математическото образование.*

Проблемът и благоприятната възможност при подрастващите е подборът на системни и последователни занимания, които освен че са преход и подготовка за неотменимите задължения на възрастния, имат и своето собствено значение чрез отражението, което дават в момента върху формирането на начина на мислене. При детето няма определеност по отношение на положението и целите, няма почти нищо, което да наложи следването на една определена последователност от действия, а не на друга. Отсъствието на постоянна мотивация в съчетание с вътрешната пластичност на подрастващия увеличават важността на възпитателното въздействие на обучението и трудностите при намиране на последователния начин на действие. При децата изборът на поведение е податлив на влиянието на случайни или субективни фактори, на вълните на образователни реформи и залитания, на различни обществени течения или даже на предразсъдъци. Откриването и формулирането, анализирането и обосноваването, систематизирането и организирането на дейности, благодарение на които детето да осъществи своето интелектуално развитие са от фундаментално значение за обществото.

## **Обща характеристика на дисертационния труд**

### **Актуалност на темата**

Ние сме съвременници на период, през който математическото образование в световен мащаб преживява сложен етап. Свидетели сме на значим и тревожен спад на качеството на математическото образование у нас, на преосмисляне на концепциите за математическите знания и в Русия, САЩ, Германия и други страни. Същевременно е очевидно доминирането на математическото образование в редица азиатски страни, което е видно най-малко чрез безспорните им успехи по всички нива на изява. Периодите на криза са стимул за търсене на изход от нея, подлагат на изпитание качествата на една образователна система като цяло и на всеки неин отделен фрагмент, а и на мястото, ролята на всеки участник и вниманието, което заслужава.

Понастоящем към проблемите на българската образователна система се е обърнала не само научната общност и българския бизнес, но и неправителствени организации с идеална цел. Образователните звена на СУ „Св. Кл. Охридски“ и другите университети и в ИМИ на БАН извършват в изследваната област активна дейност на национално ниво и в международни проекти. Непосредствено участие имат от страна на СУ имат проф. Румяна Пейчева (координатор на европейски проекти), проф. Кирил Банков (външно оценяване), проф. Иван Тонов (problem solving), катедрата Обучение по математика и информатика и др. От страна на БАН – акад. Петър Кендеров (координатор на европейски проекти), проф. Сава Гроздев и проф. Йордан Табов (работа с талантиливи ученици), доц. Евгения Сендова (ИКТ и изследователския подход в образованието), доц. Борислав Лазаров (индивидуални образователни траектории), секцията Обучение по математика и информатика и др.

От страна на бизнеса активна позиция заемат браншовите организации в сферата на ИКТ, които наскоро публикуваха Изисквания на софтуерната индустрия за реформа на образователната система. Функционира и гражданска инициатива „Диалог за бъдещето“ с координатор Явор Джонев, чиято цел е определяне на обществените изисквания и стратегии за фундаментална реформа в българската образователна система.

В дисертацията се прави опит да се постави един макар и частен, но значим въпрос, а именно как да осъвременим обучението по математика, така че в синхрон със съществуващите традиции и резултати то да стане по-адекватно и по-ефективно в съвременните условия. Отговорът се търси на метаметодично ниво в съчетанието „математика като учебна дисциплина – методика на обучението по математика – когнитивна психология“.

## **Мотивация и педагогически принципи**

В дисертацията са възприети философските, педагогически и морално–етични разбирания на Джон Дюи. В „Моето педагогическо кредо“[4] той пише завладяващо и вдъхновяващо „Вярвам, че образованието като цяло е следствие от участието на личността в социалното съзнание на човечеството. Този процес започва несъзнателно почти с раждането и непрекъснато формира способностите на детето, насища ума му, създава навиците му, изгражда представи и събужда емоции...

Вярвам, че този образователен процес има две страни – едната психологическа, другата социална; и нито една от тях не може да бъде подчинена на другата или пренебрегната без негативни последици. От тези две страни психологическата играе ролята на основа. Инстинктите и способностите на самото дете служат като материал и отправна точка на образованието.

Вярвам, че психологическата и социалната страни са органично свързани и че образованието не трябва да се разглежда като компромис между тях или като налагане на едната върху другата... Без вглеждане в психологическата структура и дейности на личността образователният процес ще бъде случаен и произволен... С идването на демокрацията и съвременната индустрия е невъзможно да се предскаже какво ще представлява цивилизацията след двайсет години. Затова е невъзможно да подготвим детето за някакъв конкретен комплекс от условия. Да го подготвим за бъдещия живот означава да му позволим да владее себе си; така да го подготвим, че да може да използва докрай способностите си; така, че ушите, очите и ръцете му да бъдат послушни инструменти; така, че да умее да преценява условията и да действа ефективно и икономично. Такъв тип адаптация не може да се постигне без постоянно вслушване в способностите, вкусовете и интересите на личността, тоест без непрекъснато интерпретиране на образованието през призмата на психологията.”

## **Формулировка на научния проблем**

Според Джон Дюи [3] “Основният, най-сериозен и винаги актуален проблем на образованието е проблемът за откриването и организирането на формите на дейност, които са най-близки, най-подходящи, най-пригодни за развитието на подрастващите, които са най-обещаващи като подготовка на обществените отговорности на възрастните и които същевременно имат максимално влияние за формирането на навици за проникателно наблюдение и последователни заключения”.

## **Цел на дисертационния труд**

**Концептуалната цел** е откриването и формулирането, анализирането и обосноваването, систематизирането и организирането на дейности в процеса на обучението по математика, които да отчетат психологическите фактори в интелектуалното развитие на подрастващия индивид и да формират процеса на интелектуалната му идентификация.

**Целта** на настоящото изследване е обогатяването на методиката на обучението по математика с научно–приложните изследвания, резултати и изводи на когнитивната психология, които са съответни на проблемите на обучението по математика.

**Значимостта на целта** произтича от факта, че математиката е предмет, който се изучава от първия до последния клас на българското общообразователно училище и фигурира в учебните програми на голяма част от специалностите във висшите училища. Качеството на преподаване и усвояване на математическите факти, математическите съждения и доказателства, логически й структури, евристични й подходи, с други думи принципиалното й експониране в системата от знания е фактор, който резонира в безброй проблемни ситуации – от ежедневни житейски до научни и високотехнологични изследвания, открития и приложения. Основание за мястото, ролята и значението на математическите знания и култура и характера на проблемите, които възникват в процеса на придобиване на тези знания, начин на мислене и култура, е и в направения ретроспективен исторически обзор на образователни системи и политики по света.

## **Обект и място на изследването**

**Обект** на изследването са учениците от 3 до 6 клас в процеса на обучението им по математика в **българското училище**. Изборът на обекта се обуславя от етапите на психологическо развитие (Ж. Пиаже [7]) и нива на възприемане на математическите знания (Ван Хиле [17]). Търсено е и съответствие с така нар. *парадокс на свързаността* и *преходните проблеми* и *проблемите с идентичността и хомогенността* на математическата дисциплина през образователните степени. Избраната целева група е приоритетна, а не ограничителна.

## **Хипотези**

В дисертационния труд се формулират две основни **хипотези**.

1. Установените от когнитивната психология принципи на познанието до такава степен съответстват на моделите на усвояване на математически знания, че те могат да бъдат формулирани като теоретични модели на методиката на обучението по математика,

с което да се повиши качеството на математическите знания на масовия ученик в начална и респективно в прогимназиална и гимназиална степен. (**Хипотеза 1.**)

2. Изследваните познавателни процеси и резултатите от тях могат да служат за теоретична основа на метаметодика за реализиране на двете основни парадигми на модерното образование – *Учене за всеки* и *Учене през целия живот*. (**Хипотеза 2.**)

- Взаимодействието на принципа на индивидуалността с функционалността на когнитивните модели е в пряка полза за реализиране на принципа *Учене за всеки* (**Хипотеза 2.1.**)

- Знание, базирано на индивидуалните психолого–познавателни особености на отделния ученик е не само знание само по себе си, но и инструмент за развитие и използване на самостоятелни познавателни процеси, които са необходими за реализиране на принципа *Учене през целия живот*. (**Хипотеза 2.2.**)

### **Задачи, поставени в дисертационния труд**

За постигане на целта са поставени следните **задачи**:

1. **Да се направи** анализ на преподаването, овладяването и мотивацията по математика на учениците от 3 до 6 клас и да се формулират установените проблеми от гледна точка на целта на дисертацията.
  - 1.1. **Анализ** на учебните програми и образователни цели.
  - 1.2. **Анализ** на методическия инструментариум, използван в тези класове.
  - 1.3. Психолого – педагогически **анализ** на избраната целева възрастова група.
2. **Да се направи преглед** на възникването, развитието и приложните резултати на науката за познанието в контекста на обучението по математика.
3. **Да се установят** релевантните на проблемите на обучението по математика резултати на когнитивната психология.
4. **Да се установи** степента на приложимост на новоустановените факти и произтичащите от тях изводи.
5. **Да се очертае** областта на приложимост на направената класификация по когнитивни модели.
6. **Да се предвидят и формулират** възможностите за развитие на проблематиката на изследването в теоретичен и практико – приложен аспект.

### **Методология и методи на научното изследване**

**Методологията**, използвана в дисертационния труд, произтича от неговите характеристики – цел, обект, предмет и задачи. Направен е обоснован избор на

*Методологията на качествените педагогически изследвания, която дава адекватни на проблематика възможности, включително за задълбочен поведенчески анализ.*

За провеждане на изследването са приложени следните **методи**:

1. Сравнително – исторически подход
2. Теоретичен анализ и синтез
3. Контекстен анализ
4. Конкретен анализ
5. Систематично изследване чрез наблюдение
6. Изследване на отделен случай
7. Експертни оценки

### **Новост на научното изследване**

В дисертационния труд се съдържат следните иновационни моменти:

1. Изборът на изследователската парадигма Aptitude-Treatment Interaction (ATI) [14, 17] като фундамент на изследването.

2. Трактовка на понятията и научните постановките на когнитивната психология от гледна точка на преподаване, усвояване и оценяване на математическите знания. Не ми е известно друго такова изследване, проведено в българското училище. Не ми е известно друго такова изследване, не само в българското училище, с избраната целева група.

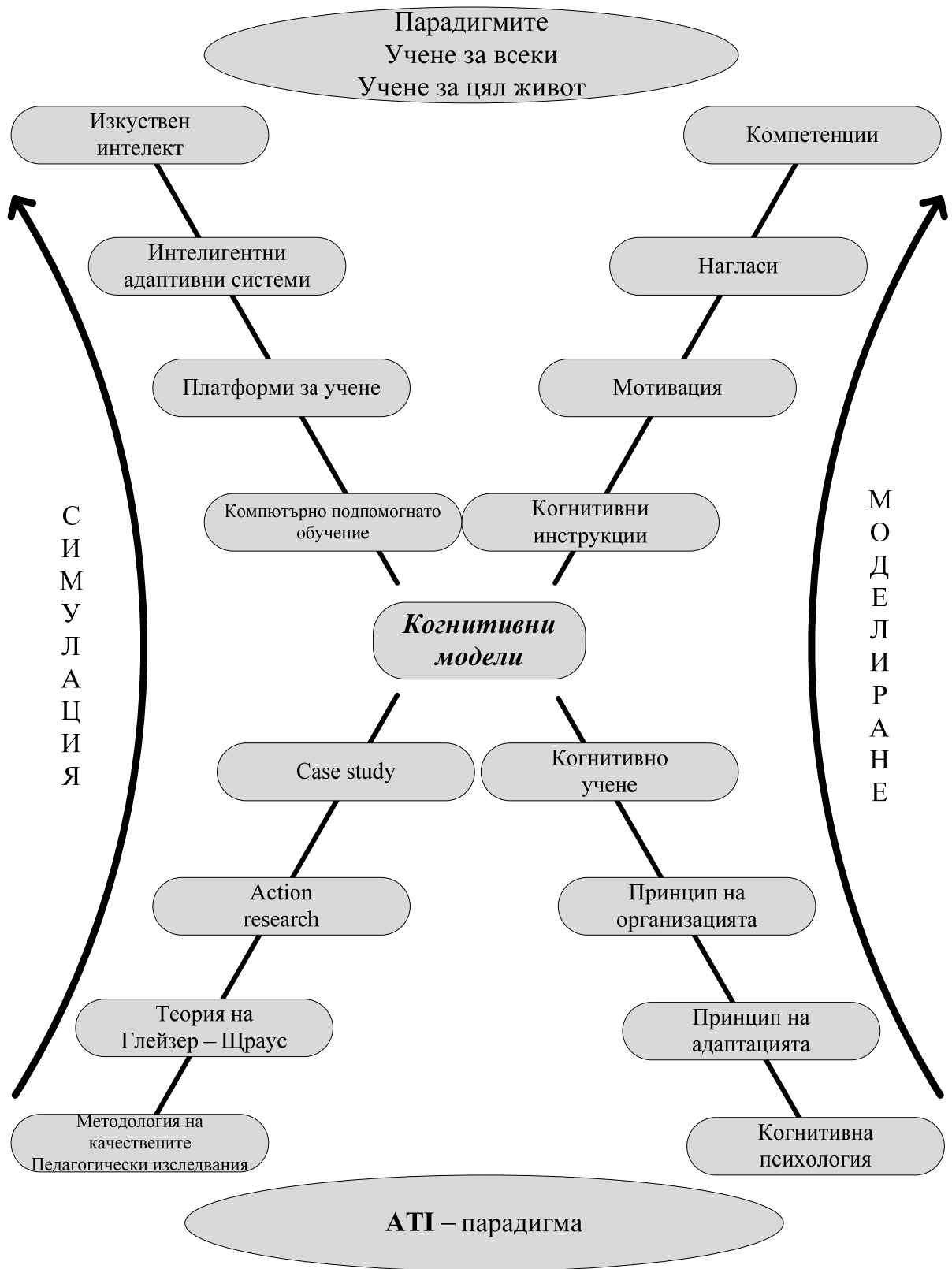
3. Използването на Методологията на качествените педагогически изследвания и Обоснованата теория на Глейзер/Щраус [2]. Не ми е известно друго педагогическо изследване, което да използва тази теория в този обем, последователност и цялост.

4. Обхващането в единно изследване на цялостния процес на когнитивно развитие на учениците от вродени и сурови евристики, през учебния парадокс и учебното чудо, чрез когнитивните модели на учене до личната мотивация и учебни резултати.

### **Структура на научното изследване**

**Концептуалната структура на научното изследване е представена чрез следната схема:**





## Резюме на съдържанието

### Глава I. Обзор на съвременното състояние на когнитивната психология и връзката ѝ с обучението по математика

В първа глава е представено ретроспективното проучване и анализа на съвременното състояние на образованието и конкретно на образованието по математика.

Основно засегнати въпроси в тази глава са:

- Трактовка на проблема *Съвременно образование*. Засегнати са проблемът с дълготрайния ефект от качеството на образователната система; европейските изисквания за повишаване на качеството и ефективността на образователната система; мястото и ролята на учителя, неговата подготовка и мотивация;
- Представени са основните понятия и области на изследване на когнитивната психология, които имат отношение към конкретното изследване. Отбелязана е връзката ѝ с другите, свързани с изследването, научни области.
- Направена е ретроспекция на исторически и съвременни концепции в образователни школи и системи: школата на Питагор, методиката на Бхаскара, методиката на Монтесори, образователната теория на Джон Дюи, концепциите на Фройдентал, моделът на Ван Хиле, делото на проф. Г. Лозанов. Отбелязано е влиянието на психологическия фактор при дизайна и проектирането на адаптивни електронни системи на обучение.
- Направена е ретроспекция на образователни политики, свързани с изследването: програмата МНПУ в САЩ; датският КОМ проект; програмата PISA.
- Анализирани са нормативната база на обучението по математика в България.

В заключение аргументирано са формулирани целта, обектът, хипотезите и задачите на изследването.

### Глава II. Теоретични основи и изследователски методи

Във втората глава в резултат на проучване и анализ на различни възможности е направен избор на теоретичните основи и изследователските методи, съответни на поставените цели и задачи.

Фундамент на изследването е изследователската парадигма *Взаимодействие между индивидуалните склонности/способности и обучението* (Aptitude -Treatment Interaction, ATI) [14]

Изследванията в АТІ парадигмата са комплексни анализи на взаимодействието между индивидуалните способности и персонални нагласи и ефектът от преживените трансформации на обучението. АТІ е използвана, за да се разшири обучението в много области като например обикновената класна стая, специално обучение, обучение на учители и тяхното кариерно развитие, използване на съвременни образователни технологии, компютъризирани и автономни системи за обучение и др. Понастоящем повечето АТІ изследвания са, за да определят ефектите от влиянието върху различните обучителни методи от индивидуалните способности и нагласи на обучаемите.

За осъществяване на настоящото изследване е използвана методологията на качествените педагогически изследвания от областта на качествените изследвания (*Qualitative Research*), която е сравнително нова област с приложение в социологията, психологията, педагогиката и особено за поведенчески анализи. Представени са шестте принципа, от които произтичат изискванията към конкретно научно изследване. В проведеното изследване и в неговото представяне стремежът е да се удовлетворят във възможно най-голяма степен формулираните в литературата общи критерии за оценка на качествените изследвания.

За изследване на индивидуалните особености на учениците и влиянието им върху обучението по математика като методика е използвана теорията на Глейзър/Щраус [2]. Изборът се дължи на възможностите, които тази утвърдена теория дава, за да се изследва обучението по математика като поведенчески процес. Представени са основни компонента на проведеното изследване.

В тази глава е дефинирана и представата за когнитивно учене като активен процес на осъзнаване, в който ученикът конструира ментални представи на входящата информация, съгласувано с предходните знания. Уточнено е каква схема, рамка на когнитивно учене е възприета и използвана в изследването, а именно, която се състои от 2 канала, 3 депа на паметта и 3 когнитивни процеса. Инструкторът е когнитивен водач, който помага на учащите се да се ангажира в съответните когнитивни процеси на учене. Поставените в дисертацията изследователски въпроси имат отношение към природата на процесите на учене, природата на менталните представи и към проектирането на ефективни учебни инструкции.

### III Глава. Когнитивни модели в обучението по математика на ученици от 3–6 клас

В **трета глава** е същността на направеното изследване. В нея се представя така нареченият **концепт**, който е продукт на Обоснованата теорията на Глейзер/Щраус.

#### § 1. Обучението по математика като обект на изследвания

В първия параграф се уточнява разбирането за обучението по математика като обект на научно изследване. В дисертацията е прието виждането на Алън Шонфелд [16], изразено в следната концепция за математиката и обучението по математика:

*Математиката е жив предмет, който се стреми да разбере моделите, алгоритмите, структурите (patterns), които присъстват **както в света около нас, така и в самите нас.***

Това разбиране предполага промени в учебния план и в стила на преподаване, фокусирани върху

- **търсене** на решения, а не само запаметяване на процедури;
- **изучаване** на модели (patterns), а не само запаметяване на формули;
- **формулиране на хипотези**, а не само правене на упражнения.

#### § 2. Когнитивна психология – области на изследвания.

##### **FLMP** теория на Масаро за един учебен казус (case study)

Във втория параграф е представена една възможност теоретичните резултати на когнитивната психология, постигнати от психолозите–изследователи, да хвърли светлина върху един учебен казус. Изследването се отнася за взаимодействието между разпознаването на схеми, закономерности, правила (patterns) и контекста. В следствие на наблюдения върху специални психологически експерименти (например разпознаване на букви в контекста на думи) се установява и изследва влиянието на контекста върху разпознаването на схемата. В резултат на установеното влияние възниква теорията на Масаро (Massaro) *FLMP (Fuzzy Logical Model of Perception)* [1]. Теорията установява, обяснява и предлага мярка на комбинацията от контекста и стимула за разпознаване на схемата.

Показано е как може да се интерпретира и приложи теорията *FLMP* за да анализираме един учебен казус. Разгледан е подробно един реален пример, представен в сюжетна форма, на *педагогическата казуистика* и са направени множество обосновани изводи и са формулирани произтичащи въпроси.

### § 3. Категоризация на индивидуалните различия

В този параграф в съответствие с избрана като методика теория на Глейзер–Щраус, ще приведем резултатите от направеното изследване по етапи.

#### 3.1. Данни за изследването. Теоретична чувствителност (*Theoretical Sensibility*)

Методите за събиране на данни за качествено изследване върху индивидуалните особености на учениците и влиянието им върху обучението по математика са основно преки наблюдения и естествен експеримент.

##### 1. Събиране и натрупване на данни чрез преки наблюдения (*Action research*)

Данните за настоящото изследване са в резултат на повече от 15 години личен професионален опит като преподавател по математика. Последните 10 от тях те са събирани целенасочено за целите на изследването. Лицата, които са били източник на данни чрез лични, непосредствени и осъществяващи се в продължителен интервал от време контакти, могат да се разделят на две основни групи – ученици и професионалисти. Наблюдавано и отчетено е и мнението на родители и други обществени групи. Описани са и формите и дейностите, които са обект на събиране и натрупване на данни.

Идентификаторите, които са проследяване по време на събиране на данните и превръщането им в информационна система, са:

– **по отношение на учениците** – прояви на индивидуални способности и нагласи; честота и стабилност на тези прояви; трайност/променливост на доминантните особености; обвързаност с учебните резултати;

– **по отношение на професионалната общност** – интерес, съпричастност, информираност, професионална компетентност и готовност за практически действия и отношение спрямо индивидуалните особености и нагласи на учениците.

##### 2. Естествен експеримент

Естествен експеримент или експеримент на терен е този, който се провеждат без видими изменения на естествените условия и традиционните взаимоотношения с наблюдаваните лица. Представен е един такъв експеримент, който е проведен с ученици от 4 клас в три групи подготвителен курс по математика и обхваща около 100 ученика. Представява задание и документиране на самостоятелната работа в рамките на едно занятие. Описани са предпоставки, благодарение на които може да се счита че, резултатите от експеримента удовлетворяват изискванията за теоретична чувствителност и са отражение на индивидуалността на учениците, на автентичното им усещане, на реалния ход на техните мисли и емоции.

Целите на експеримента бяха да се установят обстоятелствата в няколко различни направления.

- ✓ Наличието на различни подходи към решението на зададена задача.
- ✓ Възможности за споделяне на идеи и разсъждения.
- ✓ Способности да се учат от собствен опит и да го ползват, когато са поставени пред тази необходимост за решаване на непознат проблем.

Приведени са някои конкретни писмени работи, които представят в обобщена форма резултатите от експеримента.

### **3.2. Кодиране на данните. Създаване на концепт**

Кодирането на данните, т.е. анализирането и интерпретирането на наличните данни за създаване на хипотези и теории, се извършва от позицията на формулираното вече разбиране на обучението по математика.

Според обоснованата теория на Глейзер/Щраус, както вече беше посочено, процедурно кодирането на данните се извършва на три етапа – открито, осово и избирателно.

#### **1. Вродени и сурови евристики. Учебен парадокс (*открито кодиране*)**

Разгледан е въпросът с ролята и мястото на вродените и сурови евристики в процеса на когнитивно учене. Формулиран е така нар. *учебен парадокс*, разкрита е същността е ролята на това явление като фактор в поведението на учениците и връзката му с вродените и сурови евристики. В резултат е формулирано понятието *учебно чудо* и мястото и ролята му в процеса на когнитивно учене. В резултат се поставят и се търси отговор на следните основни въпроси

- гъвкавостта на обучението;
- влиянието на инструкциите за решаване на задачи върху тези естествени и сурови евристични тенденции;
- трябва ли тези вродени или сурови евристики да са решаващ фактор за успеха или неуспеха в инструкционалното обучение;
- трябва ли да се разработват индивидуално ориентирани, специални курсове и програми, които да обучават учениците, така че да се развиват според индивидуалните дадености и способности;
- трябва ли тези вродени и сурови евристики да бъдат изследвани, измервани и класифицирани, така че последвалите ги изследвания да са фактор в преподаването и ученето;
- трябва ли и как да бъдат въввлечени учителите в тези процеси?

## **2. Чувствителност към индивидуалните различия. Когнитивни корелации (осово кодиране)**

Анализират се подходи и програми, които помагат подобряването на общото мислене и уменията за логическо обосноваване и дедуктивно аргументиране и са чувствителни към индивидуалните различия, подпомагат учениците да станат по-сигурни в усилията си, да дадат възможност да учениците да открият, осъзнаят и развият способностите си, да обучава учениците чрез натрупване на усилия и опит да компенсират слабостите си.

## **3. Когнитивни модели (избирателно кодиране, представяне на концепт)**

Според Пиаже [1, 7] в интелектуалното развитие действат два **основни принципа** – адаптация и организация. Интелектуалното развитие се осъществява по посока на повишаване степента на адаптация и разумът работи така, че все по-ефективно да реагира на изискванията на средата.

Според **първия общ принцип – адаптацията**, личността притежава мисловни структури, които възприемат и адаптират външни сигнали и ги превръщат в мисловни явления или мисли.

**Вторият общ принцип – организацията**, касае адаптирането на мисловните структури. Съгласно Пиаже, разумът се структурира или организира с нарастваща сложност и степен на интеграция, като първото и най-елементарно ниво е схемата, която е мисловна репрезентация на някакво действие, изпълнявано от обекта. С развитието на индивида интегративността и съответната координираност на схемите нараства, което е признак за развитие на разума.

Общият **концепт** на настоящето изследване е категоризация на индивидуалните различия и когнитивни корелации, които те пораждат при обучението по математика, в четири основни когнитивни модела на когнитивното учене.

I. **Акомодативен** модел (accommodation – приспособяване, нагласяване, нагаждане, сговорчивост; акомодирам – приспособявам се, нагаждам се; лат. accomodatio). За този когнитивен модел акцентът е върху конкретното преживяване и активното експериментиране. Най-силната страна на тази ориентация е извършването на дейности, реализиране на запланувани задачи, готовност да се изоставят правилата/теорията, ако те не съответстват на наличната информация. Адаптивният му характер се изразява в търсене на възможности, поемане на рискове и предприемане на действия. Учениците с акомодативна ориентация са склонни да решават проблемите чрез интуитивно прилагане

на метода на пробите и грешките. Разчитат и се облягат преди всичко на информацията, а не на аналитичните си възможности.

II. **Асимилативен** модел (assimilation – усвояване, оприличаване, възприемане; лат. assimilatio от ad „към” и similis „подобен”). При този модел се наблюдава абстрактното концептуализиране и рефлексивното наблюдение. Най-силните страни на тази ориентация се изразяват в дедуктивно извеждане на причинно-следствените връзки, в способността да се създават и използват теоретични модели и да се обединяват в единни обяснителни концепции отделни наблюдения. За тях най-важно е теорията да изглежда логична и да се прилага строго.

III. **Дивергентен** модел (анг. divergence – различие, разминаване, раздалечаване; лат. divergentes – различие, divergo „показвам разлика”). Този модел се основава на рефлексивното наблюдение. Учениците с такава когнитивна ориентация се представят най-добре в ситуации, които изискват интерпретиране на алтернативни идеи и действия, те са склонни към дейности като така нар. мозъчна атака. Те използват въображението си за изграждането на конкретен, специфичен подход в съответната ситуация. Могат да създадат красиви и оригинални решение за конкретния проблем.

IV. **Конвергентен** модел (лат. convergo – сходимост, сближаване, съвпадение, сходство на признаци и свойства на независими предмети и явления). При учениците с този когнитивен модел водещи са уменията за абстрактно концептуализиране. Тяхното поведение се основава на здравия разум, на реализацията на „единственото” за тях правилно решение на въпроса или задачата. При тях ученето, придобиването на нови знания е така организирано, че по хипотетико-дедуктивен път (т.е. по схемата ако – то) се насочват към решаването на специфичния проблем.

Акомодативният и асимилативния модели съответстват на общия принцип на адаптация, а дивергентният и ковергентният модели – на общия принцип на организация.

Направен е анализ на събраните експериментални данни от гледна точка на въведената класификация по когнитивни модели.

### 3.3. Отчет на резултатите

Представени са редица учебни помагала, на които дисертантът е съавтор и в създаването на които е реализирана в някаква степен концепцията за когнитивно учене и развитие. Такива помагала са „Математическа читанка” (2000 г.) с автори В. Златилов, Т. Топова, И. Цветкова и В. Панделиева, последвана от „Първа математическа читанка” (2006 г., автори: В. Златилов, И. Цветкова, Т. Топова) и „Втора математическа читанка”



(2012 г., автори: В. Златилов, Т. Тонова), които се налагат като основно учебно помагало в школите за 3.– 4. клас, Полагала за свободно-избираема подготовка за 5, 6 и 7 клас (2006, 2007, съответно 2008, автори И.Тонов и Т.Тонова). Популярността, която те имат и неизменното им присъствие в издателския план на изд. Труд и изд. Просвета ми дават основание да считаме, че са едни успешни учебни полагала, т.е. заложените принципи работят успешно.

Като извод за в бъдеще се надявам да се създадат специализирани центрове за работа с деца, в които заниманията с математика, освен като учебен предмет, в съдействие с психолози и педагози да бъдат и в полза за установяване на индивидуални заложби и потенциал за развитие. В обществото се чувства остра нужда от такива центрове, родителите са добре информирани и силно заинтересовани от професионална подкрепа както за тях, така и за децата си. Липсата им наточава учителите с несвойствени дейности, за които те и не са подготвени. Една междинна и полезна стъпка в това направление е обучението на учителите в основите на когнитивната психология и взаимодействието с обучението по математика.

#### **Глава IV. Функционалност на когнитивните модели**

В четвърта глава е развит проблемът за практическата приложимостта на изследвания процес на когнитивно учене и функционалността на предложената класификация. Това е направено в 4 основни направления: съгласуваност на резултатите с други научни изследвания, конструиране на когнитивни инструкции и учебни програми, мотивацията на учениците и мотивация и нагласи на учителите по математика.

##### **§ 1. Преносимост на когнитивните модели**

Разгледани са и анализирани две сходни изследвания – на ученици от 7–8 клас при изучаване на геометрия [18] и на студенти, 1 курс, при изучаване на Calculus [19]. Направена е съпоставка с класификацията в дисертацията.

Извършените наблюдения и анализи по време на настоящото изследване ни дават основание да предположим, че установената класификация на четирите когнитивни модела на обработка на информация при решаване на математически задачи – асимилативен, акомодативен, ковергентен и дивергентен, е валидна, т.е. *преносима* и за гимназиалната степен на обучение. Този извод е подкрепен с конкретни данни от реалната учебна практика, а именно при решаването на алгебрични задачи; на геометрични задачи и

на комбинаторни задачи. Приведени са подробни решения и са анализирани от гледна точка на концепта на изследването.

## **§ 2. Когнитивните инструкции и проектиране на обучението (*curriculum design*)**

Изходна точка в този параграф е разбирането, че в когнитивната инструкция рефлектират идеите на социалния конструктивизъм, на който са радатели Лев Вигодски и Жан Пиаже [17]. Социалният конструктивизъм следва тезата, че човек активно изгражда това, което знае, а не го получава пасивно. Следователно, социалният конструктивизъм се гради върху интерпретативната епистемология. Основното виждане е, че учащите конструират знания в социален контекст, опитват се да придадат смисъл на знанието и прилагайки го непрекъснато модифицират първичните знания в нови знания, т.е. опитват се да преодолеят *парадокса на свързаността*.

Изследвани са принципите, от които се ръководят учениците при решаване на задачи и е установено от какви когнитивни инструкции се нуждаят, за да повишат своите учебни резултати и да са активни в процеса на когнитивно учене.

Основен инструмент на когнитивните инструкции е математическата задача. Затова тя е обект на специално внимание. Направена е класификация на математическите задачи, от една страна, според основните изисквания към задачите, използвани в обучението по математика и от друга страна – според основните качества, които те трябва да притежават. Основните изисквания са групирани в две области – дидактико-педагогически и социално-психологически. Основните качества (свойства) на задачите също са разпределени в две основни области – автентичност и адекватност.

*Автентичност* е свойството на математическите задачи да свържат обучението по математика с реалния живот.

*Адекватност* на математическите задачи е свойството чрез отразяване на научно-предметното учебно съдържание да реализират целите на обучението.

Описана е ролята на предложената класификация и на отделните типове задачи в процеса на когнитивно учене.

## **§ 3. Когнитивни модели и мотивацията на учениците**

Мотивацията е вътрешно състояние, което поддържа, насочва и стимулира действията на човек и заема водещо място в структурата на поведението му. Разбирането какво мотивира хората изисква изучаването на пряката и съвременна връзка между целенасочените действия и получените резултати. Тези резултати имат субективно значение и са психологическа ценност за отделната личност.

Мотивацията е един от най-критичните компоненти на ученето и е сред най-трудните за измерване. Готовността да се вложат усилия в ученето е продукт на много фактори, простиращи се от личността и способностите на ученика до характеристиките на определени учебни задачи, стимулите за учене, средата и поведението на околните (родители, учители, съученици и пр.). Като психичен феномен е един от най-често изследваните и тези изследвания сочат, че тя функционира на **три нива**.

- На първо ниво (**когнитивно-перцептивно**) се търсят нови впечатления и се проявява готовност за посрещане на различни по характер ситуации;
- На второ ниво доминират поведенческите компоненти – формиране на стратегии за адаптиране към променящата се среда. Определящи в изпълнението на учебните задачи са развитието на индивидуалните интелектуалните способности и личната компетентност (**когнитивно ниво**).
- На трето ниво мотивацията за учене се изразява в стремеж към постигане на високи учебни резултати, което повишава личната самоувереност и ефективност (**метакогнитивно ниво**).

Следователно, мотивацията за учене се определя както от индивидуално-личностните характеристики и способности за когнитивно функциониране, така и от динамичните и непрекъснати взаимодействия със средата. От тази гледна точка е анализирано поведението на ученици в процеса на решаване на задачи, приведени са примери и са направени следните основни изводи:

1. На определен етап на натрупване на съответното количество правила, схеми и алгоритми възниква възможността за логическа реорганизация на математическите знания. Катализатор на този процес е мотивацията, породена от личната свобода за изява на индивидуалните особености в математическото мислене при решаване на математически задачи.
2. Учениците, които са мотивирани да научат и постигнат нещо, използват висши познавателни процеси в ученето, в състояние са да абсорбират и съхраняват по-голям обем информация. Важна задача на учителите е да планират начините, по които да поддържат мотивацията на учениците.
3. За мотивиране на ученето и повишаване на личната удовлетвореност от успеха (като атрибут на мотивацията) са по-добри умерени до трудни (но не и невъзможни) задачи, отколкото лесни, чисто рутинни или примери. Отново се наблюдава проява на *учебния парадокс*.

4. Общобразователното обучение по математика в преобладаващата си част се състои почти изцяло от усвояването (запаметяването) на определени правила, схеми, алгоритми и прилагането им в предварително заучени прости задачи. Възниква въпросът как и дали изобщо е възможно тази „традиция“ по естествен път да се развие до модерните методики на преподаване и усвояване. А те са инструментите за мотивиране и индивидуална изява на ученика, който очевидно има потенциал за това. Или аналогично на учебния парадокс при учениците имаме състояние, при което демонстрационно–имитационната методика и алгоритмична мнемоника не могат сами по себе си да се развият до методика на когнитивните инструкции.

#### § 4. Когнитивни модели и компетенциите и нагласите на учителите

В дисертацията е прието разбирането, че образователната компетентност се състои в придобиването на комплексни знания и умения на експертно ниво, достатъчни за да бъде специалистът в състояние да изпълнява специфични задачи в или извън академичните среди. С други думи атрибути на компетентността са:

- интердисциплинарни професионални знания и подготовка;
- способност за трансфер на знания и умения в нови ситуации;
- организация и планиране на работата;
- използване на иновации;
- справяне с нерутинни ситуации и др.

За учителя по математика може да се счита, че е постигнал професионална компетентност ако е в състояние да практикува висок стандарт. Този стандарт има поне две измерения – висока ефективност и широк обхват. Въпросът за измерване (оценяване) на професионалната компетентност е изключително предизвикателство, защото *колкото тя е по-голяма, толкова по-трудно се измерва и оценява.*

Представени са две категоризации на компетентността и е изследвано как те се проявяват в разнообразни, реални учебни практики. В хода на анализа на тези реални ситуации са проследени етапите на компетентност. Направени са изводи за изискванията към подготовката на учителите по математика, за да получат потенциала, необходим им за постигане на професионална компетентност.

Отделно, специално внимание е обърнато на началните учители. Относно тях не можем да говорим за математическа компетентност, а за педагогическа и психологическа. Въпреки това използването на тези компетентности в полза на ученика силно се влияят от

начина на преподаването на математически знания. Затова от значение са нагласите на началния учител да преподава математика и да се усъвършенства и развива в това си качество. Представено е изследване, което показва степента на готовност и нагласите на началните учители да се подпомогнат в тази си дейност от качествен образователен софтуер.

## Глава V. Основни резултати и изводи. Отворени въпроси

В пета глава са формулирани следните **основни изводи**:

- Теорията на когнитивната психология може успешно да е в услуга на обучението по математика.
- Концепциите за когнитивно учене са в съответствие и в услуга на усвояването на математически знания.
- Съществуват и са показани ситуации на ниво конкретни учебни казуси, които могат да бъдат анализирани с теоретични постановки на когнитивната психология.
- Абстрактността на математическите знания, която е тяхна основна характеристика, налага използване на теорията на когнитивното учене за усвояването им като най-адекватна.
- Класификацията на когнитивното учене по математика чрез четири когнитивни модела е извлечена от практиката и се потвърждава от нея.
- Установена е функционалността на когнитивните модели в редица значими области:
  - решаване на задачи (*problem solving*);
  - мотивация на учащите се;
  - проектиране на учебни програми;
  - компетенциите на учителите;
  - нагласите на учителите;
  - усъвършенстване на методиката на обучение по математика с когнитивни инструкции;
  - оценяване резултатите на учениците.
- Теорията на когнитивните модели е реална възможност учителят от демонстратор, владеещ информацията, да се превърне в модератор,

владеещ механизмите за превръщане на информацията в знания, каквото е съвременното изискване към тази професия.

Очертани са **отворени въпроси** в изследваната област, които са свързани с изследването и могат да са негово продължение и разширяване. Те са перспективи за бъдещо развитие и могат да бъдат насочени в поне четири основни насоки.

- I. Просторни и мащабни изследвания върху процесите на изучаването на математика от гледна точка на когнитивната психология. Целта е да се установи как функционира мисълта, за да се разкрие по-голяма част от интелектуалните възможности на индивида; включване на индивидуалните особености, дадености, способности, заложби като средство за получаване на по-добро образование; придобиване на знания не по принцип, а като активна част от интелектуалния капацитет. Научен и социален интерес представлява въпросът за когнитивните модели на обучение по математика на ученици с обучителни особености, а именно:
  - дислексия (*dyslexia*),
  - дискалкулия (*dyscalculia*),
  - дисграфия (*dysgraphia*),
  - зрителни и слухови нарушения в обучението (*auditory and visual processing disorders*);
  - невербална необучаемост (*nonverbal learning disabilities*),и тяхното отчитане и преодоляване в обучението по математика. Тези изследвания са принос в реализацията на съвременната образователната парадигма „учене за всеки“.
- II. Използване на съответствието между теоретичните постановки на когнитивната психология и обучението по математика на практическо ниво. Потенциални сфери на приложимост са методиката на преподаване, учебни стандарти, учебни програми, учебни материали, изпитни програми, системи за мотивация, системи за оценяване и редица други конкретни образователни области. Друга потенциална, но много значима, сфера на практическо приложение е обучението и особено квалификацията на учителите. След конкретни изживявания при обучението на конкретни ученици и пряк сблъсък с проблемите и предизвикателствата, учителят е

„узрял“ да продължи професионалната си квалификация. Все по-актуална е и необходимостта от споделяне на определени учебни ситуации, тяхното анализиране и последиците от реакциите на учителя, реакциите на учениците и др., за да може направените на тази база изводи да се върнат обратно в помощ както на науката, така и на практиката. Възможностите, които предоставят съвременните комуникационни средства, са инструмент и катализатор такъв процес да се глобализира.

- III. Верифициране на хипотезите чрез изследвания, основани на методологията на количествените педагогически изследвания. Машабни дейности на държавно ниво като Външното оценяване и Държавните зрелостни изпити могат да бъдат включени в такова изследване. Достатъчно е в проектирането на материалите им да бъде включен и този аспект със съответните му индикатори. Резултатите, получени чрез тези дейности, ще създадат машабна банка от съдържателна информация за регистриране и регулиране на качеството на обучението.
- IV. Когнитивните модели са актуално и основно понятие в теорията на интелигентните компютъризирани системи за обучение, адаптивни системи за обучение, експертни системи, системи за машинно обучение, т.е. в областта на Изкуствения интелект. Задачите в областта на Изкуствения интелект не се решават чрез опростяване или пригаждане на съществуващите понятия в традиционните формални обучителни системи. Проблематиката на Изкуствения интелект е свързана по-скоро с качествени, не количествени проблеми, с аргументация, а не с изчисления, с организацията на големи бази знания, а не с реализацията на един точно определен алгоритъм. За да отговорят на тези изисквания разработките на Изкуствения интелект трябва да притежават следните свойства:
- Обработване на знания, представени в качествена форма;
  - Получаване на нови знания от множество факти и правила (т.е. промяна на знанията);
  - Отчитане на общи принципи и конкретни ситуации;
  - Предаване на сложни семантични (смислови) значения;
  - Осигуряване на разсъждения на мета ниво.
- Очевидна е връзката между така формулираните свойства на Изкуствения Интелект и изследваните процеси на когнитивно учене. Изкуственият

интелект изследва закономерностите, върху които се гради разумното поведение, и е емпирична методология за създаване и изследване на всевъзможни негови модели. Разумното поведение, интелектуалната дейност на човек започва с неговото раждане. Затова всеки модел на развитие на интелекта на всяка възраст, в частност и на целевата група на това изследване в процесите на изграждане на математически знания, е от значение за целите на Изкуствения интелект.



## Заклучение

Понятието когнитивен модел е описателно или качествено представяне на човешкото мислене за дадена концепция, умение или област. Фокусът е върху когнитивното знание и умение като се противопоставя на сензорно-моторните умения и може да включва декларативни, процедурни и стратегически знания. Когнитивният модел е представата за това как човек придобива, допълва и използва знанията си. Тези процеси са тясно свързани с метакогнитивните разсъждения и могат да се проявят в резултат на:

- ревизиране, т.е. коригиране на съществуващи знания;
- придобиване или кодиране на нови знания в резултат на обучение или личен опит;
- комбиниране на съществуващи компоненти, за да се направят изводи или се осмислят новите знания.

Когнитивните модели трябва да обяснят или симулират тези умствени процедури и да покажат как те предизвикват относително перманентни промени в дълготрайната памет на учащия се. Моделите могат да са полезни за диагностика на грешки в обучението, за неправилни разбирания и заблуди и в много случаи да предпишат съответните инструкционални намеси.

Когнитивното моделиране е основен инструмент в полето на когнитивната наука, използва се да изясни човешкото мислене за всяка област, която можем да си представим. Когнитивният модел за дадена област или за процеса на решаване на задачи например, типизира експертните знания, които понякога в продължение на години или даже десетилетия са се формирали в съзнанието на този експерт. Възможно е, даже твърде вероятно е, търсенето на начини и пътища, по които учащият се придвижва, за да достигне към знанията и състоянието на експерта да е толкова сложно и комплексно колкото, ако не и повече, от самото знание.

Изследванията на когнитивната наука са за да опишат процесите, в които е ангажиран учащият се за постигане на знания и компетенции в дадена област. За конструиране на когнитивни модели са необходими множество от подходи, за да се събере подходящата информация за протичащите процеси докато учениците са ангажирани в обучението. Това включва документиране на разсъждения, описание на траектории на решаване на задачи, диагностични тестове, експерименти на терен и даже първичен

анализ на мозъчната активност. Мисленето може да се прояви по различни начини, в различни контексти и за различни типове знания. Когнитивните модели могат да приемат описателна форма, съобщавайки емпирични наблюдения и стратегии, установени върху учащите се в процеса на обучение. Когнитивните модели са тясно свързани с метакогнитивността, която може да бъде представена като „мислене за мисленето”.

Метакогнитивното мислене представлява един съществен аспект на когнитивните модели, защото това ниво определя контролния механизъм, който трябва да се прилага от учащия се в случаите на актуално придобиване на нови знания. За да се достигне крайното състояние на процеса на поява на нови знания в дълготрайната памет, учащите трябва активно да регулират техните собствени когнитивни процеси, да решават накъде да насочат своето внимание, да преценят дали разбират и осъзнават главните, възлови моменти на проблема, да преценят дали се страхуват или се опитват да избегнат проблема, да решат дали да потърсят помощ и др.

Всеки когнитивен модел е почти по дефиниция непълен и винаги е необходимо да се ограничи когнитивното моделиране по някои параметри, като например:

- според областта от знания, *в случая математика*;
- според вида на разсъжденията, *в случая решаване на задачи (problem solving)*;
- според целевата група, *в случая ученици от 3 – 6 клас*.

## Основни приноси

Основните приноси на дисертационния труд могат да бъдат направени въз основа на постигнатите основни резултати и изводи, които са формулирани в параграф V.1 (стр. 142 на дисертационния труд).

### Научни приноси

1. **Установена и изследвана** е последователността на когнитивно развитие на учениците от вродени и сурови евристики, през учебния парадокс и учебното чудо, чрез когнитивните модели на учене до личната мотивация и учебни резултати.
2. **Направена** е класификация на индивидуалните различия в процеса на когнитивно учене чрез когнитивни модели. Представени са характеристиките на всеки модел и функционалността им в разнообразен образователен контекст.
3. **Разширена** е научната област на методиката на обучение по математика като интердисциплинарна наука с елементи от когнитивната психология.

### Научно–приложни приноси

1. Дисертацията представлява университетски курс по метаметодика на математиката и научни изследвания в областта, който е подходящ за студенти-магистри, специализанти и докторанти.
2. Проучванията върху когнитивното поведение са от полза при проектирането на традиционни и нетрадиционните форми на обучение – дистанционно, чрез електронни платформи за учене, интелигентни адаптивни системи и др.

### Публикации, свързани с темата на дисертацията

1. Tonova T., Individual Specific Abilities of Motivated Students in Problem Solving, 6<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Mathematics Education, Plovdiv, 2009, Bulgaria
2. Т. Тонова (и колектив), Използване на информационните технологии в часа по математика в началното училище, Начално образование, бр. 5, 2007
3. Т. Тонова (и колектив), Готовност и нагласа на началния учител за работа и сътрудничество с лабораторията по образователен софтуер, Начално образование, бр. 5, 2007
4. Т. Тонова (и колектив), Виртуална лаборатория по образователен софтуер, V Есенна Научна конференция на ФНПП, София, 2007
5. Т. Тонова, Методологични принципи за използването на образователен софтуер в помощ на обучението, IV Есенна Научна конференция на ФНПП, София, 2006
6. Т. Тонова, И. Иванов, Компютърът като инструмент за повишаване интереса към математиката, III есенна научна конференция на ФНПП на СУ "Св. Кл. Охридски", 19–24 септември 2005 г., Китен
7. Т. Тонова, И. Иванов, Компютърът като помощник на математиката в начален курс, 35 Пролетна конференция на СМБ, 6–9 април 2005г., Боровец–България
8. Т. Тонова, Върху целите на обучението по математика в III клас, II есенна научна конференция на ФНПП на СУ "Св. Кл. Охридски", 20–25 септември 2004 г., Китен
9. Tonova T., One Aspect of the Learning Paradox, International Congress MASSEE'2003, September 15–21, 2003, Borovets, Bulgaria
10. Т. Тонова, Фокуси с числа, Сп. Математика, бр. 2, 2004
11. Т. Тонова, Числото. Що е то?, Сп. Математика, бр. 6, 2003
12. Т. Тонова, Детективски задачи, Сп. Математика, бр. 5, 2003

### Доклади

1. Tonova T., Mathematical Teachers' Competencies, International Congress Mathematical Society of South Eastern Europe, Ohrid, 2009, Macedonia
2. Tonova T., An Attempt Of Actual Education Of Mathematics Teachers, Gemeinsame Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Berlin, 2007
3. Tonova T., I. Ivanov, New Technologies in Mathematics Teaching and Learning for Children, International Conference Pioneers of Bulgarian Mathematics, Sofia, 2006

### Основни литературни източници

1. Андерсон Дж., Когнитивная психология, изд. Питер, 2002, ISBN 5-272-00216-4
2. Бижков Г., Краевски В., Методология и методи на педагогическите изследвания, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2007, ISBN 978-954-07-2639-7
3. Дюи Дж., Как мислим, ИК „Минерва“, София, 2002, ISBN 974-91180-2-9
4. Дюи Дж., Моето педагогическо кредо, в-к Култура, 15.09.2006 г.
5. Люгер Дж., Искусственный интеллект, изд. Вильямс, Москва, 2003, ISBN 5-8459-0437-4
6. Славин Р., Педагогическа психология, изд. Наука и изкуство, София, 2004, , ISBN 954-02-0293-0
7. Солсо Р., Когнитивная психология, изд. Питер, 2002, ISBN 5-318-00397-4
8. Соуза Д., Как мозг осваивает математику, изд. ЛомоносовЪ, Москва, 2010, ISBN 978-5-91678-035-2
9. Тонов И., Евристиката – наука, изкуство, занаят, хабилитационен труд,  
<http://www.fmi.uni-sofia.bg/>
10. Фройденталь Г., Математика как педагогическая задача, изд. Просвещение, М., 1983
11. Фройденталь Г., Математика в науке и вокруг нас, изд. Мир, Москва, 1977
12. Фрэнкин Р., Мотивация поведения, изд. Питер, 2003, , ISBN 5-94723-052-6
13. Cockcroft, W. H. Mathematical Counts: Report of the Committee of Inquiry Into the Teaching of Mathematics under the Chairmanship of Dr. W.H. Cockcroft, London, Her Majesty's Stationary Office, 1982
14. Silver, E.A. (Ed.), Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple Research Perspectives, Hillsdale, N.J.: Erlbaum., 1985
15. Schoenfeld A., When Good Teaching Leads to Bad Results, Educational Psychologist, 23 (2), Spring 1988.
16. Schoenfeld A., Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics, In D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning, 1992
17. Seel N. (Ed.), Encyclopedia of the Sciences of Learning, Springer Amazon.com, e-ISBN 978-1-4419-1428-6
18. Каплунович И., Иванова Н., Индивидуальностей математического мышления на процесс решения задач, Математика в школе, бр. 9, 2004
19. Przenioslo, M., Cognitive structures connected with the calculus notions held by representatives of various intellect types, Journal for Didactics of Mathematics, 2, 2006

## Съдържание на автореферата

Увод.....	3
Обща характеристика на дисертационния труд.....	4
Актуалност на темата.....	4
Мотивация и педагогически принципи .....	5
Формулировка на научния проблем.....	5
Цел на дисертационния труд.....	6
Обект и място на изследването.....	6
Хипотези .....	6
Задачи, поставени в дисертационния труд.....	7
Методология и методи на научното изследване.....	7
Новост на научното изследване.....	8
Структура на научното изследване и обем на дисертационния труд.....	8
Резюме на съдържанието .....	10
Глава I. Обзор на съвременното състояние на когнитивната психология и връзката ѝ с обучението по математика.....	10
Глава II. Теоретични основи и изследователски методи.....	10
Глава III. Когнитивни модели в обучението по математика на ученици от 3–6 клас .....	12
Глава IV. Функционалност на когнитивните модели.....	17
Глава V. Основни резултати и изводи. Отворени въпроси .....	21
Заклучение.....	25
Основни приноси .....	27
Публикации, свързани с темата на дисертацията .....	28
Основни литературни източници.....	29